



LE POLY MIXTE ENVOÛTEUR

Guillaume Bardou

Préface de Jean-Pierre Luminet

Mise à jour : 08/08/2023 : la formule de la norme d'un vecteur en dimension quelconque.

Mise à jour : 17/08/2023 : « l'écriture compactée en matrice » dans les annexes.

Mise à jour : 06/10/2023 : dans la fin de l'introduction.

Mise à jour : 12/11/2023 : Suppression de l'article « Angles et mesures algébriques en référence logique à un objet orienté » dans les annexes. J'ai compris qu'il n'était que baratinage insane. Par une sorte de fatalité cet article sera refait et incorporé dans un prochain ouvrage.

À mes enfants, Victor et Svetlana, pour qu'ils se souviennent du temps passé...

Illustration de couverture : un perroquet bâillonné, critique du psittacisme, au risque et péril d'un autre oiseau bavard qui a pu raconter n'importe quoi. Dessin de mon oncle Jean-Marc Tremsal. Les illustrations du livre ont été réalisées avec le logiciel GeoGebra.

PREFACE

En juillet 2020, mon ami et fidèle lecteur Guillaume Bardou m'écrivait ce petit mot : « Je prépare quelque chose, mais il faut beaucoup de temps. »

De fait, il avait décidé de se plonger, en autodidacte, dans les mathématiques, et en excellent plongeur de compétition qu'il est par ailleurs, il a artistiquement effectué le grand saut dans l'océan de formules du calcul vectoriel.

Près de deux ans plus tard, je recevais ce très volumineux manuscrit, fruit d'un époustouflant travail au titre étrange et intrigant de *Polymixte Envoûteur*. Certes, peu de lecteurs pourront en suivre les détails, mais là n'est pas l'important. Si ces pages n'apporteront rien aux mathématiques déjà existantes, elles révèlent « le poids des actes », pour reprendre le titre d'un beau et profond texte que Guillaume m'avait dédié en 2012, en l'occurrence l'extraordinaire volonté et le désir de comprendre dont Guillaume a toujours fait preuve dans toutes ses activités. Comme il me l'écrivait encore récemment, il souhaite « laisser une trace de quelque chose de bien fait, le temps que durent les traces ».

Au-delà des formules que d'aucuns trouveront arides, pour ne pas dire ésotériques, j'invite vivement le lecteur à explorer les dernières pages faisant état des pensées, émotions et sentiments qui ont assailli leur auteur durant ce long processus de maturation ressemblant à un rituel d'initiation.

Jean-Pierre Luminet, juillet 2022

Notes :

Jean-Pierre Luminet, né le 3 juin 1951 à Cavaillon, est un astrophysicien, conférencier, écrivain et poète français, spécialiste de réputation internationale des trous noirs et de la cosmologie. Il est directeur de recherche au CNRS, membre du Laboratoire d'astrophysique de Marseille, après avoir été longuement membre du Laboratoire Univers et Théories de l'observatoire de Paris-Meudon, auquel il reste affilié. Il est également chercheur associé au Centre de Physique Théorique de Marseille. Membre de plusieurs académies et sociétés savantes, il est lauréat de nombreux prix, notamment le Prix Européen de la Communication Scientifique 2007, le prix Kalinga et la médaille Einstein de l'UNESCO en 2021. L'astéroïde (5523) Luminet, découverte à l'observatoire Palomar en 1991, porte son nom en hommage à ses travaux. De par ses activités de poète, essayiste, romancier et scénariste, dans une œuvre voulant lier science, histoire, musique et art, il est également Officier des Arts et des Lettres. Il a publié (et il continue d'écrire) une quinzaine d'essais, sept romans et sept recueils de poèmes, traduits en une douzaine de langues, ainsi que des CD, des DVD et des documentaires pour la télévision. Il est aussi musicien, graveur et sculpteur. Il a collaboré avec des compositeurs comme Gérard Grisey, Hector Parra, Régis Campo ou Karol Beffa.

Vers 13h, ce 03/08, au sortir de la piscine de Champigny-sur-Marne, cette conversation avec mes amis plongeurs Didier et Marc :

- *Au fait, je vous ai dit que mon ami l'astrophysicien m'a écrit une préface pour mon livre ?*
- *Oui, tu nous l'as dit*
- *Eh bien, il a dit quelque chose qui ne me plaît pas trop...*
- *Ah ?*
- *Oui, parmi un tas de choses très bien, il a dit que j'étais un excellent plongeur de compétition, et ça, c'est faux...*

Et mes amis partent d'un bon rire et je vois la clarté de leurs esprits répondre à ma candeur en cette circonstance bénie. Si j'ai pu montrer quelques vidéos de plongeurs pas trop mal faits, je n'ai jusqu'à ce jour jamais brillé dans les particularités des compétitions.

Notre santé mentale dépend de notre approche de ce qui dépasse l'humain et de notre façon d'appréhender ce réel voilé. Le jeu des possibles à cet égard, doit comprendre des faits qui puissent s'ordonner dans un ensemble qui fait sens. Loin des mystiques et des témoignages faciles inventés ou non, "le sens de la vie", n'est-il pas, par une belle anagramme, "L'éveil des ânes" ?

Michel Ligner

*An equation for me has no meaning,
unless it expresses a thought of God*

Srinivasa Ramanujan

Introduction

Je n'ai en mathématiques à ce jour ni appréciations extérieures ni diplômes spécialisés, et j'ai probablement raconté quelques bêtises dans l'étude qui suit, quoique je ne me sois permis d'ignorer consciemment aucune erreur. Je me suis engagé il y a environ deux ans dans la tentative de répondre à une question que je me posais : est-ce qu'un produit vectoriel est toujours orthogonal aux vecteurs en produits dans un repère non orthonormé ? Je n'avais alors aucune idée des réponses que j'allais pouvoir me donner, de celles que je finirai par produire, des autres questions que j'allais me poser, de tous mes blocages désespérés et de tous mes triomphes passagers. Il m'a semblé avoir remonté inlassablement le rocher de Sisyphe au sommet de la colline des espérances pour le voir dévaler dans les faux problèmes que pose le langage, ou avoir fait et défait interminablement la tapisserie de Pénélope attendant le retour d'Ulysse. J'ai quand même réussi à faire remonter, comme une surprise à la surface de ma conscience, un peu de l'esprit de liberté enfoui en ma personne. Étant ainsi motivé par une bonne raison dans un effort personnel librement consenti, je pouvais comprendre ce que j'aurai eu du mal à apprendre.

Je me suis nourri de culture aux moments possibles, c'est à dire quand je pouvais comprendre ce que je lisais, toujours un peu effrayé de trouver des réponses que je ne comprendrai pas aux questions que je me posais. Ces questions me guidaient avec prééminence, moi désiré seul devant elles. J'ai trouvé ma joie à agir dans mon espace intérieur, dans ces zones opaques et transparentes pour créer, peiner, trouver, détruire et reconstruire. Ce fut quelque chose de plus complexe qu'un simple processus autodidacte d'épuration des idées, cela m'a mené à penser que les règles et les méthodes mathématiques et les buts de la pensée pouvaient changer en moi sans avoir été faux. Du moment qu'une totalité logique était constituée, les règles, méthodes, buts étaient vrais car de vérité fondée sur une interdépendance relative, pas sur la croyance d'un de leurs aspects figés. Je pense que c'est vrai pour toutes les autres sortes de totalités, qu'on appelle aussi accomplissements personnels. Enfin, dirai-je, la petite voix intérieure du faux problème qui disait « c'est comme ça », sans voir l'au-delà de la certitude, cette petite voix du monothéiste réfutant le polythéiste, mais aussi celle du polythéiste réfutant le monothéiste laissa place à une évolution.

Je ne suis pas différent dans l'action de l'escargot marin, qui construit une coquille géométrique qu'il ne voit pas, ou encore de la courbure du cristallin d'un œil, pour la vision qu'elle ne pense pas. Je suis activité combinatoire dans la temporalité. Mais je vois ce que je contiens, tout ce que je contiens est mon décor et la

place de mon corps. Et j'évolue pour devenir un grand voyageur. Je suis l'action de celui qui me contient si nous sommes d'accord. Son décor est ma matérialité, mes sentiments, et il peut voir ma combinatoire s'étaler dans la durée. Ils ne sont pas terrestres, ce sont des conteneurs, des dieux ou des envoûteurs. Par l'évolution nous accentuons la formation de nos consciences avec les corps des autres, et à un niveau supérieur les déplacements instantanés ne peuvent être que la règle et la joie de l'Univers.

Celui qui cherche à apprendre quelque chose se parle à lui-même, il peut paraître donner une leçon, mais c'est à lui qu'il parle. Il y a entre celui qui parle et celui qui écoute une ressemblance et une distance dans l'univers des possibles. Le résultat est un compromis. Je n'ai pas cherché à gommer ce compromis avec l'autre et moi-même derrière des équations exposées sans aucune explication, quoique j'observe une tendance à évacuer de la présentation du texte mathématique tout ce qui ressort de la spéculation propre au langage de mots. D'un point de vue autre, mon ouvrage n'apporte aux mathématiques rien de nouveau : je n'ai fait que passer et repasser méthodiquement sur les écritures existantes pour les voir plus grandes. Mon ouvrage est davantage l'œuvre d'un bûcheron que celle d'un artiste ébéniste, mais j'avais besoin de voir la forêt, de la mesurer de mon pas.

Que mon éventuel lecteur ne s'égare pas dans les alourdissements non utiles aux mathématiques dont cet ouvrage est sans doute parsemé, et qui se présentent comme des leçons malheureuses. Je lui souhaite la libre jouissance de son intelligence pour qu'il trouve son chemin ici ou ailleurs, dans le fait inévitablement complexe de son existence.

Mon étude est d'un niveau inqualifiable parce qu'elle dépasse l'objet qu'elle étudie : j'ai cherché tout seul, trop seul peut-être, mais je trouve à mon œuvre du charme comme peut être charmant tout acte réalisé avec passion par soi-même, avec rigueur et honnêteté, dans son décor changeant de douleurs et de joies physiques, de petites et de grandeurs morales.

Table des matières

Chapitre 1 MODÈLE DE MESURES D'ANGLE DANS L'OBJET $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

1.1 Généralités

1.2 Angles étudiés

1.3 Conditions sur les paramètres

1.4 Quelques définitions logiques suffisantes aux nombres de dimensions de l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

1.5 Conditions d'orthogonalité des plans dans l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

1.6 Calculs des angles $(\vec{i}, \overrightarrow{OF}), (\vec{j}, \vec{k}), (\vec{k}, \vec{i}), (\vec{i}, \vec{j})'$

1.7 Calculs des angles γ, μ, δ'

1.8 Calculs des angles $(\vec{j}, \overrightarrow{OG}), (\vec{k}, \overrightarrow{OG}), (\vec{k}, \overrightarrow{OZ}), (\vec{i}, \overrightarrow{OZ}), (\vec{i}, \overrightarrow{OF})', (\vec{j}, \overrightarrow{OF})'$

1.9 Tableau récapitulatif des formules du modèle d'orientation des angles dans l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

Chapitre 2 CALCULS ANALYTIQUES DANS LES REPÈRES DE L'OBJET $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

2.1 Généralités

2.2 Définitions d'opérateurs

2.3 Forme analytique de $\vec{i} \wedge \vec{j}$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}$

2.4 Forme analytique de $\vec{j} \wedge \vec{k}$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}$

2.5 Forme analytique de $\vec{k} \wedge \vec{i}$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}$

2.6 Produits vectoriels des vecteurs unitaires dans les repères de $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{2D}$

2.7 Produits vectoriels des vecteurs unitaires dans les repères de $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{1D}$

2.8 Coordonnées de points et vecteurs dans les repères de l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

2.9 Produits vectoriels de vecteurs quelconques

2.10 Produit scalaire**2.11 Normes de vecteurs dans les repères de l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$** **2.12 Détermination de l'angle non orienté $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|$ entre vecteurs quelconques****2.13 Détermination de l'angle orienté $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ entre vecteurs quelconques****2.14 Produit mixte****2.15 Tableau récapitulatif des formules des opérations géométriques dans l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$** **Chapitre 3 : CONVERSIONS DE COORDONNÉES ENTRE REPÈRES QUELCONQUES EUCLIDIENS****3.1 Généralités****3.2 Déterminants et objets orientés****3.3 Résolutions des systèmes d'équations de combinaisons linéaires de vecteurs****3.4 Formules de changement de coordonnées entre repères quelconques de mêmes dimensions**

$$3.4a \text{ D'un repère } (O; \vec{i})1D \text{ à un repère } (O'; \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|})1D$$

$$3.4b \text{ D'un repère } (O; \vec{i}; \vec{j})2D \text{ à un repère } (O'; \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}; \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|})2D$$

$$3.4c \text{ D'un repère } (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})3D \text{ à un repère } (O'; \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}; \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}; \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|})3D$$

3.5 Tableau récapitulatif des formules de conversions de coordonnées entre repères quelconques euclidiens de mêmes dimensions**Chapitre 4 : JEUX D'ÉCRITURES DANS L'ESPACE nD** **4.1 Généralités****4.2 Mise en évidence du déterminant 3×3 dans le produit mixte du repère quelconque $3D$** **4.3 Passage à l'usage d'une notation synthétique appropriée****4.3a Produit vectoriel en nD** **4.3b Produit scalaire en nD** **4.3c Norme d'un vecteur en nD** **4.3d Produit mixte en nD** **4.3e Développements dans l'espace euclidien du produit mixte avec l'écriture synthétique****4.4 Conclusion sur les jeux d'écritures****4.5 Tableau récapitulatif des jeux d'écritures dans l'espace nD**

Chapitre 5 : LE POLY MIXTE ENVOÛTEUR

5.1 Généralités

5.2 Les objets polymixiaux et leurs descriptions en vecteurs polymixtes envoûteurs

5.3 Cas général des objets polymixiaux $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \dots; \overrightarrow{v_m}) yD$

5.4 Egalité de la norme du vecteur polymixte envoûteur avec les mesures locales dans la géométrie de l'objet polymixial $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \dots; \overrightarrow{v_m}) yD$

5.5 Forme analytique du vecteur envoûteur

5.5a Théorème de nullité ou d'indéfinition du polymixte ordinaire ou envoûteur

5.5b Théorème de non-définition du polymixte ordinaire dans l'espace de dimension paire égale à celle de l'objet

5.5c Théorème de définition nulle du polymixte ordinaire dans l'espace de dimension paire immédiatement supérieure à celle de l'objet

5.6 Cas des objets polymixiaux $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \dots; \overrightarrow{v_m}) mD$

5.6a Distributivité de l'envoûteur et formations de lignes polymixiales

5.6b Palinodie de la formule

5.6c Décomposition d'un déterminant en somme de produits de coordonnées

5.6d Lignes polymixiales des polymixtes envoûteurs

5.6e Construction du Polymixte envoûteur m pair dans R^{m+1} par lignes polymixiales

5.6f Construction du Polymixte envoûteur m impair dans R^m par lignes polymixiales

5.6g formule générale du polymixte envoûteur $\overrightarrow{pm}_{m/n}$ $R^{n \text{ impair}}$

5.6h Reconstitution d'un déterminant m pair $\times m$ pair par toutes ses lignes polymixiales

5.6i Reconstitution d'un déterminant m impair $\times m$ impair par toutes ses lignes polymixiales

5.7 Mesures absolues d'objets polymixiaux par les normes des polymixtes

5.8 Egalité de la norme de la forme analytique du vecteur polymixte envoûteur dans le repère $\{\overrightarrow{e_i}\}m$ avec la norme de sa forme géométrique et ses mesures locales dans le repère, pour la géométrie de l'objet polymixial $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \dots; \overrightarrow{v_m}) mD$

5.9 Vecteur produit mixte d'un objet $3D$ confiné à $R^{n \text{ impair}}$ dans $R^{n \text{ impair}}$

5.10 Croissance des vecteurs polymixtes dans $\{\overrightarrow{e_i}\}m$ famille libre

5.10a Croissance du vecteur polymixte dans $\{\overrightarrow{e_i}\}1 \cup \{\overrightarrow{e'_p}\}(n-1)$

5.10b Croissance du vecteur polymixte dans $\{\overrightarrow{e_i}\}2 \cup \{\overrightarrow{e'_p}\}(n-2)$

5.10c Croissance du vecteur polymixte dans $\{\vec{e}_i\}3 \cup \{\vec{e}'_p\}(n-3)$

5.10d Croissance du vecteur polymixte dans $\{\vec{e}_i\}4 \cup \{\vec{e}'_p\}(n-4)$

5.10e Croissance du vecteur polymixte dans $\{\vec{e}_i\}5 \cup \{\vec{e}'_p\}(n-5)$

5.11 Tableau récapitulatif des formules des polymixtes

Chapitre 6 : DETERMINANT

6.1 Calcul de déterminant par somme de produits de permutations orientées

6.2 Tableau récapitulatif des formules

ANNEXES

PROGRAMMES INFORMATIQUES

ANGLES ET COORDONNEES

PERMUTATIONS DE VECTEURS ET ORIENTATIONS D'OBJETS

LE CIEL EST MA FAMILLE

JUSTIFICATION DE LA REFERENCE LOGIQUE DU MODELE AUX MESURES DE $(\mathbf{O}; \vec{i}; \vec{j})2D$

TECHNIQUES D'ORIENTATION DE L'ESPACE

ÉQUATIONS D'OBJETS ET APPARENCES

POURQUOI LE PRODUIT VECTORIEL EST-IL ORTHOGONAL ?

L'ECRITURE COMPACTEE EN MATRICE

CALCUL DU DETERMINANT $n \times n$

GENERALITES SUR LES ESPACES VECTORIELS

TRACES DE VECUS

Chapitre 1

MODÈLE DE MESURES D'ANGLE DANS L'OBJET $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

dans toutes les transformations. Dans ces cas, les comparaisons des signes des sinus des angles doivent s'accorder à ces observations, puisque les orientations relatives d'angles entre eux restent contraires ou identiques indépendamment du point de vue de l'observateur qui les compare dans l'espace (même si les sens s'inversent selon le point de vue).

On donne en annexe un programme informatique construit sur cette étude et automatisant ces opérations.

Il existe plusieurs modèles possibles de mesures d'angle. À mon sens, les moins bons exigent davantage d'équations pour justifier les cas particuliers. Et s'il y a trop d'équations exceptionnelles, ce n'est plus des mathématiques, bien que cela y ressemble. Le modèle que nous avons retenu est assez simple. Il témoigne du choix d'une référence logique à un plan (ici le plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$). On donne en annexe une justification du choix de la référence logique aux mesures de $(O; \vec{i}; \vec{j})$ 2D.

On définit les paramètres suivants :

Dans le repère du plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$ la mesure de l'angle $(\vec{i}, \vec{j})$ est un paramètre libre. L'observateur donne, à un écart angulaire allant d'un premier objet nommé suivi d'un second, une mesure algébrique arbitraire que l'on peut ramener par congruence dans l'intervalle de mesure principale $] -\pi ; \pi]$. Il suffit ainsi de choisir une mesure de $\sin(\vec{i}, \vec{j})$ pour donner *ipso facto* une orientation au repère du plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$, premier plan étudié dans l'ordre de l'étude.

Note : On peut élargir les informations contenues dans $\sin(\vec{i}, \vec{j})$ en écrivant $\sin(\vec{i}, \vec{j}) = \psi_2 \cdot \xi_2 \cdot |\sin(\vec{i}, \vec{j})|$, où l'opérateur ψ_2 caractérise l'orientation d'un espace 2D et ξ_2 caractérise l'orientation de l'angle formé sur 2 vecteurs voir en annexe « Angles et coordonnées » ou « Permutations de vecteurs et orientations d'objets ». Plus généralement un ordre d'énumération de m vecteurs composant un objet prend au choix la valeur $\xi_m = 1$ ou $\xi_m = -1$, mais chaque permutation de vecteurs dans cet ordre en change le signe. Dans le plan, la mesure d'un écart angulaire suffit à orienter tout le plan (plus exactement un repère du plan dans lequel on fait des mesures) puisque toutes les mesures d'angle s'y réfèrent et permettent de donner des résultats cohérents aux équations. Cependant une telle propriété n'est que conséquence d'un énoncé conceptuel plus profond.

Si l'observateur a choisi $\vec{k}$ non orthogonal au plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on lui demande de donner des mesures des angles $(\vec{j}, \overrightarrow{OF})$ et δ :

$(\vec{j}, \overrightarrow{OF})$ est l'angle que fait le vecteur $\vec{j}$ avec la projection orthogonale F du point K du vecteur $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$ dans le plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$. L'observateur lui donne une mesure dans l'ensemble des nombres réels, que l'on peut ramener par congruence dans l'intervalle de mesure principale $] -\pi ; \pi]$. Cette valeur est contrainte par le modèle dans le cas où $\sin(\vec{i}, \vec{j}) = 0$.

$\delta = (\overrightarrow{OF}, \vec{k})$ est l'angle que fait le vecteur $\overrightarrow{OF}$ avec le vecteur $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$ dans le plan $(O; \overrightarrow{OF}; \vec{k})$. L'observateur lui donne une mesure que l'on peut situer par congruence dans l'intervalle de mesure $] -\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2} [$.

Si l'observateur a choisi $\vec{k}$ orthogonal au plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$, le point F est confondu en O , et les angles comprenant le vecteur $\overrightarrow{OF}$ ne sont pas définissables. Dans ce cas on demande à l'observateur de choisir un signe pour $(\vec{j}, \vec{k}) = \pm \frac{\pi}{2}$ afin de poursuivre les calculs de l'étude.

Autres choses :

Je me suis inventé le signe $\boxtimes$ pour la notation du produit scalaire.

Je me suis inventé les termes « directoïde » et « indirectoïde » pour signifier l'orientation grossièrement directe ou indirecte d'une base de trois vecteurs, donnée par la méthode des trois doigts (dans ces cas très flexibles). De telles orientations sont indépendantes du choix d'une orientation de l'espace par la même méthode pour des vecteurs orthogonaux aux vecteurs mis en produit vectoriel.

J'appelle « variable » une mesure ou une appréciation déduite des paramètres par une équation, et

« paramètre » une mesure ou une appréciation initiale.

J'ai un peu personnalisé la notation usuelle pour les jeux d'écritures dans l'espace nD . Elle doit certainement ressembler à quelque chose d'existant. Comme elle provient de la synthèse de ce que j'ai pu comprendre dans l'espace euclidien, je l'ai nommée « notation synthétique ».

Je n'utilise pas le point (.) pour figurer la multiplication des matrices. Je pense même qu'il est abusif de parler de multiplication pour ce qui semble un arrangement de sommes et de produits dans un tableau, et dont le résultat me paraît devoir se distinguer du calcul arithmétique. J'utilise donc le symbole $(. +)$:

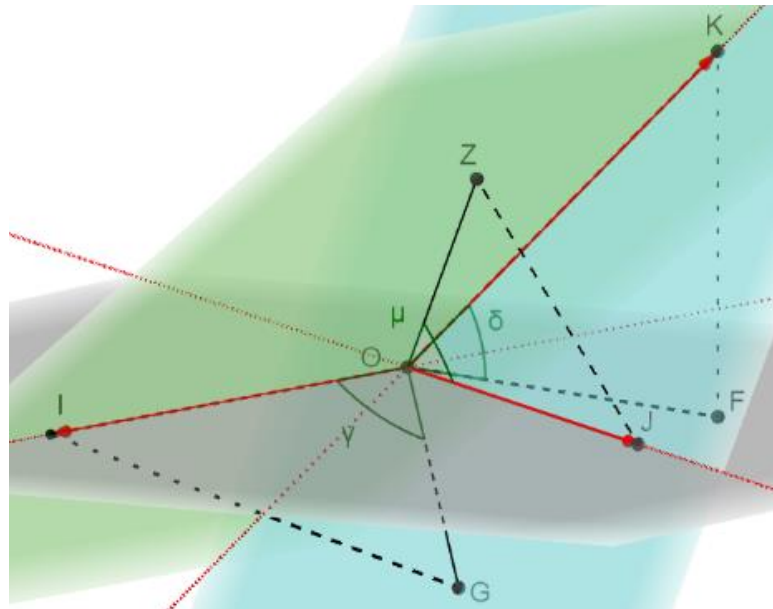
$$\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} (. +) \begin{pmatrix} \lambda_u & \mu_u \\ \lambda_v & \mu_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_x & m_x \\ w_y & m_y \end{pmatrix}$$

Ce qui est une façon compacte et économique en symboles de présenter et réaliser les calculs d'un système de quatre équations à quatre inconnues $\lambda_1; \lambda_2; \mu_1; \mu_2$:

$$\begin{cases} w_x = \lambda_u \cdot u_x + \lambda_v \cdot v_x \\ w_y = \lambda_u \cdot u_y + \lambda_v \cdot v_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_x = \mu_u \cdot u_x + \mu_v \cdot v_x \\ m_y = \mu_u \cdot u_y + \mu_v \cdot v_y \end{cases}$$

1.2 Angles étudiés



La figure ci-dessus extraite de l'utilisation du logiciel « GeoGebra » est une présentation de l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ où l'ordinateur permet de faire varier l'écartement des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans le plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$ fixe et coloré en gris, alors que le vecteur $\vec{k}$ est libre d'être bougé dans toutes les directions de l'espace, faisant varier les inclinaisons des plans $(O; \vec{j}; \vec{k})$ et $(O; \vec{k}; \vec{i})$. Ce faisant, toutes les configurations spatiales de l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ sont observables avec les transformations de cette figure. C'est donc à partir de cette présentation qu'il est suffisant de raisonner, puisqu'on a choisi de construire un modèle en référence logique aux mesures de $(O; \vec{i}; \vec{j})$ 2D ou 1D.

L'orthogonalité du vecteur $\vec{k}$ au plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ou à la droite (OIJ) est une donnée empirique, c'est-à-dire qu'elle prend une valeur d'axiome en ce sens où elle se situe au point de départ du jugement de l'observateur, et ce point de départ est fait de perception sensitive. Prise dans le champ d'une autre étude, l'orthogonalité peut perdre sa valeur d'axiome et être définie par un autre point de départ du jugement ; dans ce cas elle devient conditionnée à d'autres axiomes.

Dans cette étude, l'orthogonalité du vecteur $\vec{k}$ au plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ou à la droite (OIJ) est notée :

$$[\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D \text{ ou } 1D}] \text{ ou } [\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D \text{ ou } 1D}]$$

Cela concerne les équations qui sont valables dans cette condition indifférenciée. Mais si on spécifie $\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{1D}$ ou bien $\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{1D}$, cela exclut l'existence du plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$, et l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est en deux dimensions. De même $\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}$ ou $\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}$ est une abstraction qui sous-entend $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}$.

Le point F est le projeté orthogonal du point K dans $(O; \vec{i}; \vec{j})_{2D \text{ ou } 1D}$ tel que $FK = \sin \delta$.

Le point G est le projeté orthogonal du point I dans $(O; \vec{j}; \vec{k})_{2D \text{ ou } 1D}$, tel que $GI = \sin \gamma$.

Le point Z est le projeté orthogonal du point J dans $(O; \vec{k}; \vec{i})_{2D \text{ ou } 1D}$, tel que $ZJ = \sin \mu$.

Ces considérations géométriques impliquent que $\delta = (\overrightarrow{OF}, \vec{k})$, $\gamma = (\overrightarrow{OG}, \vec{i})$, $\mu = (\overrightarrow{OZ}, \vec{j})$ ne sont jamais des angles dont les mesures géométriques soient supérieures ou égales à l'angle droit. Leurs cosinus sont donc strictement positifs.

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} < \gamma = (\overrightarrow{OG}, \vec{i}) < \frac{\pi}{2} ; -\frac{\pi}{2} < \mu = (\overrightarrow{OZ}, \vec{j}) < \frac{\pi}{2} ; -\frac{\pi}{2} < \delta' = (\overrightarrow{OF}, \vec{k})' < \frac{\pi}{2} \\ -\pi < (\vec{j}, \overrightarrow{OG}) \leq \pi ; -\pi < (\vec{k}, \overrightarrow{OG}) \leq \pi ; -\pi < (\vec{k}, \overrightarrow{OZ}) \leq \pi ; -\pi < (\vec{i}, \overrightarrow{OZ}) \leq \pi \\ -\pi < (\vec{j}, \vec{k}) \leq \pi ; -\pi < (\vec{k}, \vec{i}) \leq \pi ; -\pi < (\vec{j}, \overrightarrow{OF})' \leq \pi ; -\pi < (\vec{i}, \vec{j})' \leq \pi \end{aligned}$$

Les angles δ' et $(\vec{i}, \vec{j})'$ sont les paramètres redéfinis en variables par les équations du modèle.

1.3 Conditions sur les paramètres

$$\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D} \Leftrightarrow \sin(\vec{i}, \vec{j}) \neq 0$$

Les points F et O sont confondus, $\overrightarrow{OF} = \vec{0}$ et on ne peut pas donner de mesures d'angle avec ce vecteur. On demandera donc à l'observateur de donner lui-même une mesure aux angles $(\vec{j}, \vec{k})$ et $(\vec{k}, \vec{i})$. Ces angles ne pouvant pas se trouver dans un même plan, la liberté de leurs mesures est compatible avec le modèle.

$$-\pi < (\vec{i}, \vec{j}) \neq 0 < \pi ; \delta = (\overrightarrow{OF}, \vec{k}) = \text{indéfini} ; (\vec{j}, \overrightarrow{OF}) = \text{indéfini}$$

$$(\vec{j}, \vec{k}) = \pm \frac{\pi}{2} ; (\vec{k}, \vec{i}) = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{1D} \Leftrightarrow \sin(\vec{i}, \vec{j}) = 0$$

Les points F et O sont confondus, $\overrightarrow{OF} = \vec{0}$ et on ne peut pas donner de mesures d'angle avec ce vecteur. On demandera donc à l'observateur de donner lui-même une mesure à l'angle $(\vec{j}, \vec{k})$. L'angle $(\vec{k}, \vec{i})$ étant dans le même plan que $(\vec{j}, \vec{k})$ doit suivre l'orientation du plan $(O; \vec{j}; \vec{k})$ donnée par le signe de $\sin(\vec{j}, \vec{k})$. Sa mesure ne fait donc plus l'objet d'un libre choix.

$$(\vec{i}, \vec{j}) = 0 \text{ mod. } \pi ; \delta = (\overrightarrow{OF}, \vec{k}) = \text{indéfini} ; (\vec{j}, \overrightarrow{OF}) = \text{indéfini}$$

$$(\vec{j}, \vec{k}) = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D} \Leftrightarrow \sin(\vec{i}, \vec{j}) \neq 0$$

La seule restriction est ici $(\vec{i}, \vec{j}) \neq 0 \text{ mod. } \pi$, comme mesure implicite équivalente à l'existence du plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

$$-\pi < (\vec{i}, \vec{j}) \neq 0 < \pi ; -\frac{\pi}{2} < \delta = (\overrightarrow{OF}, \vec{k}) < \frac{\pi}{2} ; -\pi < (\vec{j}, \overrightarrow{OF}) \leq \pi$$

$$\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{1D} \Leftrightarrow \sin(\vec{i}, \vec{j}) = 0$$

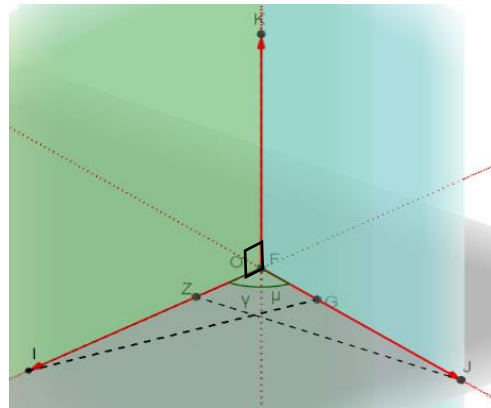
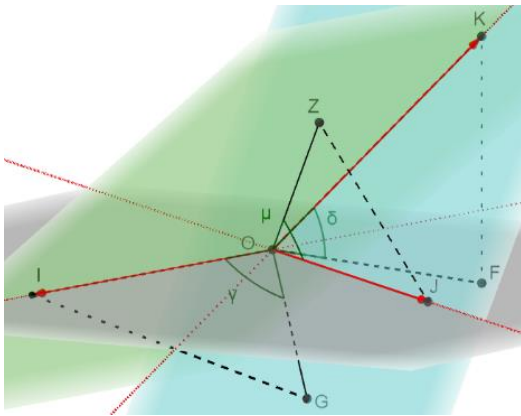
La seule restriction est ici $(\vec{i}, \vec{j}) = 0 \text{ mod. } \pi$, comme mesure implicite équivalente à l'existence de la droite (OI) .

$$(\vec{i}, \vec{j}) = 0 \text{ mod. } \pi ; -\frac{\pi}{2} < \delta = (\overrightarrow{OF}, \vec{k}) < \frac{\pi}{2} ; (\vec{j}, \overrightarrow{OF}) = 0 \text{ mod. } \pi$$

1.4 Quelques définitions logiques suffisantes aux nombres de dimensions de l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

$$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}$$

$$\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \sin \delta \neq 0 \text{ OU } \vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}$$



Dans le cas où $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}$ est orthonormé les angles γ et μ sont aussi indéfinis. Les vecteurs unitaires sont déjà tous de normes 1, et les trois plans sont alors orthogonaux entre eux.

$$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{2D}$$

$$[\sin(\vec{i}, \vec{j}) \neq 0 \text{ ET } \sin \delta = 0] \text{ OU } [\sin(\vec{i}, \vec{j}) = 0 \text{ et } \sin \delta \neq 0] \text{ OU } \vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{1D}$$

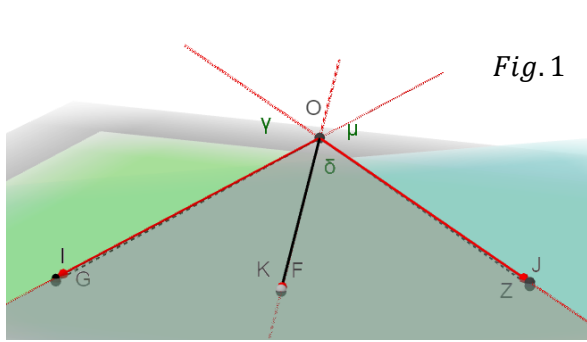


Fig. 1

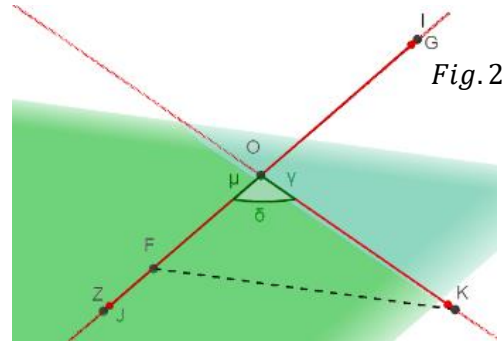


Fig. 2

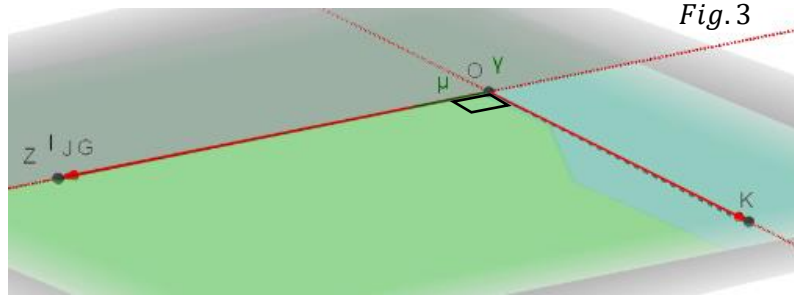


Fig. 3

Fig. 1 : Si $\sin(\vec{i}, \vec{j}) \neq 0$, l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ peut exister en 2 dimensions par $\sin \delta = 0$. Dans ce cas le plan $(O; \vec{j}; \vec{k})$ se couche sur le plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et les points F et K sont systématiquement confondus. Le domaine de définition de δ est alors $\delta = 0$.

Fig. 2 : Le point F défini comme le projeté orthogonal du point K dans $(O; \vec{i}; \vec{j})$ 2D devient une projection orthogonale dans la droite (OIJ) seulement si $\sin(\vec{i}, \vec{j}) = 0$. Dans ce cas le plan $(O; \vec{j}; \vec{k})$ 2D contient $(O; \vec{i}; \vec{j})$ 1D, et les points F et K ne sont occasionnellement confondus que pour $\delta = 0$. Le domaine de définition de δ est $-\frac{\pi}{2} < \delta = (\vec{OF}, \vec{k}) < \frac{\pi}{2}$.

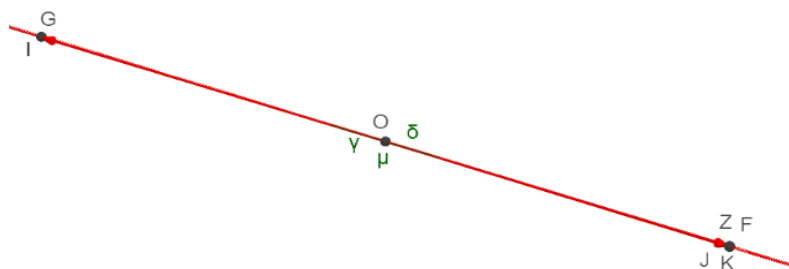
Fig. 3 : δ est indéfini car F et O sont confondus, mais l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ se visualise toujours en 2 dimensions.

On tient les mêmes raisonnements pour les domaines de définition de γ et μ , selon les valeurs données à $\sin(\vec{j}, \vec{k})$ et $\sin(\vec{k}, \vec{i})$ par les paramètres.

Si on n'avait pas modélisé les choses ainsi, pour $\sin(\vec{i}, \vec{j}) = 0$, on aurait brusquement une mesure de δ mise à zéro, $\vec{k}$ ferait l'angle nul ou plat avec la droite (OIJ) , on aurait un passage de $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ 3D à $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ 1D, et la dimension deux ne pourrait pas exister, ce qui est manifestement incompatible avec ce que montre une distribution possible des vecteurs dans la Fig. 2.

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ 1D

$$\sin(\vec{i}, \vec{j}) = 0 \text{ ET } \sin \delta = 0$$



La figure ci-dessus donne la distribution des points pour $(\vec{i}, \vec{j}) = \pi$. Il ne s'agit pas là des seules conditions logiques décrivant l'objet, mais elles sont suffisantes. Comme autres définitions logiques de $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}$, on aurait pu mentionner :

$$\sin(\vec{j}, \vec{k}).\sin\gamma \neq 0 \text{ OU } \vec{i} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2D}$$

$$\sin(\vec{k}, \vec{i}).\sin\mu \neq 0 \text{ OU } \vec{j} \perp (O; \vec{k}; \vec{i})_{2D}$$

On remarque que dans tous les cas où δ, γ, μ sont définis, on a les implications suivantes :

$$\begin{array}{ccccc} \sin(\vec{i}, \vec{j}).\sin\delta \neq 0 & \Leftrightarrow & \sin(\vec{j}, \vec{k}).\sin\gamma \neq 0 & \Leftrightarrow & \sin(\vec{k}, \vec{i}).\sin\mu \neq 0 \Rightarrow (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \\ & \begin{array}{c} \vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D} \\ \vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2D} \\ \vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{i})_{2D} \end{array} & & \begin{array}{c} \vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D} \\ \vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2D} \\ \vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{i})_{2D} \end{array} & \end{array}$$

Et aussi :

$$[\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D} \text{ ou } \vec{i} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2D} \text{ ou } \vec{j} \perp (O; \vec{k}; \vec{i})_{2D}] \Rightarrow (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}$$

1.5 Conditions d'orthogonalité des plans dans l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

On liste ci-dessous un choix de conditions d'orthogonalité des plans de l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ suffisantes à l'étude. Elles se déduisent toutes du choix des paramètres.

L'opérateur « NON » définit un jeu de mesures ou d'appréciation ne correspondant pas à ce qui est écrit dans les parenthèses, applicable dans un programme informatique par un simple processus de comparaison au cas par cas. On peut donc lister :

$$\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D} \text{ ou } \vec{i} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2D} \Leftrightarrow \text{Perception empirique au début de l'étude}$$

Définition contraire :

$$\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D} \text{ ou } \vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2D} \Leftrightarrow \text{Perception empirique au début de l'étude}$$

*

$$\vec{i} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2D} \text{ ou } \vec{j} \perp (O; \vec{k}; \vec{i})_{2D} \Leftrightarrow \vec{OG} = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} (\sin(\vec{j}, \vec{OF}) = 0 \text{ OU } [\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}]) \\ \text{ET} \\ \cos(\vec{i}, \vec{j}) = 0 \end{array} \right)$$

Définition contraire :

$$\vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2D} \text{ ou } \vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{i})_{2D} \Leftrightarrow \vec{OG} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \text{NON} \left(\begin{array}{c} (\sin(\vec{j}, \vec{OF}) = 0 \text{ OU } [\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}]) \\ \text{ET} \\ \cos(\vec{i}, \vec{j}) = 0 \end{array} \right)$$

*

$$\vec{j} \perp (O; \vec{k}; \vec{i})_{2D} \text{ ou } \vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D} \Leftrightarrow \vec{OZ} = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} (\sin(\vec{i}, \vec{OF}) = 0 \text{ OU } [\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}]) \\ \text{ET} \\ \cos(\vec{i}, \vec{j}) = 0 \end{array} \right)$$

Définition contraire :

$$\vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{i}) \text{ OU } (OKI) \Leftrightarrow \overrightarrow{OZ} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \text{NON} \left(\begin{array}{c} (\sin(\vec{i}, \overrightarrow{OF}) = 0 \text{ OU } [\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}]) \\ \text{ET} \\ \cos(\vec{i}, \vec{j}) = 0 \end{array} \right)$$

*

$$\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}} \Leftrightarrow \overrightarrow{OF} = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} (\sin(\vec{j}, \overrightarrow{OG}) = 0 \text{ OU } [\vec{i} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}]) \\ \text{ET} \\ \cos(\vec{j}, \vec{k}) = 0 \end{array} \right)$$

($\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{1D} \Rightarrow \sin(\vec{i}, \vec{j}) = 0$)

Définitions contraires :

$$\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}} \Leftrightarrow \overrightarrow{OF} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \text{NON} \left(\begin{array}{c} (\sin(\vec{j}, \overrightarrow{OG}) = 0 \text{ OU } [\vec{i} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}]) \\ \text{ET} \\ \cos(\vec{j}, \vec{k}) = 0 \end{array} \right)$$

*

$$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}) \text{ 3D orthonormé } \Leftrightarrow \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OZ} = \vec{0}$$

Définition contraire :

$$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}) \text{ 3D non ortho. } \Leftrightarrow \text{NON}(\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OZ} = \vec{0})$$

Note : dans le programme informatique, on utilise la variable "korto" telle que :

$$\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}} \Leftrightarrow \text{korto} = 0 ; \vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}} \Leftrightarrow \text{korto} = 1$$

On ne distingue pas par exemple le cas $\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}$ du cas $\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{1D}$, comme on pourrait le faire dans l'étude par purisme, car ce n'est pas nécessaire : la condition logique OU est exclusive et les équations sont suffisamment conditionnées pour décrire la réalité géométrique sous-jacente.

Par exemple, $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ 3D est décrit par :

$$\sin(\vec{i}, \vec{j}). \sin \delta \neq 0 \text{ OU } \vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}$$

Dans le programme informatique, on le décrit avec $\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}} \Leftrightarrow \text{korto} = 1$ par :

$$\sin(\vec{i}, \vec{j}). \sin \delta \neq 0 \text{ OU } [\text{korto} = 1 \text{ ET } \sin(\vec{i}, \vec{j}) \neq 0]$$

**

1.6 Calculs des angles $(\vec{i}, \overrightarrow{OF})$, $(\vec{j}, \vec{k})$, $(\vec{k}, \vec{i})$, $(\vec{i}, \vec{j})'$

Détermination de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OF})$

$$-\pi < (\vec{i}, \overrightarrow{OF}) \leq \pi$$

On mesure $(\vec{i}, \overrightarrow{OF})$ suivant l'orientation de $(O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}$ à l'aide des identités appliquées à une somme d'angles : $(\vec{i}, \overrightarrow{OF}) = (\vec{i}, \vec{j}) + (\vec{j}, \overrightarrow{OF})$:

$$\cos(\vec{i}, \overrightarrow{OF})_{\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}} = \cos(\vec{i}, \vec{j}) \cos(\vec{j}, \overrightarrow{OF}) - \sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF})$$

$$\sin(\vec{i}, \overrightarrow{OF})_{\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}} = \sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \cos(\vec{j}, \overrightarrow{OF}) + \cos(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF})$$

$(\vec{i}, \overrightarrow{OF})$ n'est pas défini quand $(\vec{j}, \overrightarrow{OF})$ n'est pas défini pour $\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}$:

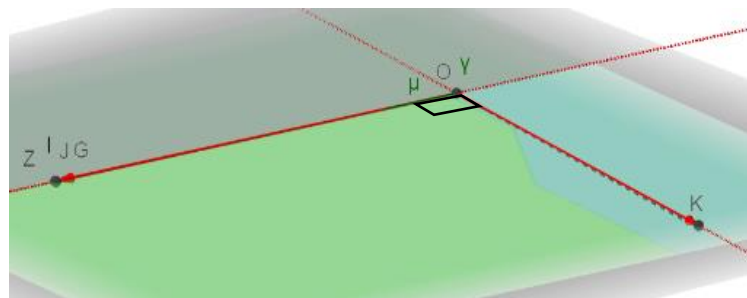
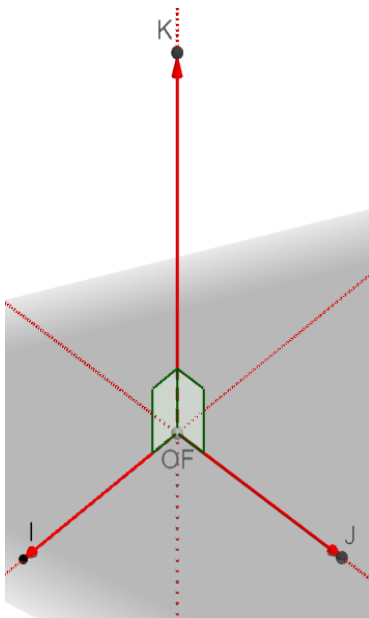
$$\cos(\vec{i}, \overrightarrow{OF})_{\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}} = \text{indéfini}$$

$$\sin(\vec{i}, \overrightarrow{OF})_{\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}} = \text{indéfini}$$

Détermination de l'angle $(\vec{j}, \vec{k})$

$$-\pi < (\vec{j}, \vec{k}) \leq \pi$$

Étude du cas $\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}$:



Dans ce cas F est confondu en O, les angles $\delta = (\overrightarrow{OF}, \vec{k})$, $(\vec{i}, \overrightarrow{OF})$, $(\vec{j}, \overrightarrow{OF})$ ne sont pas définis et l'observateur fixe lui-même une mesure :

$$(\vec{j}, \vec{k})_{\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}} = \frac{\pi}{2} \text{ ou } -\frac{\pi}{2} \text{ (choix de l'observateur)}$$

On a donc :

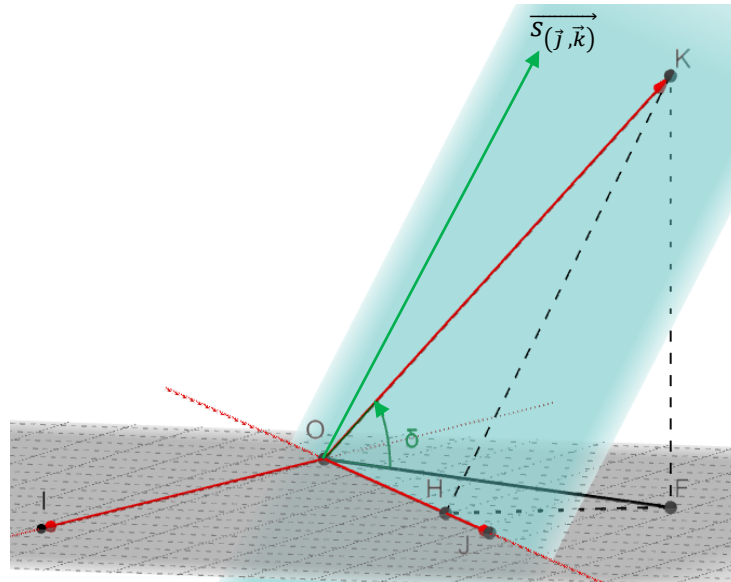
$$\sin(\vec{j}, \vec{k})_{\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}} = \pm 1 \quad (\text{choix de l'observateur})$$

$$\cos(\vec{j}, \vec{k})_{\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}} = 0$$

Étude du cas $\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}$:

La condition de non-orthogonalité de $\vec{k}$ à $(O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}$ est précisée implicitement par la présence de l'angle δ dans les équations et l'existence de $\vec{OF} \neq \vec{0}$. On a alors de façon implicite $\cos \delta \neq 0$ et le point F distinct du point O sur les figures.

Étude du cas $\sin(\vec{j}, \vec{OF}) \neq 0$ et $\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}$:



Avec H défini comme le projeté orthogonal du point F sur la droite (OJ), les triangles <FOK> et <KHF> étant rectangles et liés par un même côté, on peut lire directement sur la figure dans un repère $(O, \vec{j}, \vec{s(j, k)})$ de $(O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}$ la mesure $OH = \cos \delta \cdot \cos(\vec{j}, \vec{OF}) = \cos(\vec{j}, \vec{k})$.

Sur la figure on a dessiné arbitrairement $\vec{s(j, k)}$ dans le sens où $\sin(\vec{j}, \vec{k})$ est défini comme positif pour $(O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{D}}$.

On peut aussi déduire $\cos(\vec{j}, \vec{k})$ d'un produit scalaire. On pose $\frac{\vec{i} \wedge \vec{j}}{\|\vec{i} \wedge \vec{j}\|}$ un vecteur unitaire de $\vec{i} \wedge \vec{j}$ (peu importe son orientation directe ou indirecte), donc orthogonal à $(O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{D}}$:

$$\cos(\vec{j}, \vec{k}) = \vec{j} \boxtimes \vec{k} = \vec{j} \boxtimes \left(\cos \delta \cdot \frac{\vec{OF}}{\|\vec{OF}\|} \pm \sin \delta \cdot \frac{\vec{i} \wedge \vec{j}}{\|\vec{i} \wedge \vec{j}\|} \right) = \cos \delta \cdot \vec{j} \boxtimes \frac{\vec{OF}}{\|\vec{OF}\|} \pm \sin \delta \cdot \vec{j} \boxtimes \frac{\vec{i} \wedge \vec{j}}{\|\vec{i} \wedge \vec{j}\|}$$

$$\cos(\vec{j}, \vec{k}) = \cos \delta \cdot \vec{j} \boxtimes \frac{\vec{OF}}{\|\vec{OF}\|} \pm \vec{0}$$

$$\cos(\vec{j}, \vec{k}) \underset{\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}}{=} \cos \delta \cdot \cos(\vec{j}, \vec{OF})$$

Cette formule est en effet aussi juste pour $(O; \vec{i}; \vec{j})_{1D}$:

$$\cos(\vec{j}, \vec{k}) \underset{\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{1D}}{=} \cos(\vec{j}, \vec{OF}) = \pm 1$$

Par permutation circulaire (et par simple lecture géométrique), on donne aussi $\cos(\vec{j}, \vec{k})$ en référence logique à l'angle $(\vec{k}, \vec{OZ})$ mesuré dans un repère $(O; \vec{k}; \vec{i})_{2\text{Dou1D}}$.

$$\cos(\vec{j}, \vec{k}) \underset{\vec{j} \perp \text{non}(O; \vec{k}; \vec{i})_{2\text{Dou1D}}}{=} \cos \mu \cdot \cos(\vec{k}, \vec{OZ}) ; \cos(\vec{j}, \vec{k}) \underset{\vec{j} \perp (O; \vec{k}; \vec{i})_{2\text{Dou1D}}}{=} 0$$

D'où une première mesure indéterminée de $\sin(\vec{j}, \vec{k})$ obtenue avec l'identité trigonométrique $\cos^2(\vec{j}, \vec{k}) + \sin^2(\vec{j}, \vec{k}) = 1$:

$$\sin(\vec{j}, \vec{k}) = \pm (1 - \cos^2(\vec{j}, \vec{k}))^{1/2}$$

Il est possible d'en déterminer un signe. H étant la projection orthogonale de K sur la droite (OJ) :

$$(\vec{OH}, \vec{k}) = (\vec{j}, \vec{k}) ; OF \cdot \sin(\vec{j}, \vec{OF}) = HF ; HK = \sin(\vec{j}, \vec{k})$$

D'où deux équations qu'on égalise :

$$\sin \delta = FK = HK \cdot \sin(\vec{HF}, \vec{HK}) = \sin(\vec{j}, \vec{k}) \cdot \sin(\vec{HF}, \vec{HK})$$

$$\sin \delta = HF \cdot \tan(\vec{HF}, \vec{HK}) = \frac{OF \cdot \sin(\vec{j}, \vec{OF}) \cdot \sin(\vec{HF}, \vec{HK})}{\cos(\vec{HF}, \vec{HK})}$$

$$\sin(\vec{j}, \vec{k}) = \frac{OF \cdot \sin(\vec{j}, \vec{OF})}{\cos(\vec{HF}, \vec{HK})} = \frac{\cos \delta \cdot \sin(\vec{j}, \vec{OF})}{\cos(\vec{HF}, \vec{HK})}$$

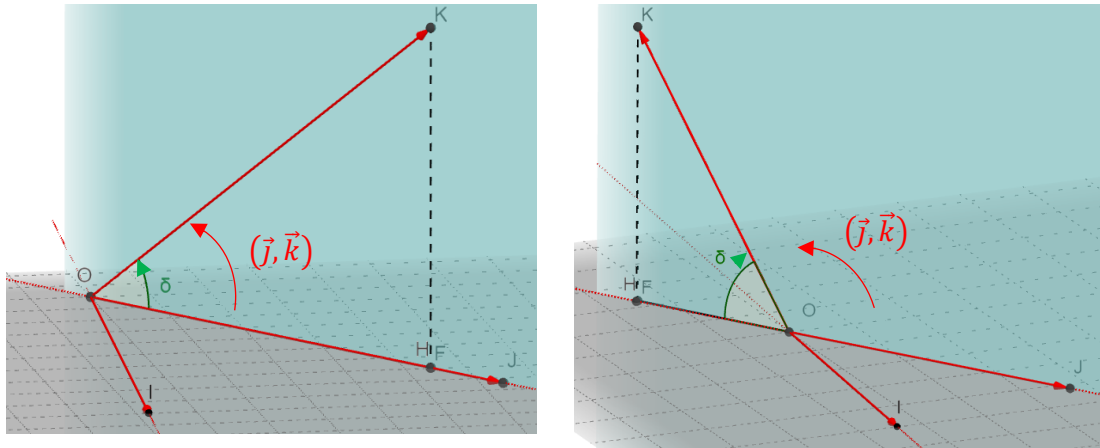
L'angle $(\vec{HF}, \vec{HK})$ est défini pour F et/ou K n'étant jamais confondu en H. Cet angle est donc toujours défini pour $\sin(\vec{j}, \vec{OF}) \neq 0$, et il ne peut selon sa construction géométrique jamais être supérieur ou égale à un angle droit, donc, dans toutes ces configurations spatiales de l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ on a $\cos(\vec{HF}, \vec{HK}) > 0$.

En particulier, pour $\sin \delta = 0$ et $\sin(\vec{j}, \vec{OF}) \neq 0$, F et K sont confondus et on a $\cos(\vec{HF}, \vec{HK}) = 1$. On en déduit que $\sin(\vec{j}, \vec{k})$ est du signe de $\cos \delta \cdot \sin(\vec{j}, \vec{OF})$, donc du signe de $\sin(\vec{j}, \vec{OF})$ puisque $\cos \delta > 0$:

$$\sin(\vec{j}, \vec{k}) \underset{\substack{[\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}] \\ \text{ET } \sin(\vec{j}, \vec{OF}) \neq 0}}{=} \frac{\sin(\vec{j}, \vec{OF})}{|\sin(\vec{j}, \vec{OF})|} \cdot [1 - \cos^2(\vec{j}, \vec{k})]^{1/2}$$

Note : Cette formule n'est pas utilisable pour $\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{1D}$, car alors on n'a jamais $\sin(\vec{j}, \vec{OF}) = 0$

Étude du cas $\sin(\vec{j}, \vec{OF}) = 0$ et $\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}$:



On a l'orthogonalité du plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$ au plan $(O; \vec{j}; \vec{k})$. L'angle orienté δ et l'angle orienté $(\vec{j}, \vec{k})$ sont alors dans un même plan pour $\sin(\vec{j}, \vec{OF}) = 0$, ce qui oblige à définir le signe de $\sin(\vec{j}, \vec{k})$ dans ce cas particulier afin que les sinus des angles $(\vec{j}, \vec{k})$ et δ , qui sont mesurés dans des repères différents, soient de signes identiques si les lectures de ces angles sont en sens observationnels identiques, et de signes contraires si les lectures de ces angles sont en sens observationnels contraires.

On écrira alors :

$$\sin(\vec{j}, \vec{k}) \underset{\substack{= \\ \sin \delta \neq 0 \\ \sin(\vec{j}, \vec{OF}) = 0}}{=} \frac{\sin \delta \cdot \cos(\vec{j}, \vec{OF})}{|\sin \delta \cdot \cos(\vec{j}, \vec{OF})|} \cdot [1 - \cos^2(\vec{j}, \vec{k})]^{\frac{1}{2}}$$

Puisque $\sin(\vec{j}, \vec{OF}) = 0 \Leftrightarrow \cos(\vec{j}, \vec{OF}) = \pm 1$:

$$= \frac{\sin \delta \cdot \cos(\vec{j}, \vec{OF})}{|\sin \delta|} \cdot |\sin \delta| = \sin \delta \cdot \cos(\vec{j}, \vec{OF})$$

Pour $\sin \delta = 0$ et $\sin(\vec{j}, \vec{OF}) = 0$, le point K est sur la droite (OJ) et on a

$$\sin(\vec{j}, \vec{k}) = 0$$

On écrira donc la relation générale :

$$\sin(\vec{j}, \vec{k}) \underset{\substack{= \\ [\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j}) \text{ 2D ou 1D}] \\ \text{ET } \sin(\vec{j}, \vec{OF}) = 0}}{=} \sin \delta \cdot \cos(\vec{j}, \vec{OF})$$

Cette formule est en effet aussi juste pour $(O; \vec{i}; \vec{j}) \text{ 1D}$.

Détermination de l'angle $(\vec{k}, \vec{i})$

$$-\pi < (\vec{k}, \vec{i}) \leq \pi$$

On ne détaille pas tous les raisonnements, qui sont analogues à ceux ci-dessus.

Étude du cas $\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou}1\text{D}}$:

On établit toujours alors :

$$\cos(\vec{k}, \vec{i})_{\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou}1\text{D}}} = 0$$

Ci-dessous, on ne suit pas exactement les mêmes raisonnements que pour $(\vec{j}, \vec{k})$ dans le cas $\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})$:

Étude du cas $\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{D}}$:

Les plans $(O; \vec{j}; \vec{k})$ et $(O; \vec{k}; \vec{i})$ ne sont jamais confondu et on laisse encore à l'observateur la liberté d'orienter le plan $(O; \vec{k}; \vec{i})$:

$$(\vec{k}, \vec{i})_{\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})} = \frac{\pi}{2} \text{ ou } -\frac{\pi}{2} \text{ (choix de l'observateur)}$$

$$\sin(\vec{k}, \vec{i})_{\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{D}} \Rightarrow \sin(\vec{i}, \vec{j}) \neq 0} = \pm 1 \text{ (choix de l'observateur)}$$

Étude du cas $\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{1\text{D}}$:

L'angle $(\vec{k}, \vec{i})$ étant alors dans le même plan que $(\vec{j}, \vec{k})$ doit suivre l'orientation du plan $(O; \vec{j}; \vec{k})$ donnée par le signe de $\sin(\vec{j}, \vec{k})$. Sa mesure ne fait donc plus l'objet d'un libre choix. On établit que :

$$\sin(\vec{k}, \vec{i})_{\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{1\text{D}} \Rightarrow \sin(\vec{i}, \vec{j}) = 0} = -\cos(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \sin(\vec{j}, \vec{k})$$

Étude du cas $\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou}1\text{D}}$:

L'angle $(\vec{i}, \vec{OF})$ est alors toujours défini et peut servir à donner le signe de $\sin(\vec{k}, \vec{i})$

On établit en référence logique à un angle de $(O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou}1\text{D}}$ que :

$$\cos(\vec{k}, \vec{i})_{\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou}1\text{D}}} = \cos \delta \cdot \cos(\vec{i}, \vec{OF})$$

Par permutation circulaire, on donne aussi en référence logique à l'angle $(\vec{k}, \vec{OG})$ mesuré dans un repère $(O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou}1\text{D}}$:

$$\cos(\vec{k}, \vec{i})_{\vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou}1\text{D}}} = \cos \gamma \cdot \cos(\vec{k}, \vec{OG}) ; \cos(\vec{k}, \vec{i})_{\vec{i} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou}1\text{D}}} = 0$$

Il est alors écrit dans les équations que dans toutes les configurations spatiales de l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on a

$\cos(\vec{k}, \vec{i})$, $\cos(\vec{i}, \vec{OF})$ et $\cos(\vec{k}, \vec{OG})$ qui sont toujours de même signe, puisque $\cos\gamma$ et $\cos\delta$ sont définis strictement positifs. Ainsi, excepté quand l'un d'eux est l'angle nul ou plat, les mesures principales de ces angles, quand ils sont définis, caractérisent toujours le même type d'angle : si $(\vec{i}, \vec{OF})$ est un angle obtus ou aigu, $(\vec{k}, \vec{i})$ et $(\vec{k}, \vec{OG})$ le sont. Si $(\vec{i}, \vec{OF})$ est un angle droit, $(\vec{k}, \vec{i})$ et $(\vec{k}, \vec{OG})$, le sont aussi.

Il semble que dans l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, la fonction *cosinus* n'ait pas besoin de référence logique à un plan privilégié, au contraire de la fonction *sinus*, que l'on utilise pour l'orientation. On peut se demander pourquoi c'est la fonction sinus qui satisfait ainsi notre sens de l'orientation. Sans doute parce qu'il nous en faut une pour cela, et qu'on lit donc habituellement un angle en alignant l'axe des cosinus sur le premier vecteur nommé. L'angle nul ne renseigne alors pas de quantité associée à la direction et au sens que pointe le vecteur cosinus, tandis que le vecteur sinus assigne une quantité $\pm \frac{\pi}{2}$ selon sa direction et son sens. Il s'agit alors d'une projection dans l'abstrait de nos structures mentales du haut et du bas, de la gauche et de la droite, selon la façon dont on se place devant le repère d'un plan.

Étude du cas $\sin(\vec{i}, \vec{OF}) \neq 0$ et $[\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})]_{2D \text{ ou } 1D}$:

On établit de même en référence logique à un angle de $(O; \vec{i}; \vec{j})_{2D \text{ ou } 1D}$ que :

$$\sin(\vec{k}, \vec{i})_{[\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})]_{2D \text{ ou } 1D}} = \frac{\sin(\vec{i}, \vec{OF})}{|\sin(\vec{i}, \vec{OF})|} \cdot [1 - \cos^2(\vec{k}, \vec{i})]^{\frac{1}{2}} \text{ ET } \sin(\vec{i}, \vec{OF}) \neq 0$$

Note : par permutation circulaire, on donne aussi en référence logique à un angle de $(O; \vec{j}; \vec{k})_{2D \text{ ou } 1D}$, sous la condition $\vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2D \text{ ou } 1D}$ qui est aussi un cas particulier de $\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D \text{ ou } 1D}$:

$$\sin(\vec{k}, \vec{i})_{[\vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k})]_{2D \text{ ou } 1D}} = \frac{\sin(\vec{k}, \vec{OG})}{|\sin(\vec{k}, \vec{OG})|} \cdot [1 - \cos^2(\vec{k}, \vec{i})]^{\frac{1}{2}} \text{ ET } \sin(\vec{k}, \vec{OG}) \neq 0$$

En faisant varier sur le logiciel l'angle $(\vec{i}, \vec{OF})$, on constate que dans toutes les configurations spatiales de l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, $\sin(\vec{i}, \vec{OF})$ et $\sin(\vec{k}, \vec{OG})$ ne sont pas toujours de mêmes signes (donc $-\sin(\vec{i}, \vec{OF})$ et $\sin(\vec{k}, \vec{OG})$ ne sont pas toujours de même signe). Voir à ce sujet l'annexe « Justification de la référence logique du modèle aux mesures de $(O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}$ ».

Étude du cas $\sin(\vec{i}, \vec{OF}) = 0$ et $[\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})]_{2D \text{ ou } 1D}$:

On établit aussi pour $\sin(\vec{i}, \vec{OF}) = 0$ que $\sin(\vec{i}, \vec{k})_{[\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})]_{2D \text{ ou } 1D}} = \sin\delta \cdot \cos(\vec{i}, \vec{OF})$
et $\sin(\vec{i}, \vec{OF}) = 0$

D'où la relation générale, en mentionnant de préférence $\sin(\vec{k}, \vec{i})$ plutôt que $\sin(\vec{i}, \vec{k})$:

$$\sin(\vec{k}, \vec{i})_{[\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})]_{2D \text{ ou } 1D}} = -\sin\delta \cdot \cos(\vec{i}, \vec{OF}) \text{ ET } \sin(\vec{i}, \vec{OF}) = 0$$

$$\text{Là aussi, on n'utilisera pas } \sin(\vec{k}, \vec{i}) \underset{\substack{[\vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}] \\ \text{ET } \sin(\vec{k}, \vec{OG}) \neq 0}}}{=} \sin \gamma \cdot \cos(\vec{k}, \vec{OG}).$$

Détermination de l'angle $(\vec{i}, \vec{j})'$

$$-\pi < (\vec{i}, \vec{j})' \leq \pi$$

On appelle $(\vec{i}, \vec{j})'$ le paramètre $(\vec{i}, \vec{j})$ déduit d'un raisonnement. La référence logique de $(\vec{i}, \vec{j})'$ à un angle de $(O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}$ ne peut être rien d'autre que $(\vec{i}, \vec{j})$. On écrira donc simplement, sans avoir besoin de poser des conditions en baseline, puisque $(\vec{i}, \vec{j})$ est un paramètre choisi librement au début de l'étude :

$$\cos(\vec{i}, \vec{j})' = \cos(\vec{i}, \vec{j})$$

$$\sin(\vec{i}, \vec{j})' = \sin(\vec{i}, \vec{j})$$

Là encore, la permutation circulaire conduit à écrire les équations suivantes, qui ne permettent pas de retrouver systématiquement (au signe près) $(\vec{i}, \vec{j})' = (\vec{i}, \vec{j})$:

$$\cos(\vec{i}, \vec{j})' \underset{\vec{j} \perp \text{non} (O; \vec{k}; \vec{i})_{2\text{Dou1D}}}{=} \cos \mu \cdot \cos(\vec{i}, \vec{OZ}) ; \cos(\vec{i}, \vec{j})' \underset{\vec{j} \perp (O; \vec{k}; \vec{i})_{2\text{Dou1D}}}{=} 0$$

On ne se servira donc pas de :

$$\sin(\vec{i}, \vec{j})' \underset{\substack{[\vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{i})_{2\text{D}}] \\ \text{ET } \sin(\vec{i}, \vec{OZ}) \neq 0}}{=} \frac{\sin(\vec{i}, \vec{OZ})}{|\sin(\vec{i}, \vec{OZ})|} \cdot [1 - \cos^2(\vec{i}, \vec{j})]^{\frac{1}{2}}$$

$$\sin(\vec{i}, \vec{j})' \underset{\substack{[\vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{i})_{2\text{Dou1D}}] \\ \text{et } \sin(\vec{i}, \vec{OZ}) = 0}}{=} \sin \mu \cdot \cos(\vec{i}, \vec{OZ})$$

$$\sin(\vec{i}, \vec{j})' \underset{\vec{j} \perp (O; \vec{k}; \vec{i})_{2\text{Dou1D}}}{=} \pm 1$$

1.7 Calculs des angles γ, μ, δ'

Détermination de γ

$$\gamma = (\vec{OG}, \vec{i}) ; -\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2}$$

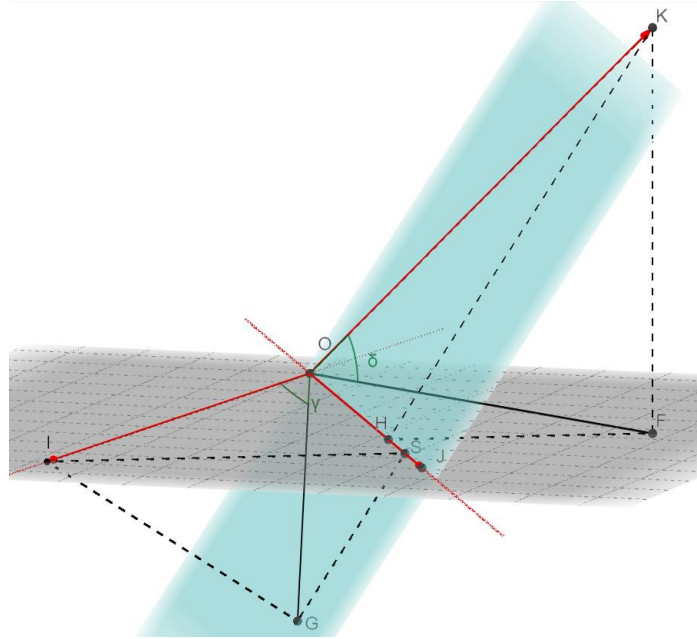
Étude du cas $\vec{i} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}$:

Les points G et O sont confondus et γ n'est pas défini :

$$\cos \gamma_{\vec{i} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}} = \text{indéfini} ; \quad \sin \gamma_{\vec{i} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}} = \text{indéfini}$$

Étude du cas $\vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}$ et $\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}$:

On raisonne sur le cas de figure suivant défini par $(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \sin(\vec{j}, \vec{OF}) \neq 0$.

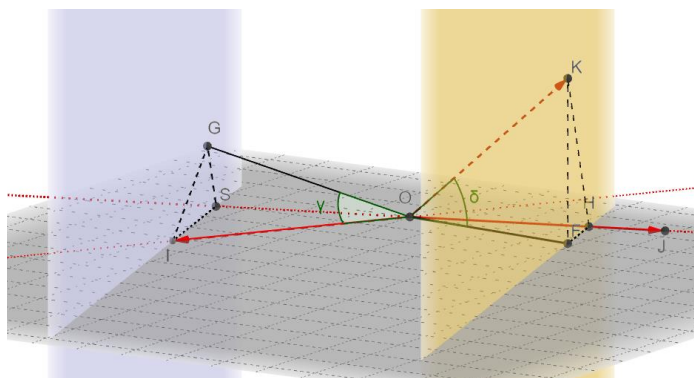


Le point G est le projeté orthogonal du point I dans $(O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}$, tel que $GI = \sin \gamma$. Le point S est le projeté orthogonal du point I sur (OJ) , tel que $SI = \sin(\vec{j}, \vec{i}) = -\sin(\vec{i}, \vec{j})$.

Le point F est le projeté orthogonal du point K dans $(O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}$ tel que $FK = \sin \delta$. Le point H est le projeté orthogonal du point K sur (OJ) , tel que $HK = \sin(\vec{j}, \vec{k})$. On mesure $(\vec{HF}, \vec{HK})$ dans un repère lié logiquement à la valeur algébrique FK tel que :

$$\sin(\vec{HF}, \vec{HK}) = \frac{FK}{HK} = \frac{\sin \delta}{\sin(\vec{j}, \vec{k})}$$

On déduit de considérations géométriques que l'angle $\angle ISG$ est aussi l'angle $\angle FHK$, et que les plans $(S; \vec{SG}; \vec{SI})$ et $(H; \vec{HF}; \vec{HK})$ sont toujours parallèles ou confondus quand ils existent pour $\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \sin(\vec{j}, \vec{OF}) \neq 0$, dans toutes les configurations de l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$:



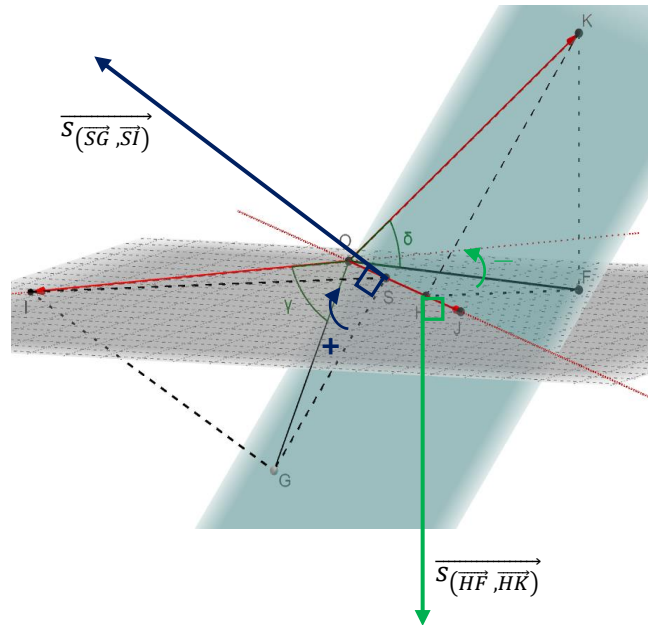
Quel que soit le point de vue de l'observateur, les angles géométriques $(\overrightarrow{SG}, \overrightarrow{SI})$ et $(\overrightarrow{HF}, \overrightarrow{HK})$ sont toujours d'orientations relatives contraires. On écrira alors :

$$\sin(\overrightarrow{SG}, \overrightarrow{SI}) \underset{\sin(\vec{l}, \vec{j}).\sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF}) \neq 0}{=} - \sin(\overrightarrow{HF}, \overrightarrow{HK})$$

Cette équation n'est pas une vérité des nombres ou de la géométrie, mais un élément de l'élaboration d'un modèle mathématique faisant correspondre des choix (la convention de lecture du premier objet nommé au second et le désir d'orientation) aux apparences (ce qu'on observe en respectant la convention de lecture du premier objet nommé au second).

Figure pour $\sin \delta . \sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF}) < 0$ avec mise en évidence des repères des cercles trigonométriques

$(S ; \frac{\overrightarrow{SG}}{\|\overrightarrow{SG}\|} ; \overrightarrow{s(\overrightarrow{SG}, \overrightarrow{SI})})$ et $(H ; \frac{\overrightarrow{HF}}{\|\overrightarrow{HF}\|} ; \overrightarrow{s(\overrightarrow{HF}, \overrightarrow{HK})})$ implicites aux mesures :



On a décidé de lire :

$$\sin(\overrightarrow{SG}, \overrightarrow{SI}) \underset{\left(S ; \frac{\overrightarrow{SG}}{\|\overrightarrow{SG}\|} ; \overrightarrow{s(\overrightarrow{SG}, \overrightarrow{SI})} \right)}{\sin(\vec{l}, \vec{j}).\sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF}) \neq 0} = - \sin(\overrightarrow{HF}, \overrightarrow{HK}) \underset{\left(H ; \frac{\overrightarrow{HF}}{\|\overrightarrow{HF}\|} ; \overrightarrow{s(\overrightarrow{HF}, \overrightarrow{HK})} \right)}{}$$

On peut donc écrire :

$$\sin(\overrightarrow{SG}, \overrightarrow{SI}) \underset{\substack{\sin(\vec{l}, \vec{j}).\sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF}) \neq 0 \\ (\sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF}) \neq 0 \Rightarrow \sin(\vec{j}, \vec{k}) \neq 0)}}{=} - \frac{\sin \delta}{\sin(\vec{j}, \vec{k})}$$

Dans le plan contenant γ , on a :

$$GI = \sin \gamma$$

Dans le plan $(S ; \overrightarrow{SG} ; \overrightarrow{SI})$, on a avec $SI = -\sin(\vec{l}, \vec{j})$:

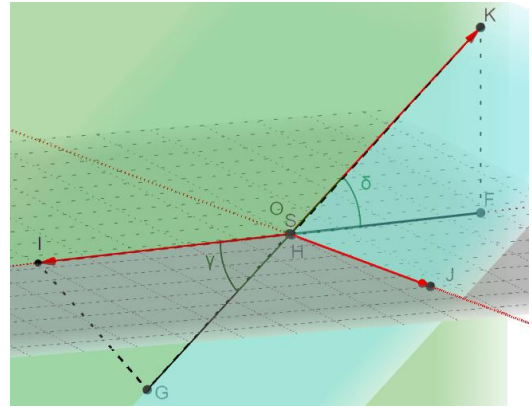
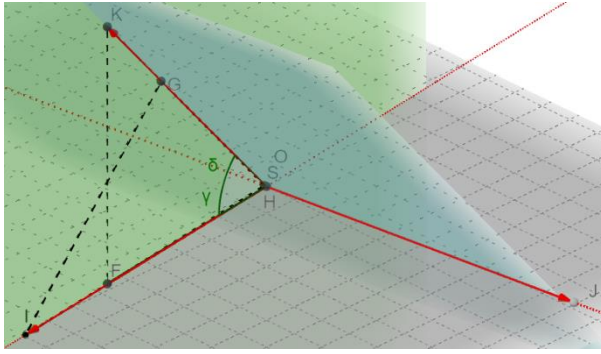
$$\sin \gamma = GI = SI . \sin(\overrightarrow{SG}, \overrightarrow{SI}) = -\sin(\vec{l}, \vec{j}) . \sin(\overrightarrow{SG}, \overrightarrow{SI})$$

Soit :

$$\sin \gamma \underset{\substack{\sin(\vec{l}, \vec{j}).\sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF}) \neq 0 \\ (\sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF}) \neq 0 \Rightarrow \sin(\vec{j}, \vec{k}) \neq 0)}}{=} \frac{\sin(\vec{l}, \vec{j}) . \sin \delta}{\sin(\vec{j}, \vec{k})}$$

Cette équation ne formule pas dans tous les cas une orientation correcte de γ dans un plan particulier, par

exemple dans le cas $\sin(\vec{i}, \overrightarrow{OF}) = 0$ et $|\sin(\vec{i}, \vec{j})| = 1$:



γ est alors un angle du plan $(O ; \vec{k} ; \vec{i})$, et on oriente de façon certaine γ par rapport à $(\vec{k}, \vec{i})$ dans ce plan en écrivant :

$$\sin \gamma \underset{\substack{\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j}) \text{ 2D} \\ \text{ET } \vec{j} \perp (O; \vec{k}; \vec{i}) \text{ 2D ou 1D}}}{=} \frac{\sin(\vec{k}, \vec{i}) \cdot \cos(\vec{k}, \vec{i})}{|\cos(\vec{k}, \vec{i})|}$$

Le signe de $\sin(\vec{k}, \vec{i})$ en référence à $(O ; \vec{i}; \vec{j}) \text{ 2D ou 1D}$ est donné par :

$$\sin(\vec{k}, \vec{i}) \underset{\substack{[\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j}) \text{ 2D ou 1D}] \\ \text{et } \sin(\vec{i}, \overrightarrow{OF}) = 0}}{=} -\sin \delta \cdot \cos(\vec{i}, \overrightarrow{OF})$$

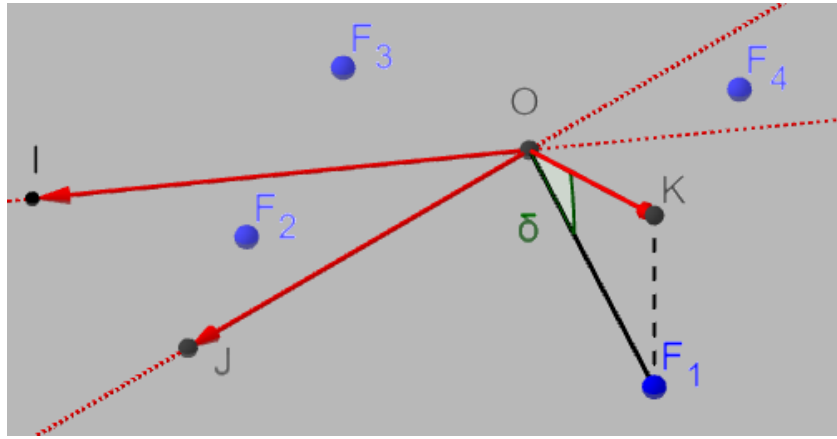
Dans les deux cas de figure ci-dessus $\sin \gamma$ est donc de signe contraire à $\sin \delta$. On ne peut donc pas utiliser l'équation $\sin \gamma \underset{\substack{\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF}) \neq 0 \\ (\sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF}) \neq 0 \Rightarrow \sin(\vec{j}, \vec{k}) \neq 0)}}{=} \frac{\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \sin \delta}{\sin(\vec{j}, \vec{k})}$ pour respecter l'orientation du plan $(O ; \vec{k} ; \vec{i})$, sauf à réussir

à poser des contraintes sur le signe de $\sin \delta$ en fonction des paramètres de l'étude, de façon à ce que γ soit en accord avec l'orientation des plans $(O ; \vec{i}; \vec{j})$, $(O ; \vec{j}; \vec{k})$ et $(O ; \vec{k}; \vec{i})$ dans toutes les configurations de $(O ; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Mais ce n'est pas ce modèle que nous présentons, nous présentons un modèle qui ne pose pas de de contraintes sur le signe de $\sin \delta$ en fonction des paramètres de l'étude. Nous utiliserons donc dans nos jeux d'équation la quantité :

$$|\sin \gamma| \underset{\substack{\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF}) \neq 0 \\ (\sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF}) \neq 0 \Rightarrow \sin(\vec{j}, \vec{k}) \neq 0)}}{=} \left| \frac{\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \sin \delta}{\sin(\vec{j}, \vec{k})} \right|$$

On doit donc établir des équations particulières pour les cas $\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF}) = 0$ et $\sin(\vec{i}, \overrightarrow{OF}) = 0$. On formule donc une équation générale en référence logique au plan $(O ; \vec{i}; \vec{j})$, qui prévoit quatre changements de signes possibles pour $\sin \gamma$, selon la position du point F dans le plan $(O ; \vec{i}; \vec{j})$:



$$\sin \gamma = \frac{\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \sin(\vec{i}, \vec{OF}) \cdot \sin(\vec{j}, \vec{OF})}{|\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \sin(\vec{i}, \vec{OF}) \cdot \sin(\vec{j}, \vec{OF})|} \cdot \left| \frac{\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \sin \delta}{\sin(\vec{j}, \vec{k})} \right|$$

$\begin{array}{c} \text{ET} \\ \text{ET} \end{array}$

$\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \sin(\vec{i}, \vec{OF}) \cdot \sin(\vec{j}, \vec{OF}) \neq 0$

Note: $\sin(\vec{j}, \vec{OF}) \neq 0 \Rightarrow \sin(\vec{j}, \vec{k}) \neq 0$

$\sin(\vec{j}, \vec{OF}) \neq 0 \Rightarrow \sin(\vec{j}, \vec{k}) \neq 0$ est toujours vrai, mais pas sa réciproque car elle contient aussi le cas $\sin(\vec{j}, \vec{OF}) = 0$.

Ensuite viennent les équations des cas de transitions de signes. Ci-dessous celle pour préciser γ quand $\sin(\vec{i}, \vec{OF}) = 0$:

$$\sin \gamma = \frac{\sin(\vec{k}, \vec{i}) \cdot \cos(\vec{k}, \vec{i})}{|\sin(\vec{k}, \vec{i}) \cdot \cos(\vec{k}, \vec{i})|} \cdot \left| \frac{\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \sin \delta}{\sin(\vec{j}, \vec{k})} \right|$$

$\begin{array}{c} \text{ET} \\ \text{ET} \end{array}$

$\sin(\vec{i}, \vec{OF}) = 0$

$\text{ET} \sin(\vec{k}, \vec{i}) \cdot \sin(\vec{j}, \vec{k}) \neq 0$

Et toujours pour $\sin(\vec{i}, \vec{OF}) = 0$, celle pour préciser γ à l'orientation de $(O; \vec{k}; \vec{i})$ quand $[\vec{j} \perp (O; \vec{k}; \vec{i})]_{2\text{Dou1D}}$ et qui précise le cas $\sin(\vec{k}, \vec{i}) = 0$:

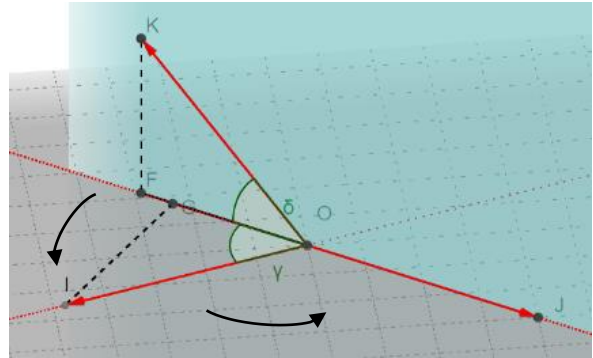
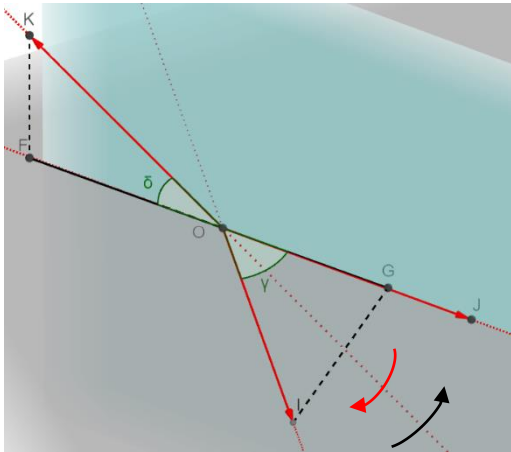
$$\sin \gamma = \frac{\sin(\vec{k}, \vec{i}) \cdot \cos(\vec{k}, \vec{i})}{|\cos(\vec{k}, \vec{i})|}$$

$\begin{array}{c} \text{ET} \\ \text{ET} \end{array}$

$[\vec{j} \perp (O; \vec{k}; \vec{i})]_{2\text{Dou1D}}$

Cette équation se déduit de la précédente car $\cos(\vec{k}, \vec{i})$ et $\cos(\vec{i}, \vec{OF})$ sont toujours de même signe et qu'alors $\left| \frac{\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \sin \delta}{\sin(\vec{j}, \vec{k})} \right|_{[\vec{j} \perp (O; \vec{k}; \vec{i})]_{2\text{Dou1D}}} = |\sin \delta|$, mais il est nécessaire de la présenter parce qu'elle précise le cas $\sin(\vec{k}, \vec{i}) = 0$.

Vient ensuite le cas $\sin(\vec{j}, \vec{OF}) = 0$. Dans ce cas on observe que γ est toujours dans $(O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}$ (nul ou plat sur la droite (OIJ) pour $\sin(\vec{i}, \vec{j}) = 0$) :



D'où :

$$\sin \gamma = \frac{[\vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k})]_{2\text{Dou1D}}}{[\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})]_{2\text{Dou1D}}} \cdot \frac{\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \cos(\vec{i}, \vec{j})}{|\cos(\vec{i}, \vec{j})|}$$

ET $\sin(\vec{j}, \vec{OF})=0$]

OU

$$[\vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k})]_{2\text{Dou1D}} \text{ ET } [\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})]_{2\text{Dou1D}}]$$

OU

$$[\vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k})]_{2\text{Dou1D}} \text{ ET } \sin(\vec{j}, \vec{k})=0]$$

Viennent ensuite les cas particuliers $\sin(\vec{i}, \vec{j}) = 0$ et /ou $\sin(\vec{k}, \vec{i}) = 0$ dans ce cas γ est systématiquement un angle nul ou plat :

$$\sin \gamma = \begin{matrix} = \\ \sin(\vec{i}, \vec{j})=0 \\ \text{ET/OU } \sin(\vec{k}, \vec{i})=0 \end{matrix} 0$$

Dans tous les cas où γ est défini, on a :

$$\cos \gamma > 0 \quad \vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}} \quad (1 - \sin^2 \gamma)^{\frac{1}{2}}$$

Pour finir, les cas où γ est indéfini :

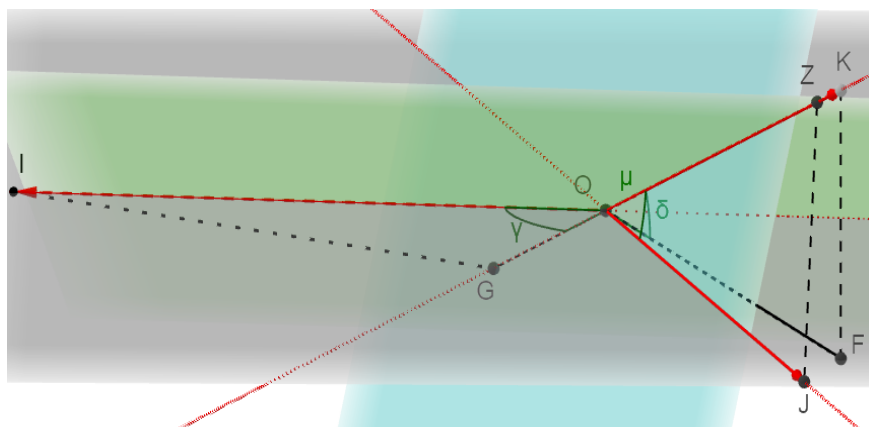
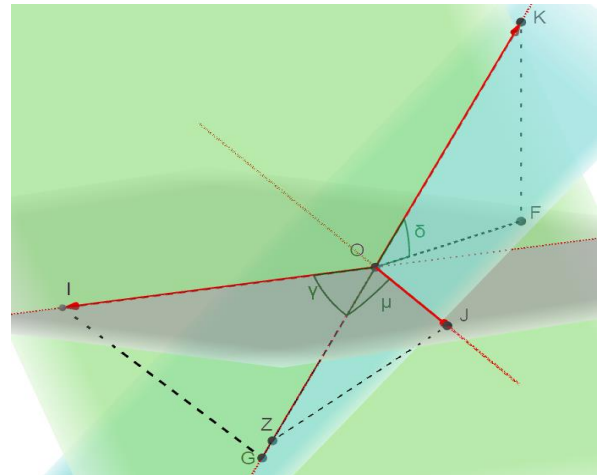
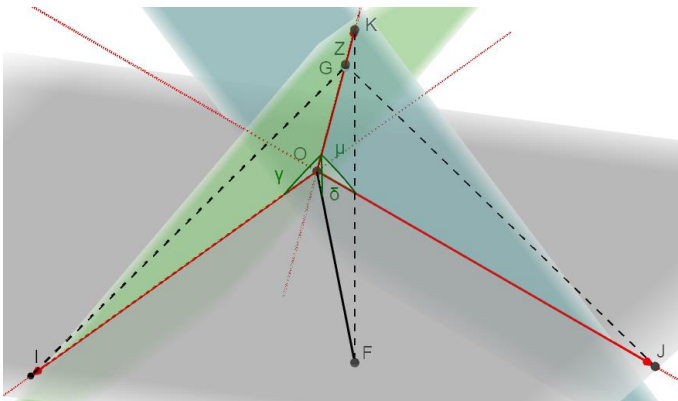
$$\cos \gamma_{\vec{i} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})} \stackrel{=}{=} \text{indéfini}_{2\text{Dou}1\text{D}}$$

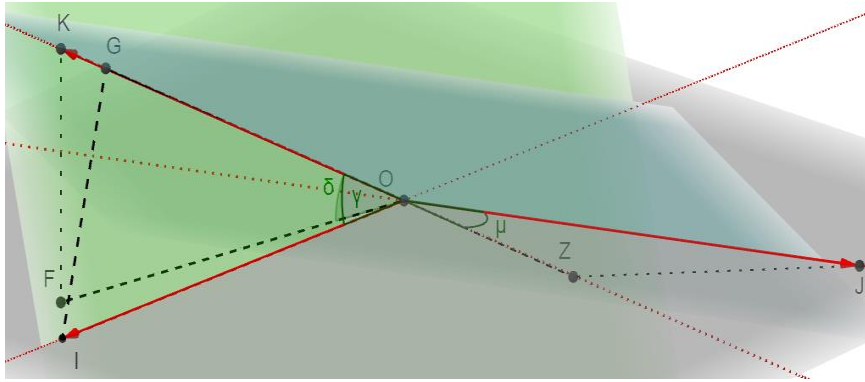
$$\sin \gamma_{\vec{i} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})} \stackrel{2\text{Dou}1\text{D}}{=} \text{indéfini}$$

Détermination de μ

$$-\frac{\pi}{2} < \mu = (\overrightarrow{OZ}, \vec{j}) < \frac{\pi}{2}$$

On procède aux mêmes genres de raisonnements. L'équation générale est définie en référence logique à $(O ; \vec{i} ; \vec{j})2\text{Dou}1\text{D}$, et en observant (en fait on le justifie après l'avoir découvert en tâtonnant...) que dans les mêmes domaines de définition $\sin\mu$ et $\sin\gamma$ sont toujours de signes contraires quels que soient les signes de $\sin(\vec{k}, \vec{i})$ et $\sin(\vec{j}, \vec{k})$ (définis en références logiques à $(O ; \vec{i} ; \vec{j})2\text{Dou}1\text{D}$) :





On est conduit à écrire, en rajoutant la condition $[\vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}]$ puisqu'on utilise γ :

$$\sin \mu = \frac{[\vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{i})_{2\text{Dou1D}}]_{ET}}{[\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}]_{ET}} - \frac{[\vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}]_{ET}}{|\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \sin(\vec{i}, \vec{OF}) \cdot \sin(\vec{j}, \vec{OF})|} \cdot \left| \frac{\sin(\vec{j}, \vec{k}) \cdot \sin \gamma}{\sin(\vec{k}, \vec{i})} \right|$$

$\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \sin(\vec{i}, \vec{OF}) \cdot \sin(\vec{j}, \vec{OF}) \neq 0$
Note: $\sin(\vec{i}, \vec{OF}) \neq 0 \Rightarrow \sin(\vec{k}, \vec{i}) \neq 0$

Suivent alors les équations des cas particuliers. D'abord celle qui précise $\sin(\vec{j}, \vec{OF}) = 0$:

$$\sin \mu = \frac{[\vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{i})_{2\text{Dou1D}}]_{ET}}{[\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}]_{ET}} - \frac{[\vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}]_{ET}}{|\sin(\vec{j}, \vec{k}) \cdot \cos(\vec{j}, \vec{k})|} \cdot \left| \frac{\sin(\vec{j}, \vec{k}) \cdot \sin \gamma}{\sin(\vec{k}, \vec{i})} \right|$$

$\sin(\vec{j}, \vec{OF}) = 0$
 $\sin(\vec{j}, \vec{k}) \cdot \sin(\vec{k}, \vec{i}) \neq 0$

Puis celle pour accorder μ à l'orientation de $(O; \vec{j}; \vec{k})$ quand $[\vec{i} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{OU(OJK)}]$ et qui précise le cas $\sin(\vec{j}, \vec{k}) = 0$:

$$\sin \mu = \frac{[\vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{i})_{2\text{Dou1D}}]_{ET}}{[\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}]_{ET}} - \frac{[\vec{i} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}]_{ET}}{|\cos(\vec{j}, \vec{k})|}$$

Puis celle de μ toujours dans le plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ou nul ou plat sur la droite (OI) pour $\sin(\vec{i}, \vec{j}) = 0$:

$$\sin \mu = \frac{\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \cos(\vec{i}, \vec{j})}{|\cos(\vec{i}, \vec{j})|}$$

$$[\vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{i})]_{2\text{Dou1D}} \stackrel{ET}{=} [\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})]_{2\text{Dou1D}}$$

$$ET \sin(\vec{i}, \vec{OF}) = 0$$

$$OU$$

$$[[\vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{i})]_{2\text{Dou1D}} ET [\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})]_{2\text{Dou1D}}]$$

$$OU$$

$$[[\vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{i})]_{2\text{Dou1D}} ET \sin(\vec{k}, \vec{i}) = 0]$$

Puis pour finir :

$$\sin \mu \stackrel{ET/OU}{=} 0$$

$$\sin(\vec{i}, \vec{j}) = 0$$

$$\cos \mu > 0 = (1 - \sin^2 \mu)^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{i})_{2\text{Dou1D}}$$

$$\cos \mu = \text{indéfini}$$

$$\vec{j} \perp (O; \vec{k}; \vec{i})_{2\text{Dou1D}}$$

$$\sin \mu = \text{indéfini}$$

$$\vec{j} \perp (O; \vec{k}; \vec{i})_{2\text{Dou1D}}$$

Détermination de δ'

$$-\frac{\pi}{2} < \delta' = (\vec{OF}, \vec{k})' < \frac{\pi}{2}$$

Il n'y a pas d'équation générale de $\sin \delta'$ en référence logique à $(O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}$, parce que $\sin \delta$ est un paramètre libre. On posera donc que $\sin \delta'$ est du signe de $\sin \delta$:

$$\sin \delta' = \frac{\sin \delta}{|\sin \delta|} \cdot \left| \frac{\sin(\vec{k}, \vec{i}) \cdot \sin \mu}{\sin(\vec{i}, \vec{j})} \right|$$

$$[\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})]_{2\text{Dou1D}} \stackrel{ET}{=} [\vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{i})]_{2\text{Dou1D}}$$

$$ET \sin \delta \cdot \sin(\vec{i}, \vec{j}) \neq 0$$

Ci-dessous l'équation de δ' situé dans $(O; \vec{k}; \vec{i})$. δ' est nul ou plat sur la droite (OKI) pour $\sin(\vec{k}, \vec{i}) = 0$:

$$\sin \delta' = \frac{\sin(\vec{k}, \vec{i}) \cdot \cos(\vec{k}, \vec{i})}{|\cos(\vec{k}, \vec{i})|}$$

$$[[\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})]_{2\text{Dou1D}} ET [\vec{j} \perp (O; \vec{k}; \vec{i})]_{2\text{Dou1D}}]$$

$$OU$$

$$[[\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})]_{2\text{Dou1D}} ET \sin(\vec{i}, \vec{j}) = 0]$$

$\sin \delta'$ est toujours du signe de $\sin \delta$, comme on le montre ci-dessous.

$[\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j}) \text{ 2D}] \text{ ET } [\vec{j} \perp (O; \vec{k}; \vec{i}) \text{ 2Dou1D}] \Rightarrow \sin(\vec{i}, \overrightarrow{OF})=0 \Rightarrow \cos(\vec{i}, \overrightarrow{OF})$ et $\cos(\vec{k}, \vec{i})$ de même signe, et donc :

$$\sin \delta' \underset{\substack{\sin(\vec{i}, \overrightarrow{OF})=0 \\ \text{OU} \\ [\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j}) \text{ 1D}] \\ \text{ET } \sin(\vec{i}, \vec{j})=0}}{=} - \frac{\sin(\vec{k}, \vec{i}) \cdot \cos(\vec{k}, \vec{i})}{|\cos(\vec{k}, \vec{i})|} = - \frac{(-\sin \delta) \cdot \cos(\vec{i}, \overrightarrow{OF}) \cdot \cos(\vec{k}, \vec{i})}{|\cos(\vec{k}, \vec{i})|} = \sin \delta$$

Puis pour finir :

$$\sin \delta' \underset{\substack{\sin(\vec{j}, \vec{k})=0 \\ \text{ET/OU } \sin(\vec{k}, \vec{i})=0 \\ \text{OU} \\ \sin \delta=0}}{=} 0$$

$$\cos \delta' > 0 \underset{\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j}) \text{ 2Dou1D}}{=} (1 - \sin^2 \delta')^{\frac{1}{2}}$$

$$\cos \delta' \underset{\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j}) \text{ 2Dou1D}}{=} \text{indéfini}$$

$$\sin \delta' \underset{\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j}) \text{ 2Dou1D}}{=} \text{indéfini}$$

1.8 Calculs des angles $(\vec{j}, \overrightarrow{OG})$, $(\vec{k}, \overrightarrow{OG})$, $(\vec{k}, \overrightarrow{OZ})$, $(\vec{i}, \overrightarrow{OZ})$, $(\vec{i}, \overrightarrow{OF})'$, $(\vec{j}, \overrightarrow{OF})'$

Détermination de l'angle $(\vec{j}, \overrightarrow{OG})$

$$-\pi < (\vec{j}, \overrightarrow{OG}) \leq \pi$$

Étude du cas $\vec{i} \perp (O; \vec{j}; \vec{k}) \text{ 2Dou1D}$:

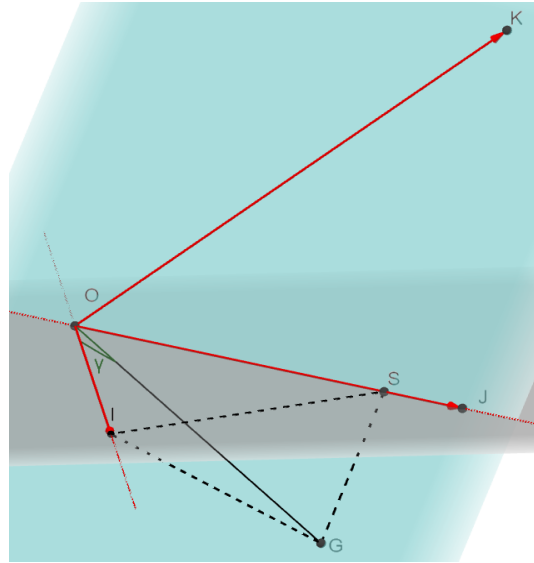
Dans ce cas G et O sont confondus :

$$\cos(\vec{j}, \overrightarrow{OG}) \underset{\vec{i} \perp (O; \vec{j}; \vec{k}) \text{ 2Dou1D}}{=} \text{indéfini}$$

$$\sin(\vec{j}, \overrightarrow{OG}) \underset{\vec{i} \perp (O; \vec{j}; \vec{k}) \text{ 2Dou1D}}{=} \text{indéfini}$$

Étude du cas $\vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k}) \text{ 2Dou1D}$:

On déduit $\cos(\vec{j}, \overrightarrow{OG})$ de considérations sur les triangles <IOG> et <SOG> qui en étant d'origine O sont toujours définis, qu'ils soient développés ou plats, dans toutes les configurations de l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$:



Tout simplement, avec $\cos(\vec{j}, \overrightarrow{OG}) = \frac{OS}{OG}$:

$$\cos(\vec{j}, \overrightarrow{OG}) = \frac{\cos(\vec{i}, \vec{j})}{\cos \gamma}$$

Si $\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})$ 2Dou1D ou si le plan $(O; \vec{j}; \vec{k})$ est réduit à la droite (OJK), on utilise la formule de $\cos \gamma$ déduite de $\sin \gamma$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \cos(\vec{i}, \vec{j})}{|\cos(\vec{i}, \vec{j})|} \\ &= \frac{[\vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k}) \text{ 2Dou1D}]}{ET} \\ &= \frac{[\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j}) \text{ 2Dou1D}]}{ET} \\ &= \frac{\sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF})=0}{OU} \\ &= \frac{[[\vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k}) \text{ 2Dou1D}] ET [\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j}) \text{ 2Dou1D}]]}{OU} \\ &= [[\vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k}) \text{ 2Dou1D}] ET \sin(\vec{j}, \vec{k})=0] \end{aligned}$$

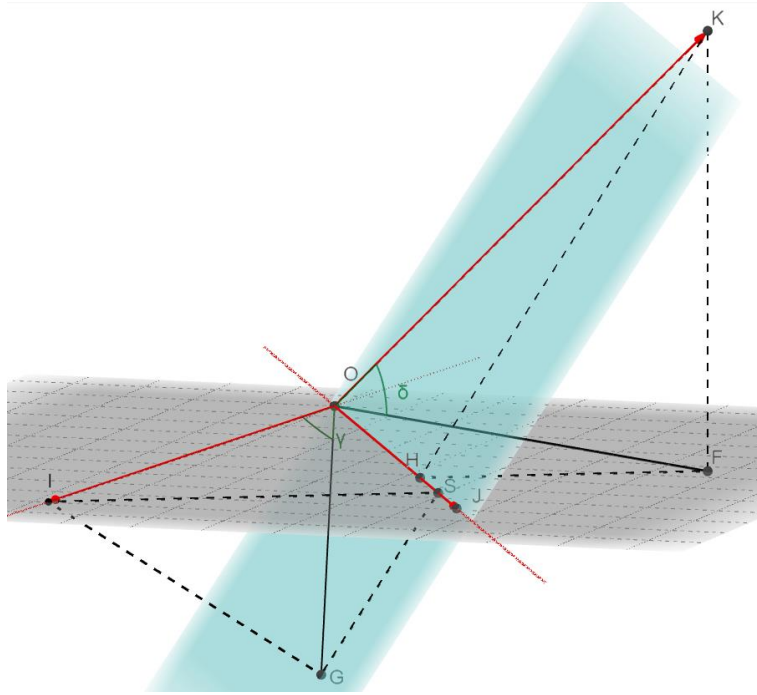
On obtient comme cas particulier de la précédente équation :

$$\cos(\vec{j}, \overrightarrow{OG}) \stackrel{[\vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k}) \text{ 2Dou1D}]}{=} \frac{\cos(\vec{i}, \vec{j})}{|\cos(\vec{i}, \vec{j})|}$$

ET $[\sin(\vec{j}, \vec{k})=0 \text{ OU } [\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j}) \text{ 2Dou1D}]]$

On déduit $\sin(\vec{j}, \overrightarrow{OG})$ de considérations sur les triangles $\triangle ISG$ et $\triangle FHK$ qui sont toujours définis pour $[\vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k}) \text{ 2Dou1D}]$ ET $[\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j}) \text{ 2Dou1D}]$ ET $\sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF}) \neq 0$.

Étude du cas $\sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF}) \neq 0$:



On rappelle l'implication : $\sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF}) \neq 0 \Rightarrow \sin(\vec{j}, \vec{k}) \neq 0$

On a dans le plan contenant γ :

$$OG = \cos \gamma$$

On a dans le plan contenant $(\vec{j}, \overrightarrow{OG})$:

$$SG = OG \cdot \sin(\vec{j}, \overrightarrow{OG}) = \cos \gamma \cdot \sin(\vec{j}, \overrightarrow{OG})$$

Dans le plan $(S; \overrightarrow{SG}; \overrightarrow{SI})$, on a :

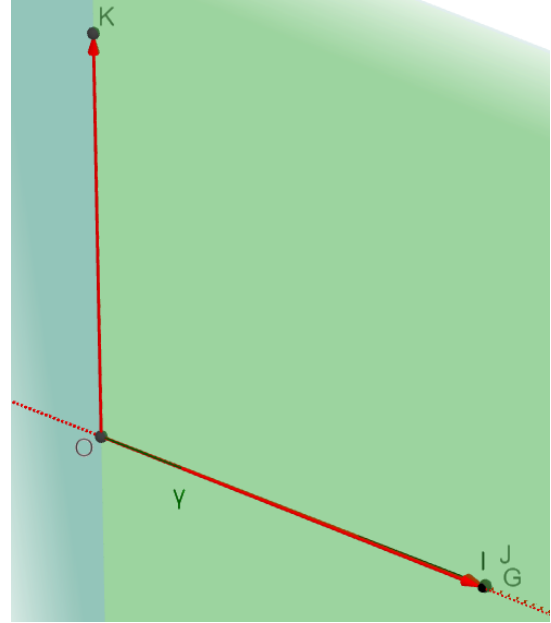
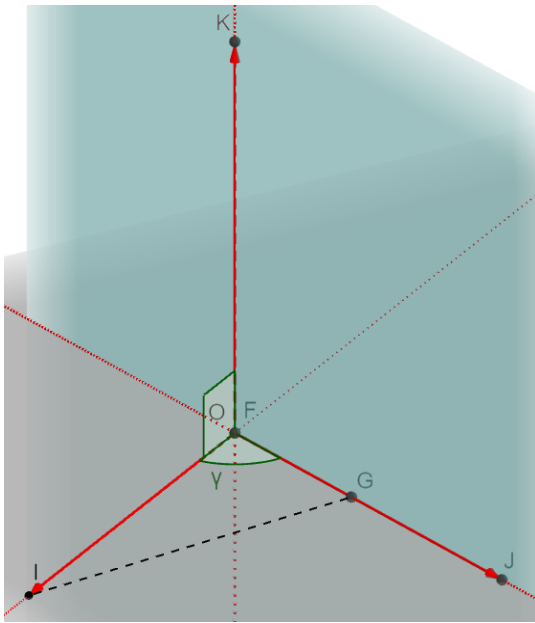
$$SG = SI \cdot \cos(\overrightarrow{SG}, \overrightarrow{SI}) = \sin(\vec{j}, \vec{i}) \cdot \cos(\overrightarrow{SG}, \overrightarrow{SI})$$

On égalise les deux expressions de SG :

$$\sin(\vec{j}, \overrightarrow{OG}) \cdot \cos \gamma = \sin(\vec{j}, \vec{i}) \cdot \cos(\overrightarrow{SG}, \overrightarrow{SI})$$

On a vu précédemment que l'angle géométrique $\angle ISG$ est aussi l'angle géométrique $\angle FHK$.

La fonction cosinus est paire, donc malgré l'ignorance de l'orientation des repères des angles $(\overrightarrow{SG}, \overrightarrow{SI})$ et $(\overrightarrow{HF}, \overrightarrow{HK})$, on a :



$$\sin(\vec{j}, \overrightarrow{OG}) = 0$$

[[$\vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}$]
ET [$\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}$]]

On écrira donc l'équation de référence pour $\sin(\vec{j}, \vec{k}) = 0$ et $\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}$:

$$\sin(\vec{j}, \overrightarrow{OG}) = 0$$

[[$\vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}$]
ET [$\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}$]]
OU
[[$\sin(\vec{j}, \vec{k}) = 0$ ET [$\vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}$]]

Dans tous les cas, $(\vec{j}, \overrightarrow{OG})$ suit sans ambiguïté l'orientation de $(O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}$. La référence logique à la droite (OIJ) n'est pas indispensable, car un modèle construit en permutation circulaire des vecteurs des équations retrouve les paramètres si l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est réduit à un plan.

Détermination de l'angle $(\vec{k}, \overrightarrow{OG})$

$$-\pi < (\vec{k}, \overrightarrow{OG}) \leq \pi$$

On mesure $(\vec{k}, \overrightarrow{OG})$ suivant l'orientation du plan $(O; \vec{j}; \vec{k})$ à l'aide des identités appliquées à une somme d'angles : $(\vec{k}, \overrightarrow{OG}) = (\vec{k}, \vec{j}) + (\vec{j}, \overrightarrow{OG}) = (\vec{j}, \overrightarrow{OG}) - (\vec{j}, \vec{k})$:

$$\cos(\vec{k}, \overrightarrow{OG})_{\vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}} = \cos(\vec{j}, \overrightarrow{OG}) \cdot \cos(\vec{j}, \vec{k}) + \sin(\vec{j}, \overrightarrow{OG}) \cdot \sin(\vec{j}, \vec{k})$$

$$\sin(\vec{k}, \overrightarrow{OG})_{\vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}} = \sin(\vec{j}, \overrightarrow{OG}) \cdot \cos(\vec{j}, \vec{k}) - \cos(\vec{j}, \overrightarrow{OG}) \cdot \sin(\vec{j}, \vec{k})$$

$(\vec{k}, \overrightarrow{OG})$ n'est pas défini quand $(\vec{j}, \overrightarrow{OG})$ n'est pas défini :

$$\cos(\vec{k}, \overrightarrow{OG})_{\vec{i} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}} \text{ indéfini}$$

$$\sin(\vec{k}, \overrightarrow{OG})_{\vec{i} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}} \text{ indéfini}$$

Détermination de l'angle $(\vec{k}, \overrightarrow{OZ})$

$$-\pi < (\vec{k}, \overrightarrow{OZ}) \leq \pi$$

On liste ci-dessous les formules établies par les mêmes genres de raisonnements :

$$\cos(\vec{k}, \overrightarrow{OZ})_{\vec{j} \perp (O; \vec{k}; \vec{i})_{2\text{Dou1D}}} \text{ indéfini}$$

$$\sin(\vec{k}, \overrightarrow{OZ})_{\vec{j} \perp (O; \vec{k}; \vec{i})_{2\text{Dou1D}}} \text{ indéfini}$$

$$\cos(\vec{k}, \overrightarrow{OZ})_{\vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{i})_{2\text{Dou1D}}} = \frac{\cos(\vec{j}, \vec{k})}{\cos \mu}$$

$$\sin(\vec{k}, \overrightarrow{OZ})_{\substack{[\vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{i})_{2\text{Dou1D}}] \\ \text{ET } [\vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}] \\ \text{ET } \sin(\vec{k}, \vec{i}) \neq 0}} = - \frac{\sin(\vec{j}, \vec{k}) \cdot \cos \gamma \cdot \sin(\vec{k}, \overrightarrow{OG})}{\cos \mu \cdot \sin(\vec{k}, \vec{i})}$$

La précédente équation se déduit de la formulation de $\sin(\vec{j}, \overrightarrow{OG})$ par permutation circulaire ($\vec{j}$ devient $\vec{k}$, G devient Z , $\vec{k}$ devient $\vec{i}$, δ devient γ et γ devient μ), mais ne pose pas de problème d'orientation à $(\vec{k}, \overrightarrow{OZ})$.

Là aussi, le signe de $\sin(\vec{k}, \overrightarrow{OZ})$ accorde l'orientation de l'angle $(\vec{k}, \overrightarrow{OZ})$ à celle du plan $(O; \vec{k}; \vec{i})$ ou de la droite (OKI) , par les choix des signes de $\sin(\vec{k}, \vec{i})$ et $\sin(\vec{j}, \vec{k})$ qui sont tous deux définis en référence logique au plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Les cosinus de γ et de μ n'ont pas d'influences sur le signe de $\sin(\vec{k}, \overrightarrow{OZ})$ puisqu'ils sont géométriquement définis comme toujours strictement positifs.

$$\sin(\vec{k}, \vec{OZ}) = 0$$

$$[\vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{i})_{2\text{Dou1D}}]$$

$$ET [\vec{i} \perp (O; \vec{k}; \vec{i})_{2\text{Dou1D}}]$$

$$OU$$

$$[\sin(\vec{k}, \vec{i})=0 ET [\vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{i})_{2\text{Dou1D}}]]$$

Détermination de l'angle $(\vec{i}, \vec{OZ})$

$$-\pi < (\vec{i}, \vec{OZ}) \leq \pi$$

De la même façon :

$$\cos(\vec{i}, \vec{OZ})_{\vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{i})_{2\text{Dou1D}}} = \cos(\vec{k}, \vec{OZ}) \cdot \cos(\vec{k}, \vec{i}) + \sin(\vec{k}, \vec{OZ}) \cdot \sin(\vec{k}, \vec{i})$$

$$\sin(\vec{i}, \vec{OZ})_{\vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{i})_{2\text{Dou1D}}} = \sin(\vec{k}, \vec{OZ}) \cdot \cos(\vec{k}, \vec{i}) - \cos(\vec{k}, \vec{OZ}) \cdot \sin(\vec{k}, \vec{i})$$

$$\cos(\vec{i}, \vec{OZ})_{\vec{j} \perp (O; \vec{k}; \vec{i})_{2\text{Dou1D}}} = \text{indéfini}$$

$$\sin(\vec{i}, \vec{OZ})_{\vec{j} \perp (O; \vec{k}; \vec{i})_{2\text{Dou1D}}} = \text{indéfini}$$

Détermination de l'angle $(\vec{i}, \vec{OF})'$

$$-\pi < (\vec{i}, \vec{OF})' \leq \pi$$

Il s'agit des équations retrouvant l'égalité de $(\vec{i}, \vec{OF})'$ avec le paramètre $(\vec{i}, \vec{OF})$.

$$\cos(\vec{i}, \vec{OF})'_{\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}} = \text{indéfini}$$

$$\sin(\vec{i}, \vec{OF})'_{\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}} = \text{indéfini}$$

$$\cos(\vec{i}, \vec{OF})'_{\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}} = \frac{\cos(\vec{k}, \vec{i})}{\cos \delta}$$

$$\sin(\vec{i}, \vec{OF})' = - \frac{\sin(\vec{k}, \vec{i}) \cdot \cos \mu \cdot \sin(\vec{i}, \vec{OZ})}{\cos \delta \cdot \sin(\vec{i}, \vec{j})}$$

$$[\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}]$$

$$ET [\vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{i})_{2\text{Dou1D}}]$$

$$ET \sin(\vec{i}, \vec{j}) \neq 0$$

$$\begin{aligned} \sin(\vec{i}, \overrightarrow{OF})' &= \frac{[\vec{k}_{non\perp}(O; \vec{i}; \vec{j})_{2Dou1D}]}{ET [\vec{j}_{\perp}(O; \vec{i}; \vec{j})_{2Dou1D}]} \\ &OU \\ &[\sin(\vec{i}, \vec{j})=0 \text{ ET } [\vec{k}_{non\perp}(O; \vec{i}; \vec{j})_{2Dou1D}]] \end{aligned} \quad 0$$

Dans le modèle en totale permutation circulaire on ne retrouve pas systématiquement cette égalité, mais les plans sont correctement orientés, et de ce dernier point de vue il n'est pas meilleur que l'autre :

Exemple :

$$(\vec{i}, \vec{j}) = 50^\circ - (\vec{j}, \overrightarrow{OF}) = -35^\circ - \delta = -30^\circ - (\vec{i}, \overrightarrow{OF}) = 15^\circ$$

Modèle en totale permutation circulaire	Modèle en référence logique à un plan (ici $(O; \vec{i}; \vec{j})$)
-44.813°	-44.813°
33.226°	-33.226°
-50°	50°
-32.919°	-32.919°
-44.348°	44.348°
-30°	-30°
-40.028°	-40.028°
4,785°	4,785°
7.237°	-7.237°
-25.989°	25.989°
-15°	15°
-35°	-35°

Tout au plus, l'appréciation subjective de « meilleur » concerne ce qui accorde le mieux les choix aux apparences.

Détermination de l'angle $(\vec{j}, \overrightarrow{OF})'$

$$-\pi < (\vec{j}, \overrightarrow{OF})' \leq \pi$$

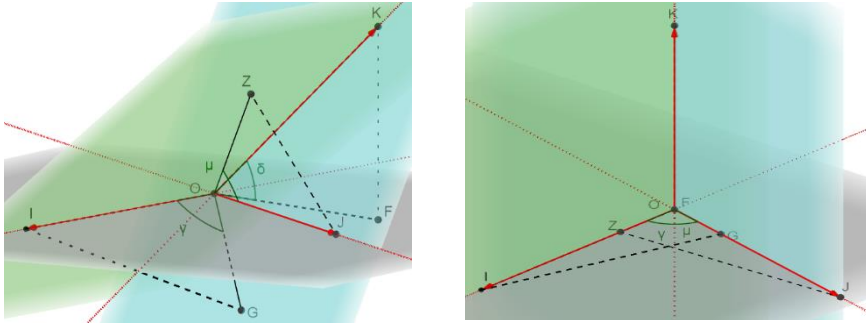
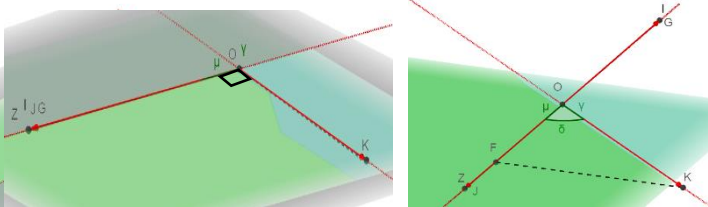
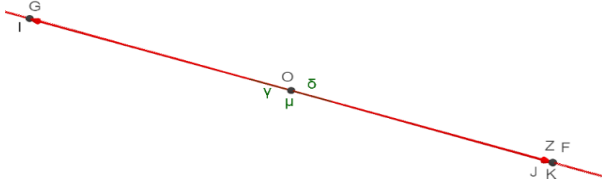
$$\cos(\vec{j}, \overrightarrow{OF})' \frac{=}{\vec{k}_{non\perp}(O; \vec{i}; \vec{j})_{2Dou1D}} \cos(\vec{i}, \overrightarrow{OF}) \cdot \cos(\vec{i}, \vec{j}) + \sin(\vec{i}, \overrightarrow{OF}) \cdot \sin(\vec{i}, \vec{j})$$

$$\sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF})' \frac{=}{\vec{k}_{non\perp}(O; \vec{i}; \vec{j})_{2Dou1D}} \sin(\vec{i}, \overrightarrow{OF}) \cdot \cos(\vec{i}, \vec{j}) - \cos(\vec{i}, \overrightarrow{OF}) \cdot \sin(\vec{i}, \vec{j})$$

$$\cos(\vec{j}, \overrightarrow{OF})' \frac{=}{\vec{k}_{\perp}(O; \vec{i}; \vec{j})_{2Dou1D}} \text{ indéfini}$$

$$\sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF})' \frac{=}{\vec{k}_{\perp}(O; \vec{i}; \vec{j})_{2Dou1D}} \text{ indéfini}$$

1.9 Tableau récapitulatif des formules du modèle d'orientation des angles dans l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

PARAMÈTRES INITIAUX	$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ 3D : $\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \sin\delta \neq 0$ OU $\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})$ 2D	ANGLES ÉTUDIÉS Avec leurs plus larges domaines de définitions
$\vec{k}$ orthogonal au plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$: $-\pi < (\vec{i}, \vec{j}) \neq 0 < \pi$ $\delta = (\overrightarrow{OF}, \vec{k}) = \text{indéfini}$ $(\vec{j}, \overrightarrow{OF}) = \text{indéfini}$ $(\vec{j}, \vec{k}) = \pm \frac{\pi}{2}$ $(\vec{k}, \vec{i}) = \pm \frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{2} < \gamma = (\overrightarrow{OG}, \vec{i}) < \frac{\pi}{2}$ $-\frac{\pi}{2} < \mu = (\overrightarrow{OZ}, \vec{j}) < \frac{\pi}{2}$ $-\frac{\pi}{2} < \delta' = (\overrightarrow{OF}, \vec{k})' < \frac{\pi}{2}$
$\vec{k}$ orthogonal à la droite (OIJ) : $(\vec{i}, \vec{j}) = 0 \text{ mod. } \pi$ $\delta = (\overrightarrow{OF}, \vec{k}) = \text{indéfini}$ $(\vec{j}, \overrightarrow{OF}) = \text{indéfini}$ $(\vec{j}, \vec{k}) = \pm \frac{\pi}{2}$	$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ 2D : $[\sin(\vec{i}, \vec{j}) \neq 0 \text{ ET } \sin\delta = 0]$ OU $[\sin(\vec{i}, \vec{j}) = 0 \text{ ET } \sin\delta \neq 0]$ OU $\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})$ 1D 	
$\vec{k}$ non ortho. au plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$: $-\pi < (\vec{i}, \vec{j}) \neq 0 < \pi$ $-\frac{\pi}{2} < \delta = (\overrightarrow{OF}, \vec{k}) < \frac{\pi}{2}$ $-\pi < (\vec{j}, \overrightarrow{OF}) \leq \pi$	$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ 1D : $\sin(\vec{i}, \vec{j}) = 0 \text{ ET } \sin\delta = 0$ 	
$\vec{k}$ non ortho. à la droite (OIJ) : $(\vec{i}, \vec{j}) = 0 \text{ mod. } \pi$ $-\frac{\pi}{2} < \delta = (\overrightarrow{OF}, \vec{k}) < \frac{\pi}{2}$ $(\vec{j}, \overrightarrow{OF}) = 0 \text{ mod. } \pi$		$-\pi < (\vec{j}, \overrightarrow{OG}) \leq \pi$ $-\pi < (\vec{k}, \overrightarrow{OG}) \leq \pi$ $-\pi < (\vec{k}, \overrightarrow{OZ}) \leq \pi$ $-\pi < (\vec{i}, \overrightarrow{OZ}) \leq \pi$ $-\pi < (\vec{j}, \vec{k}) \leq \pi$ $-\pi < (\vec{k}, \vec{i}) \leq \pi$ $-\pi < (\vec{j}, \overrightarrow{OF})' \leq \pi$ $-\pi < (\vec{i}, \vec{j})' \leq \pi$

Quelques conditions d'orthogonalité des plans de l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ suffisantes à l'étude :

$$\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}} \Leftrightarrow \text{Perception empirique au début de l'étude}$$

Définition contraire :

$$\vec{k}_{\text{non}} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}} \Leftrightarrow \text{Perception empirique au début de l'étude}$$

$$\vec{i} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} (\sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF}) = 0 \text{ OU } [\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}]) \\ \text{ET} \\ \cos(\vec{i}, \vec{j}) = 0 \end{pmatrix}$$

Définition contraire :

$$\vec{i}_{\text{non}} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \text{NON} \begin{pmatrix} (\sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF}) = 0 \text{ OU } [\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}]) \\ \text{ET} \\ \cos(\vec{i}, \vec{j}) = 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{j} \perp (O; \vec{k}; \vec{i})_{2\text{Dou1D}} \Leftrightarrow \overrightarrow{OZ} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} (\sin(\vec{i}, \overrightarrow{OF}) = 0 \text{ OU } [\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}]) \\ \text{ET} \\ \cos(\vec{i}, \vec{j}) = 0 \end{pmatrix}$$

Définition contraire :

$$\vec{j}_{\text{non}} \perp (O; \vec{k}; \vec{i}) \text{ OU } (OKI) \Leftrightarrow \overrightarrow{OZ} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \text{NON} \begin{pmatrix} (\sin(\vec{i}, \overrightarrow{OF}) = 0 \text{ OU } [\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}]) \\ \text{ET} \\ \cos(\vec{i}, \vec{j}) = 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}} \Leftrightarrow \overrightarrow{OF} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} (\sin(\vec{j}, \overrightarrow{OG}) = 0 \text{ OU } [\vec{i} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}]) \\ \text{ET} \\ \cos(\vec{j}, \vec{k}) = 0 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})1D \Rightarrow \sin(\vec{i}, \vec{j}) = 0)$$

Définitions contraires :

$$\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})2\text{Dou}1D \Leftrightarrow \vec{OF} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \text{NON} \left(\begin{array}{c} (\sin(\vec{j}, \vec{OG}) = 0 \text{ OU } [\vec{i} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})2\text{Dou}1D]) \\ \text{ET} \\ \cos(\vec{j}, \vec{k}) = 0 \end{array} \right)$$

*

$$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}) \text{ 3D orthonormé } \Leftrightarrow \vec{OF} = \vec{OG} = \vec{OZ} = \vec{0}$$

Définition contraire :

$$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}) \text{ 3D non ortho. } \Leftrightarrow \text{NON}(\vec{OF} = \vec{OG} = \vec{OZ} = \vec{0})$$

Note : On ne distingue pas par exemple le cas $\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})2D$ du cas $\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})1D$, comme on pourrait le faire dans l'étude par purisme, car ce n'est pas nécessaire : la condition logique OU est exclusive et les équations sont suffisamment conditionnées pour décrire la réalité géométrique sous-jacente. Dans le programme informatique, on utilise la variable "korto" telle que $\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})2\text{Dou}1D \Leftrightarrow \text{korto} = 0$ et $\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})2\text{Dou}1D \Leftrightarrow \text{korto} = 1$

L'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}) \text{ 3D}$ est modélisé en référence logique au plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Cela veut dire que toutes les fonctions de sinus des angles de tous les plans de $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}) \text{ 3D}$ sont calculées (directement ou indirectement) à partir du signe choisi pour $\sin(\vec{i}, \vec{j})$. Il n'y a donc pas de formules de permutation circulaire pour les sinus. Les fonctions cosinus renvoient les mêmes valeurs par permutations circulaires.

Angles $(\vec{i}, \vec{OF}), (\vec{j}, \vec{k}), (\vec{k}, \vec{i}), (\vec{i}, \vec{j})'$

$(\vec{i}, \vec{OF})$		$\sin(\vec{i}, \vec{OF})_{\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})2\text{Dou}1D} = \sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \cos(\vec{j}, \vec{OF}) + \cos(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \sin(\vec{j}, \vec{OF})$
-----------------------	--	---

	$\cos(\vec{i}, \overrightarrow{OF})_{\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}} = \cos(\vec{i}, \vec{j}) \cos(\vec{j}, \overrightarrow{OF}) - \sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF})$ $\cos(\vec{i}, \overrightarrow{OF})_{\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}} \text{ indéfini}$	$\sin(\vec{i}, \overrightarrow{OF})_{\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}} \text{ indéfini}$
$(\vec{j}, \vec{k})$ On utilisera aussi :	$\cos(\vec{j}, \vec{k})_{\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}} = \cos \delta \cdot \cos(\vec{j}, \overrightarrow{OF})$ $\cos(\vec{j}, \vec{k})_{\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}} = 0$ $\cos(\vec{j}, \vec{k})_{\vec{j} \perp \text{non}(O; \vec{k}; \vec{i})_{2\text{Dou1D}}} = \cos \mu \cdot \cos(\vec{k}, \overrightarrow{OZ})$ $\cos(\vec{j}, \vec{k})_{\vec{j} \perp (O; \vec{k}; \vec{i})_{2\text{Dou1D}}} = 0$	$\sin(\vec{j}, \vec{k})_{[\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}] \text{ ET } \sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF}) \neq 0} = \frac{\sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF})}{ \sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF}) } \cdot [1 - \cos^2(\vec{j}, \vec{k})]^{\frac{1}{2}}$ $\sin(\vec{j}, \vec{k})_{[\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}] \text{ ET } \sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF}) = 0} = \sin \delta \cdot \cos(\vec{j}, \overrightarrow{OF})$ $\sin(\vec{j}, \vec{k})_{\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}} = \pm 1 \text{ (choix de l'observateur)}$
$(\vec{k}, \vec{i})$ On utilisera aussi :	$\cos(\vec{k}, \vec{i})_{\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}} = \cos \delta \cdot \cos(\vec{i}, \overrightarrow{OF})$ $\cos(\vec{k}, \vec{i})_{\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}} = 0$ $\cos(\vec{k}, \vec{i})_{\vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}} = \cos \gamma \cdot \cos(\vec{k}, \overrightarrow{OG})$ $\cos(\vec{k}, \vec{i})_{\vec{i} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}} = 0$	$\sin(\vec{k}, \vec{i})_{[\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}] \text{ ET } \sin(\vec{i}, \overrightarrow{OF}) \neq 0} = - \frac{\sin(\vec{i}, \overrightarrow{OF})}{ \sin(\vec{i}, \overrightarrow{OF}) } \cdot [1 - \cos^2(\vec{k}, \vec{i})]^{\frac{1}{2}}$ $\sin(\vec{k}, \vec{i})_{[\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}] \text{ ET } \sin(\vec{i}, \overrightarrow{OF}) = 0} = - \sin \delta \cdot \cos(\vec{i}, \overrightarrow{OF})$ $\sin(\vec{k}, \vec{i})_{\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{D}} \Rightarrow \sin(\vec{i}, \vec{j}) \neq 0} = \pm 1 \text{ (choix de l'observateur)}$ $\sin(\vec{k}, \vec{i})_{\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{1\text{D}} \Rightarrow \sin(\vec{i}, \vec{j}) = 0} = - \cos(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \sin(\vec{j}, \vec{k})$
$(\vec{i}, \vec{j})'$	$\cos(\vec{i}, \vec{j})' = \cos(\vec{i}, \vec{j})$	$\sin(\vec{i}, \vec{j})' = \sin(\vec{i}, \vec{j})$

	On utilisera aussi : $\cos(\vec{l}, \vec{j})_{\vec{l} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}} = \cos \gamma \cdot \cos(\vec{j}, \overrightarrow{OG})$ $\cos(\vec{l}, \vec{j})_{\vec{l} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}} = 0$ $\cos(\vec{l}, \vec{j})_{\vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{l})_{2\text{Dou1D}}} = \cos \mu \cdot \cos(\vec{l}, \overrightarrow{OZ})$ $\cos(\vec{l}, \vec{j})_{\vec{j} \perp (O; \vec{k}; \vec{l})_{2\text{Dou1D}}} = 0$	
angle γ, μ, δ		
$\gamma = (\overrightarrow{OG}, \vec{l})$	$\cos \gamma > 0_{\vec{l} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}} = (1 - \sin^2 \gamma)^{\frac{1}{2}}$ $\cos \gamma_{\vec{l} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}} \text{ indéfini}$	$\sin \gamma_{\substack{[\vec{l} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}] \\ ET \\ [\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{l}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}] \\ ET \\ \sin(\vec{l}, \vec{j}) \cdot \sin(\vec{l}, \overrightarrow{OF}) \cdot \sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF}) \neq 0 \\ \text{Note: } \sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF}) \neq 0 \Rightarrow \sin(\vec{j}, \vec{k}) \neq 0}} = \frac{\sin(\vec{l}, \vec{j}) \cdot \sin(\vec{l}, \overrightarrow{OF}) \cdot \sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF})}{ \sin(\vec{l}, \vec{j}) \cdot \sin(\vec{l}, \overrightarrow{OF}) \cdot \sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF}) } \cdot \left \frac{\sin(\vec{l}, \vec{j}) \cdot \sin \delta}{\sin(\vec{j}, \vec{k})} \right $ $\sin \gamma_{\substack{[\vec{l} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}] \\ ET \\ [\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{l}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}] \\ ET \\ [\vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{l})_{2\text{Dou1D}}] \\ ET \sin(\vec{l}, \overrightarrow{OF}) = 0 \\ ET \sin(\vec{k}, \vec{l}) \cdot \sin(\vec{j}, \vec{k}) \neq 0}} = \frac{\sin(\vec{k}, \vec{l}) \cdot \cos(\vec{k}, \vec{l})}{ \sin(\vec{k}, \vec{l}) \cdot \cos(\vec{k}, \vec{l}) } \cdot \left \frac{\sin(\vec{l}, \vec{j}) \cdot \sin \delta}{\sin(\vec{j}, \vec{k})} \right $

		$\sin \gamma \frac{\sin(\vec{k}, \vec{i}) \cdot \cos(\vec{k}, \vec{i})}{ \cos(\vec{k}, \vec{i}) }$ $\frac{[\vec{i} \text{ non} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})]_{2\text{Dou1D}}}{[\vec{k} \text{ non} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})]_{2\text{Dou1D}}}$ $\frac{[\vec{j} \perp (O; \vec{k}; \vec{i})]_{2\text{Dou1D}}}{[\vec{i} \text{ non} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})]_{2\text{Dou1D}}}$ $\sin \gamma \frac{\sin(\vec{l}, \vec{j}) \cdot \cos(\vec{l}, \vec{j})}{ \cos(\vec{l}, \vec{j}) }$ $\frac{[\vec{l} \text{ non} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})]_{2\text{Dou1D}}}{[\vec{k} \text{ non} \perp (O; \vec{l}; \vec{j})]_{2\text{Dou1D}}}$ $\frac{ET \sin(\vec{j}, \vec{OF})=0}{OU}$ $\frac{[\vec{i} \text{ non} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})]_{2\text{Dou1D}}}{[\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})]_{2\text{Dou1D}}}$ $\frac{ET \sin(\vec{j}, \vec{k})=0}{OU}$ $\sin \gamma \frac{\sin(\vec{l}, \vec{j})=0}{ET/OU \sin(\vec{k}, \vec{i})=0} 0$ $\sin \gamma \frac{\vec{i} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}}{\vec{l} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}} \text{ indéfini}$
--	--	--

$\mu = (\vec{OZ}, \vec{j})$	$\cos \mu > 0 \quad = \quad (1 - \sin^2 \mu)^{\frac{1}{2}}$ $\cos \mu \quad = \quad \text{indéfini}$	$\sin \mu \quad = \quad \frac{[\vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{i})]_{2\text{Dou1D}}}{[\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})]_{2\text{Dou1D}}}$ $\sin \mu \quad = \quad \frac{[\vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k})]_{2\text{Dou1D}}}{[\vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{i})]_{2\text{Dou1D}}}$ $\sin(\vec{i}, \vec{j}).\sin(\vec{i}, \vec{OF}).\sin(\vec{j}, \vec{OF}) \neq 0$ Note: $\sin(\vec{i}, \vec{OF}) \neq 0 \Rightarrow \sin(\vec{k}, \vec{i}) \neq 0$ $\sin \mu \quad = \quad \frac{\sin(\vec{i}, \vec{j}).\sin(\vec{i}, \vec{OF}).\sin(\vec{j}, \vec{OF})}{ \sin(\vec{i}, \vec{j}).\sin(\vec{i}, \vec{OF}).\sin(\vec{j}, \vec{OF}) } \cdot \left \frac{\sin(\vec{j}, \vec{k}).\sin \gamma}{\sin(\vec{k}, \vec{i})} \right $ $\sin \mu \quad = \quad \frac{\sin(\vec{j}, \vec{k}).\cos(\vec{j}, \vec{k})}{ \sin(\vec{j}, \vec{k}).\cos(\vec{j}, \vec{k}) } \cdot \left \frac{\sin(\vec{j}, \vec{k}).\sin \gamma}{\sin(\vec{k}, \vec{i})} \right $ $\sin(\vec{j}, \vec{OF}) = 0$ $\sin(\vec{j}, \vec{k}).\sin(\vec{k}, \vec{i}) \neq 0$ $\sin \mu \quad = \quad \frac{\sin(\vec{j}, \vec{k}).\cos(\vec{j}, \vec{k})}{ \cos(\vec{j}, \vec{k}) }$
-----------------------------	--	---

		$\sin \mu \quad \frac{\sin(\vec{l}, \vec{j}) \cdot \cos(\vec{l}, \vec{j})}{ \cos(\vec{l}, \vec{j}) }$ $\frac{[\vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{i})]_{2\text{Dou1D}}}{[\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})]_{2\text{Dou1D}}}$ $\frac{ET \sin(\vec{i}, \vec{OF})=0}{OU}$ $\frac{[\vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{i})]_{2\text{Dou1D}} ET [\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})]_{2\text{Dou1D}}}{[\vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{i})]_{2\text{Dou1D}} ET \sin(\vec{k}, \vec{i})=0}$ $\sin \mu \quad \frac{0}{\sin(\vec{j}, \vec{k})=0}$ $\frac{ET/OU}{\sin(\vec{i}, \vec{j})=0}$ $\sin \mu = \text{indéfini}$ $\vec{j} \perp (O; \vec{k}; \vec{i})_{2\text{Dou1D}}$
$\delta' = (\vec{OF}, \vec{k})$	$\cos \delta' > 0 \quad \frac{1}{\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}} (1 - \sin^2 \delta')^{\frac{1}{2}}$ $\cos \delta' \quad \frac{1}{\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}} \text{ indéfini}$	$\sin \delta' \quad \frac{\sin \delta}{ \sin \delta } \cdot \frac{ \sin(\vec{k}, \vec{i}) \cdot \sin \mu }{ \sin(\vec{l}, \vec{j}) }$ $\frac{[\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})]_{2\text{Dou1D}}}{[\vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{i})]_{2\text{Dou1D}}}$ $\frac{ET \sin \delta \cdot \sin(\vec{i}, \vec{j}) \neq 0}{OU}$ $\sin \delta' \quad \frac{1}{[\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})]_{2\text{Dou1D}} ET [\vec{j} \perp (O; \vec{k}; \vec{i})]_{2\text{Dou1D}}]} - \frac{\sin(\vec{k}, \vec{i}) \cdot \cos(\vec{k}, \vec{i})}{ \cos(\vec{k}, \vec{i}) }$ $\frac{OU}{[\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})]_{2\text{Dou1D}} ET \sin(\vec{i}, \vec{j})=0}$

		$\sin \delta' \stackrel{=}{=} 0$ $[\sin(\vec{j}, \vec{k}) = 0$ $ET / OU \sin(\vec{k}, \vec{i}) = 0]$ $\begin{matrix} OU \\ \sin \delta = 0 \end{matrix}$ $\sin \delta' \stackrel{=}{=} \text{indéfini}$ $\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}$
Angles $(\vec{j}, \overrightarrow{OG}), (\vec{k}, \overrightarrow{OG}), (\vec{k}, \overrightarrow{OZ}), (\vec{i}, \overrightarrow{OZ}), (\vec{i}, \overrightarrow{OF})', (\vec{j}, \overrightarrow{OF})'$		
$(\vec{j}, \overrightarrow{OG})$	$\cos(\vec{j}, \overrightarrow{OG}) \stackrel{=}{=} \frac{\cos(\vec{i}, \vec{j})}{\cos \gamma}$ $\vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}$ $\cos(\vec{j}, \overrightarrow{OG}) \stackrel{=}{=} \text{indéfini}$ $\vec{i} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}$	$\sin(\vec{j}, \overrightarrow{OG}) \stackrel{=}{=} - \frac{\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \cos \delta \cdot \sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF})}{\cos \gamma \cdot \sin(\vec{j}, \vec{k})}$ $[\vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}]$ $ET [\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}]$ $ET \sin(\vec{j}, \vec{k}) \neq 0$ $\sin(\vec{j}, \overrightarrow{OG}) \stackrel{=}{=} 0$ $[[\vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}]$ $ET [\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2\text{Dou1D}}]]$ $\begin{matrix} OU \\ [\sin(\vec{j}, \vec{k}) = 0 \text{ ET } [\vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}]] \end{matrix}$ $\sin(\vec{j}, \overrightarrow{OG}) \stackrel{=}{=} \text{indéfini}$ $\vec{i} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}$
$(\vec{k}, \overrightarrow{OG})$	$\cos(\vec{k}, \overrightarrow{OG}) \stackrel{=}{=} \cos(\vec{j}, \overrightarrow{OG}) \cdot \cos(\vec{j}, \vec{k})$ $\vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}$ $+ \sin(\vec{j}, \overrightarrow{OG}) \cdot \sin(\vec{j}, \vec{k})$ $\cos(\vec{k}, \overrightarrow{OG}) \stackrel{=}{=} \text{indéfini}$ $\vec{i} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}$	$\sin(\vec{k}, \overrightarrow{OG}) \stackrel{=}{=} \sin(\vec{j}, \overrightarrow{OG}) \cdot \cos(\vec{j}, \vec{k}) - \cos(\vec{j}, \overrightarrow{OG}) \cdot \sin(\vec{j}, \vec{k})$ $\vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}$ $\sin(\vec{k}, \overrightarrow{OG}) \stackrel{=}{=} \text{indéfini}$ $\vec{i} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2\text{Dou1D}}$

$(\vec{k}, \overrightarrow{OZ})$	$\cos(\vec{k}, \overrightarrow{OZ})_{\vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{i}) 2\text{Dou1D}} = \frac{\cos(\vec{j}, \vec{k})}{\cos \mu}$ $\cos(\vec{k}, \overrightarrow{OZ})_{\vec{j} \perp (O; \vec{k}; \vec{i}) 2\text{Dou1D}} = \text{indéfini}$	$\sin(\vec{k}, \overrightarrow{OZ})_{\substack{[\vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{i}) 2\text{Dou1D}] \\ ET [\vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k}) 2\text{Dou1D}] \\ ET \sin(\vec{k}, \vec{i}) \neq 0}} = \frac{\sin(\vec{j}, \vec{k}) \cdot \cos \gamma \cdot \sin(\vec{k}, \overrightarrow{OG})}{\cos \mu \cdot \sin(\vec{k}, \vec{i})}$ $\sin(\vec{k}, \overrightarrow{OZ})_{\substack{[\vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{i}) 2\text{Dou1D}] \\ ET [\vec{i} \perp (O; \vec{k}; \vec{i}) 2\text{Dou1D}]] \\ OU \\ [\sin(\vec{k}, \vec{i}) = 0 \text{ ET } [\vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{i}) 2\text{Dou1D}]]}} = 0$ $\sin(\vec{k}, \overrightarrow{OZ})_{\vec{j} \perp (O; \vec{k}; \vec{i}) 2\text{Dou1D}} = \text{indéfini}$
$(\vec{i}, \overrightarrow{OZ})$	$\cos(\vec{i}, \overrightarrow{OZ})_{\vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{i}) 2\text{Dou1D}} = \cos(\vec{k}, \overrightarrow{OZ}) \cdot \cos(\vec{k}, \vec{i}) + \sin(\vec{k}, \overrightarrow{OZ}) \cdot \sin(\vec{k}, \vec{i})$ $\cos(\vec{i}, \overrightarrow{OZ})_{\vec{j} \perp (O; \vec{k}; \vec{i}) 2\text{Dou1D}} = \text{indéfini}$	$\sin(\vec{i}, \overrightarrow{OZ})_{\vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{i}) 2\text{Dou1D}} = \sin(\vec{k}, \overrightarrow{OZ}) \cdot \cos(\vec{k}, \vec{i}) - \cos(\vec{k}, \overrightarrow{OZ}) \cdot \sin(\vec{k}, \vec{i})$ $\sin(\vec{i}, \overrightarrow{OZ})_{\vec{j} \perp (O; \vec{k}; \vec{i}) 2\text{Dou1D}} = \text{indéfini}$
$(\vec{i}, \overrightarrow{OF})'$	$\cos(\vec{i}, \overrightarrow{OF})'_{\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j}) 2\text{Dou1D}} = \frac{\cos(\vec{k}, \vec{i})}{\cos \delta}$ $\cos(\vec{i}, \overrightarrow{OF})'_{\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j}) 2\text{Dou1D}} = \text{indéfini}$	$\sin(\vec{i}, \overrightarrow{OF})'_{\substack{[\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j}) 2\text{Dou1D}] \\ ET [\vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{i}) 2\text{Dou1D}] \\ ET \sin(\vec{i}, \vec{j}) \neq 0}} = \frac{\sin(\vec{k}, \vec{i}) \cdot \cos \mu \cdot \sin(\vec{i}, \overrightarrow{OZ})}{\cos \delta \cdot \sin(\vec{i}, \vec{j})}$

		$\sin(\vec{i}, \overrightarrow{OF})' \begin{matrix} \text{=} \\ \text{[} \overrightarrow{k} \text{ non} \perp (O; \vec{i}; \vec{j}) \text{ 2Dou1D} \text{]} \\ \text{ET } [\vec{j} \perp (O; \vec{i}; \vec{j}) \text{ 2Dou1D}] \\ \text{OU} \\ \text{[sin}(\vec{i}, \vec{j})=0 \text{ ET } [\overrightarrow{k} \text{ non} \perp (O; \vec{i}; \vec{j}) \text{ 2Dou1D}]] \end{matrix} 0$ $\sin(\vec{i}, \overrightarrow{OF})' \begin{matrix} \text{=} \\ \overrightarrow{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j}) \text{ 2Dou1D} \end{matrix} \text{ indéfini}$
$(\vec{j}, \overrightarrow{OF})'$	$\begin{matrix} \cos(\vec{j}, \overrightarrow{OF})' \begin{matrix} \text{=} \\ \overrightarrow{k} \text{ non} \perp (O; \vec{i}; \vec{j}) \text{ 2Dou1D} \end{matrix} \cos(\vec{i}, \overrightarrow{OF}). \cos(\vec{i}, \vec{j}) \\ + \sin(\vec{i}, \overrightarrow{OF}). \sin(\vec{i}, \vec{j}) \\ \cos(\vec{j}, \overrightarrow{OF})' \begin{matrix} \text{=} \\ \overrightarrow{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j}) \text{ 2Dou1D} \end{matrix} \text{ indéfini} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF})' \begin{matrix} \text{=} \\ \overrightarrow{k} \text{ non} \perp (O; \vec{i}; \vec{j}) \text{ 2Dou1D} \end{matrix} \sin(\vec{i}, \overrightarrow{OF}). \cos(\vec{i}, \vec{j}) - \cos(\vec{i}, \overrightarrow{OF}). \sin(\vec{i}, \vec{j}) \\ \sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF})' \begin{matrix} \text{=} \\ \overrightarrow{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j}) \text{ 2Dou1D} \end{matrix} \text{ indéfini} \end{matrix}$

Chapitre 2

CALCULS ANALYTIQUES DANS LES REPÈRES DE L'OBJET $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

2.1 Généralités

Une famille de vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$, est libre si aucun des vecteurs $\vec{u}_n$ ne peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres :

$$\text{Si } \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{u}_n = \vec{0}, \text{ alors } \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

Dans le cas contraire, si au moins un vecteur peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres, c'est une famille liée.

Une famille libre $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ est génératrice d'un espace E si tout vecteur $\vec{v}$ de E est une combinaison linéaire des vecteurs de cette famille : $\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{u}_n$.

Une famille libre et génératrice définit une base d'un espace de dimension n , où n est le nombre de vecteurs de cette famille. L'ensemble des nombres $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ est appelé système de coordonnées cartésiennes du vecteur $\vec{v}$ dans la base $(\vec{u}_1; \vec{u}_2; \dots; \vec{u}_n)$.

L'espace euclidien est l'espace de dimension $n=3$, qui contient les espaces (ou « sous-espace » si on veut les relativiser) de dimension 2 (le plan), de dimension 1 (la droite), de dimension 0 (le point).

On peut associer la famille de vecteurs $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ à un point origine d'un repère de l'espace, ce qui a servi dans le chapitre 1 à définir l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. La particularité d'un repère cartésien 3D ou 2D est de pouvoir construire les coordonnées d'un point d'un espace par des projections de droites parallèles aux axes du repère. L'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ 3D étudié dans le chapitre 1 est donc aussi un repère cartésien car chacun de ses vecteurs est utilisé pour définir un triplet de coordonnées $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Par contre, un objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}; \vec{l})$ de dimension 4 avec $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}; \vec{l})$ famille libre, ou de dimension 3 avec $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}; \vec{l})$ famille liée, ne peut pas constituer un repère de l'espace 3D.

On comprend alors que l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est dans notre étude selon sa configuration spatiale le repère d'une famille libre ou liée de vecteurs $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$:

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ 3D est un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ 2D n'est pas un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ 1D n'est pas un repère	$\vec{i} \neq \vec{0}$ $\vec{j} \neq \vec{0}$ $\vec{k} \neq \vec{0}$	
$(O; \vec{i}; \vec{j})$ 2D est un repère	$(O; \vec{j}; \vec{k})$ 2D est un repère	$(O; \vec{k}; \vec{i})$ 2D est un repère
$(O; \vec{i}; \vec{j})$ 1D n'est pas un repère	$(O; \vec{j}; \vec{k})$ 1D n'est pas un repère	$(O; \vec{k}; \vec{i})$ 1D n'est pas un repère
$(O; \vec{i})$ 1D est un repère	$(O; \vec{j})$ 1D est un repère	$(O; \vec{k})$ 1D est un repère

On fait une différence de signe de mesure d'objets entre les différentes écritures d'une même disposition spatiale de vecteurs. Les objets $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ 3D et $(O; \vec{k}; \vec{j}; \vec{i})$ 3D sont le même objet géométrique donnant les mêmes coordonnées cartésiennes des points de l'espace. Cependant les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{k}$ ayant permuté, la mesure du volume de l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est de signe contraire à celle de $(O; \vec{k}; \vec{j}; \vec{i})$.

Une base contient autant de vecteurs non déductibles les uns des autres par combinaisons linéaires que la dimension de l'espace qu'elle génère. Dans notre étude, on a vu que la famille de vecteurs $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ pouvait se retrouver dans un plan ou sur une droite, formant alors une famille de vecteurs liés.

Si $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ est 2D, on a trois repères possibles du plan : $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, $(O ; \vec{j} ; \vec{k})$, $(O ; \vec{i} ; \vec{k})$. À chaque fois un des vecteurs $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ 3D n'est pas utilisable pour la construction cartésienne des coordonnées 2D.

Si $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ est 1D, on a trois repères possibles du plan : $(O ; \vec{i})$, $(O ; \vec{j})$, $(O ; \vec{k})$. À chaque fois deux des vecteurs de $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ 3D ne sont pas utilisables pour la construction cartésienne de l'unique coordonnée d'un point de la droite, qui n'est pas alors déductible de projection parallèle mais est une donnée empirique identifiable à un nombre.

Une forme analytique liste les équations des coordonnées d'un vecteur dans un repère. Ici nous cherchons en premier lieu les coordonnées de $\vec{i} \wedge \vec{j}$ dans les repères de toutes les configurations spatiales de la famille de vecteurs $(\vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.

La forme géométrique du produit vectoriel dans $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ 3D est un vecteur orthogonal à deux vecteurs. Si les vecteurs mis en produit sont non colinéaires, ils définissent un plan et leur produit vectoriel est un vecteur orthogonal à ce plan (voir en annexe «orthogonalité du produit vectoriel»), dont la norme est la valeur absolue du sinus de l'angle entre les deux vecteurs de ce plan. Si les vecteurs mis en produit sont colinéaires, ils définissent une droite et leur produit vectoriel est un vecteur orthogonal à cette droite, dont la norme est la valeur absolue du sinus de l'angle entre les deux vecteurs de cette droite, c'est-à-dire 0. Le produit vectoriel est alors bien défini dans $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ 3D comme $\vec{0}$.

Le produit vectoriel n'est pas défini dans tout espace si un des deux vecteurs en produit est le vecteur nul, car l'angle entre les deux vecteurs en produit n'est pas définissable.

Le produit vectoriel est défini pour $n \geq 2$ sous certaines conditions. Dans $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ 2D, si deux vecteurs occupent le sous-espace vectoriel d'un plan et sont non colinéaires, on ne peut pas définir les coordonnées de leur produit vectoriel dans $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ 2D, $(O ; \vec{j} ; \vec{k})$ 2D, $(O ; \vec{i} ; \vec{k})$ 2D. parce qu'il manque à ces repères une dimension pour définir la mesure d'une longueur, la mesure d'un angle et l'orthogonalité à chacun de ces vecteurs. Si deux vecteurs occupent le sous-espace vectoriel d'une droite et sont donc colinéaires, on peut définir les coordonnées de leur produit vectoriel dans $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ 2D ou $(O ; \vec{j} ; \vec{k})$ 2D ou $(O ; \vec{i} ; \vec{k})$ 2D, parce qu'il y a dans ces repères assez de dimensions pour définir la mesure d'une longueur, la mesure d'un angle et la notion d'orthogonalité à chacun des vecteurs en produit. Bien que le produit vectoriel soit alors le vecteur nul, il est défini et ses coordonnées dans un repère du plan sont égales à zéro.

Dans $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ 1D, deux vecteurs occupent le sous-espace vectoriel d'une droite et sont colinéaires, mais on ne peut pas définir les coordonnées de leur produit vectoriel nul dans $(O ; \vec{i})$ 1D ou $(O ; \vec{j})$ 1D ou $(O ; \vec{k})$ 1D, parce que ces repères n'ont pas assez de dimensions pour utiliser les notions de mesures d'angle et d'orthogonalité. Le produit vectoriel est alors un objet indéfini dans ces repères

Le produit vectoriel est défini comme un vecteur (nul si l'angle entre les vecteurs en produit est nul ou plat) orthogonal à un plan ou une droite, indépendamment du repère dans lequel on l'étudie. Il n'est pas incliné par rapport à un plan si le repère n'est pas orthonormé. Cependant il est une création subjective de l'esprit servant à déployer le jeu logique et créatif, il n'est pas une vérité de la nature ou de la logique, mais un moyen dans un processus naturel (quoique pas toujours possible ou probable) de précision de la vision et de l'image. On aurait pu faire des opérations de géométries en définissant un produit vectoriel penché sur un plan, mais cela aurait été moins utile, et sa formulation aurait été plus délicate car il n'aurait pas été unique selon une orientation donnée de l'espace. Sa formulation serait décrite par tous les vecteurs occupant la surface d'un cône selon une orientation donnée de l'espace.

L'orientation du produit vectoriel suit une règle subjective d'orientation de l'espace 3D pouvant être appliquée par différentes techniques relevant de nos structures de différenciation cognitives, les mêmes que celles permettant de différencier relativement l'un à l'autre la gauche de la droite ou le haut du bas. En utilisant par exemple la règle des trois doigts on oriente ainsi empiriquement l'espace de façon directe ou indirecte, ce qui sous-entend que les produits vectoriels étudiés dans cet espace suivront la même orientation. Il est aussi possible par choix d'étudier un produit vectoriel dans un repère qui n'a pas

systématiquement la même orientation que l'espace, et c'est ce que nous rencontrons en étudiant l'objet $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ dans toutes ses configurations spatiales.

2.2 Définitions d'opérateurs

Les opérateurs ψ_n (psi n) et ξ_n (ksi n) caractérisent l'objet formant le repère dans lequel on mesure les objets formés sur des vecteurs quelconques. Les opérateurs ψ_n et ξ_n sont mis en produit pour définir les coordonnées des produits vectoriels dans un repère D . En effet le nombre de vecteurs formant l'objet formant le repère de l'espace est alors n .

$\psi_n = \pm 1$ (lire $\psi_n = 1$ ou $\psi_n = -1$) caractérise l'orientation directe ou indirecte du produit vectoriel dans l'espace R^n

$\xi_n = \pm 1$ (lire $\xi_n = 1$ ou $\xi_n = -1$) caractérise relativement à un choix pour ψ_n l'orientation du repère $(O ; \vec{e}_1 ; \dots ; \vec{e}_m ; \vec{e}'_{m+1} ; \dots ; \vec{e}'_n)$

On distinguera deux sens d'orientation, directe et indirecte, par la méthode des trois doigts quand cela est possible (il y a possiblement plusieurs sous-espace euclidien 3D dans un espace nD et ψ_n suit la même méthode d'orientation dans tous ces sous-espaces).

L'opérateur ξ_m caractérise l'orientation d'un objet formé avec m vecteurs (voir l'annexe « *Permutations de vecteurs et orientations d'objets* »). On choisit librement $\xi_m = \pm 1$, mais toute permutation dans l'ordre des vecteurs change le signe de ξ_m .

L'opérateur ξ_3 caractérise ici l'orientation du repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ 3D par rapport à celle de l'espace ψ_3 . Si le vecteur $\vec{k}$ est dans la région où l'on définit l'espace 3D d'orientation directe (en utilisant la règle des trois doigts sur $\vec{i} \wedge \vec{j}$), alors $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ 3D est d'orientation « directoïde », et dans ce cas ξ_3 est du signe qu'on a choisi pour ψ_3 qui caractérise l'orientation directe du produit vectoriel dans l'espace 3D.

Si le vecteur $\vec{k}$ n'est pas dans la région où l'on définit l'espace 3D d'orientation directe (en utilisant $\vec{i} \wedge \vec{j}$), alors $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ 3D est d'orientation « indirectoïde », et dans ce cas ξ_3 est du signe contraire à celui qu'on a choisi pour ψ_3 qui caractérise l'orientation directe du produit vectoriel dans l'espace 3D.

Si le vecteur $\vec{k}$ est dans la région où on a défini l'orientation de l'espace 3D comme indirecte (en utilisant $\vec{i} \wedge \vec{j}$), alors $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ 3D est d'orientation « indirectoïde », et ξ_3 est du signe de celui choisi pour ψ_3 qui caractérise l'orientation indirecte du produit vectoriel dans l'espace 3D.

Si le vecteur $\vec{k}$ n'est pas dans la région où on a défini l'orientation de l'espace 3D comme indirecte (en utilisant $\vec{i} \wedge \vec{j}$), alors $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ 3D est d'orientation « directoïde », et ξ_3 est du signe contraire à celui choisi pour ψ_3 qui caractérise l'orientation indirecte du produit vectoriel dans l'espace 3D.

L'opérateur $\xi_3 = \pm 1$ continue de caractériser ici les orientations de $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ 2D ou 1D.

Pour $n = m > 3$, on ne peut rien visualiser. On se contente de donner les orientations de l'espace nD et de l'objet nD , et on a $\psi_n \cdot \xi_n = \pm 1$

2.3 Forme analytique de $\vec{i} \wedge \vec{j}$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ 3D

On rappelle alors la définition portant sur les paramètres définissant $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ 3D :

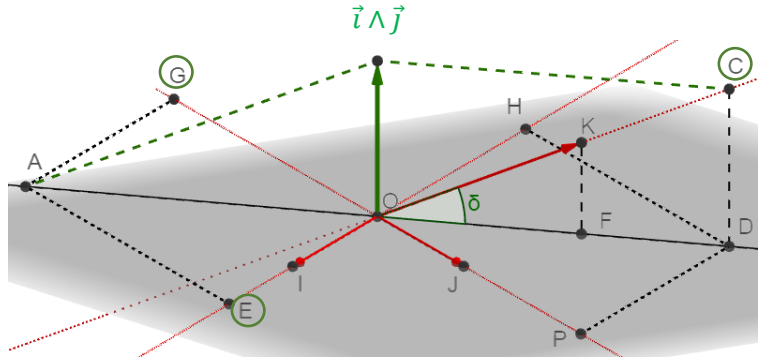
$$\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \sin \delta \neq 0 \text{ OU } \vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j}) 2D$$

Deux vecteurs de l'espace 3D, nuls ou non, peuvent être traduits sur une même origine pour former un plan de l'espace, et le produit nul ou non de ces vecteurs est toujours défini dans la troisième dimension de $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

$$(\psi_3 = 1; \xi_3 = 1) \text{ ou } (\psi_3 = -1; \xi_3 = -1)$$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \overrightarrow{OC} - \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \overrightarrow{OD}$$

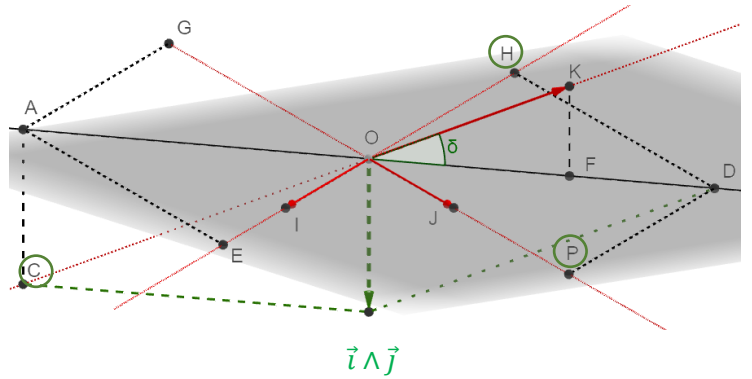
$$\psi_3 \cdot \xi_3 = 1 : (\vec{i} \wedge \vec{j}) \text{ et } \vec{k} \text{ en conjonction}$$



$$(\psi_3 = -1; \xi_3 = 1) \text{ ou } (\psi_3 = 1; \xi_3 = -1)$$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \overrightarrow{OC} - \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \overrightarrow{OD}$$

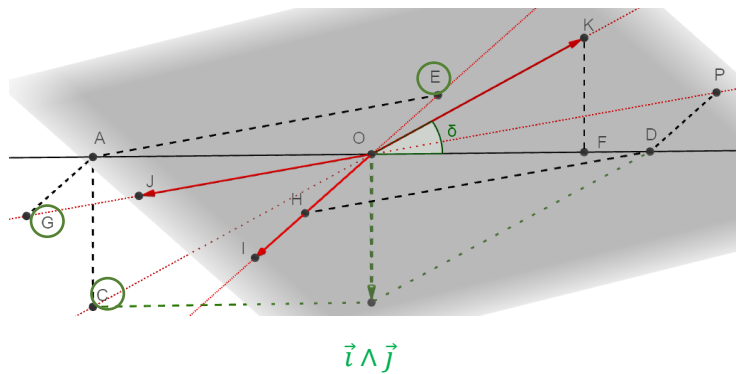
$$\psi_3 \cdot \xi_3 = -1 : (\vec{i} \wedge \vec{j}) \text{ et } \vec{k} \text{ en opposition}$$



$$(\psi_3 = 1; \xi_3 = -1) \text{ ou } (\psi_3 = -1; \xi_3 = 1)$$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \overrightarrow{OC} - \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \overrightarrow{OD}$$

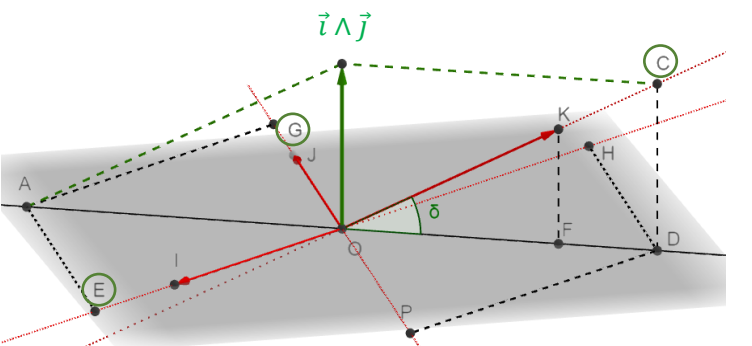
$$\psi_3 \cdot \xi_3 = -1 : (\vec{i} \wedge \vec{j}) \text{ et } \vec{k} \text{ en opposition}$$



$$(\psi_3 = -1; \xi_3 = -1) \text{ ou } (\psi_3 = 1; \xi_3 = 1)$$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \overrightarrow{OC} - \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \overrightarrow{OD}$$

$$\psi_3 \cdot \xi_3 = 1 : (\vec{i} \wedge \vec{j}) \text{ et } \vec{k} \text{ en conjonction}$$

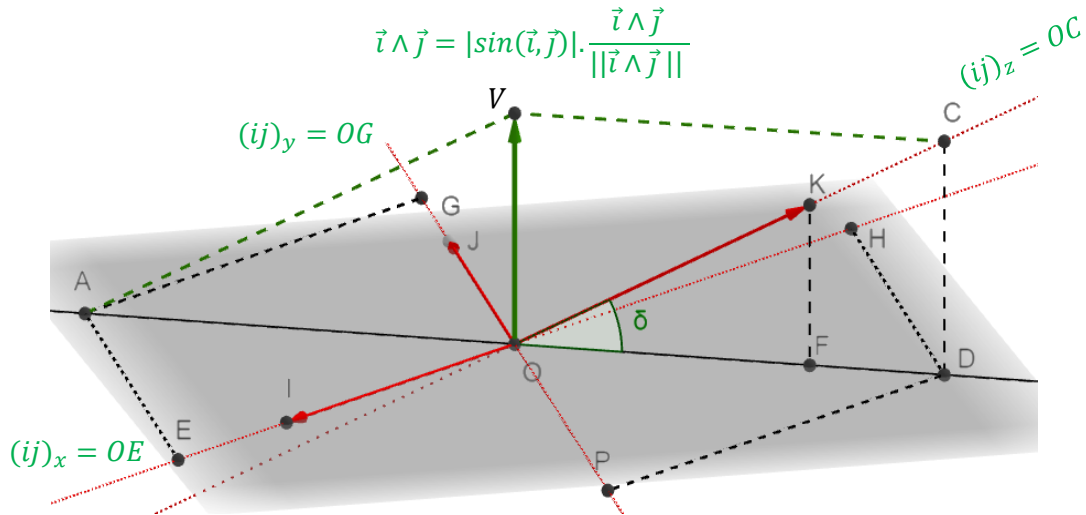


Dans tous les cas on reconnaît que :

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \overrightarrow{OC} - \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \overrightarrow{OD}$$

$$\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \sin \delta \neq 0$$

$\overrightarrow{OF} \neq \vec{0}$, donc δ est défini :



On écrit la forme analytique de $\vec{i} \wedge \vec{j}$ dans $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ telle que :

$$\begin{aligned} \vec{i} \wedge \vec{j} &= (\vec{i} \wedge \vec{j})_x + (\vec{i} \wedge \vec{j})_y + (\vec{i} \wedge \vec{j})_z \\ (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}) &= (O; \vec{i}; \vec{j}) + (O; \vec{i}; \vec{j}) + (O; \vec{k}) = (ij)_x \cdot \vec{i} + (ij)_y \cdot \vec{j} + (ij)_z \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

Concordances logiques des apparences

Dans la figure ci-dessus, la mesure algébrique $OV = ||\vec{i} \wedge \vec{j}|| = |\sin(\vec{i}, \vec{j})|$ est toujours définie positive dans son repère local $(O; \frac{\vec{i} \wedge \vec{j}}{||\vec{i} \wedge \vec{j}||})$. Cependant la coordonnée de $\frac{\vec{i} \wedge \vec{j}}{||\vec{i} \wedge \vec{j}||}$ sur l'axe $(O; \vec{k})$ du repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ dépend de $\psi_3 \cdot \xi_3$.

On écrira donc une mesure algébrique de OV dans $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ qui n'est relative qu'à $\psi_3 \cdot \xi_3$ et $|\sin(\vec{i}, \vec{j})|$ (et pas à un ou plusieurs axes de coordonnées de $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$) :

$$OV = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\sin(\vec{i}, \vec{j})|$$

Si on conserve l'idée que le vecteur unitaire $\vec{k}$ pointe toujours un demi-axe de coordonnées positives, alors on observe dans toutes les figures ci-dessus que dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ les mesures algébriques DC et AC sont du signe de $\psi_3 \cdot \xi_3$ ou du signe de $(ij)_z$

Si $\psi_3 \cdot \xi_3 = 1$ ou $(ij)_z > 0$:

$$OV = DC > 0$$

Si $\psi_3 \cdot \xi_3 = -1$ ou $(ij)_z < 0$:

$$OV = AC < 0$$

Dans le repère $(O; \vec{f}; \vec{k})$, le signe des mesures algébriques DC et AC doit en principe dépendre des mesures algébriques $(ij)_z$ et $\sin\delta$. Mais on a permis, dans notre modèle, que $\sin\delta$ soit positif ou négatif. On écrira donc :

Si $\psi_3 \cdot \xi_3 = 1$ ou $(ij)_z > 0$:

$$DC = (ij)_z \cdot |\sin\delta|$$

Si $\psi_3 \cdot \xi_3 = -1$ ou $(ij)_z < 0$:

$$AC = (ij)_z \cdot |\sin\delta|$$

On écrira donc toujours :

$$(ij)_z = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{|\sin(\vec{i}, \vec{j})|}{|\sin\delta|}$$

Formulation des coordonnées

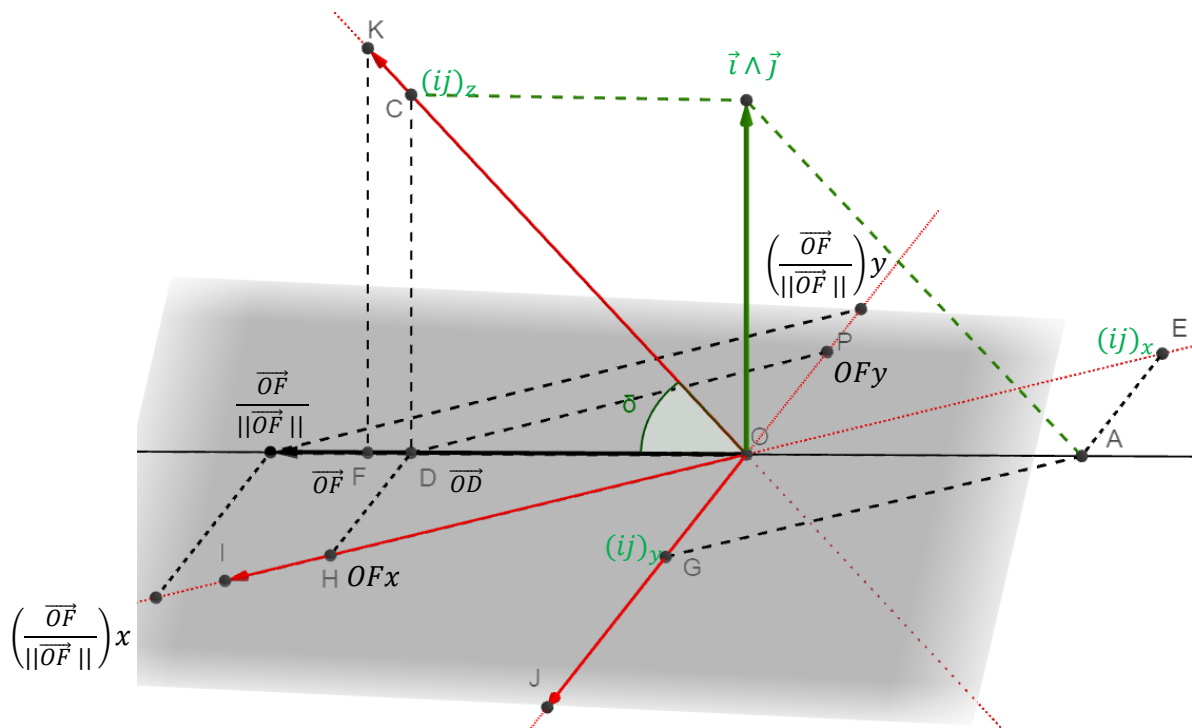
On a donc :

$$\vec{OC} = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{|\sin(\vec{i}, \vec{j})|}{|\sin\delta|} \cdot \vec{k}$$

Soit :

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \left(\frac{|\sin(\vec{i}, \vec{j})|}{|\sin\delta|} \cdot \vec{k} - \vec{OD} \right)$$

On a, avec $\frac{\vec{OF}}{\|\vec{OF}\|} = \frac{\vec{OD}}{\|\vec{OD}\|}$ vecteurs unitaires pointant le même demi-axe de coordonnées positives dans un repère $(O; \frac{\vec{OF}}{\|\vec{OF}\|})$ de la droite (OD) :



On a :

$$\overrightarrow{OD} = \|\overrightarrow{OD}\| \cdot \frac{\overrightarrow{OF}}{\|\overrightarrow{OF}\|}.$$

La norme de $\overrightarrow{OD}$ est par convention une quantité positive ou nulle.

Avec $-\frac{\pi}{2} < \delta < \frac{\pi}{2}$, donc $\cos \delta > 0$, on écrit :

$$\|\overrightarrow{OD}\| = |OC| \cdot \cos \delta = \frac{|\sin(\vec{i}, \vec{j})| \cdot \cos \delta}{|\sin \delta|}$$

$$\overrightarrow{OD} = \frac{|\sin(\vec{i}, \vec{j})| \cdot \cos \delta}{|\sin \delta|} \cdot \frac{\overrightarrow{OF}}{\|\overrightarrow{OF}\|}$$

Avec :

$$\overrightarrow{OD} = \frac{|\sin(\vec{i}, \vec{j})|}{|\sin \delta|} \cdot \cos \delta \cdot \left(\frac{\sin((\vec{i}, \vec{j}) - (\vec{i}, \overrightarrow{OF}))}{\sin(\vec{i}, \vec{j})} \cdot \vec{i} + \frac{\sin(\vec{i}, \overrightarrow{OF})}{\sin(\vec{i}, \vec{j})} \cdot \vec{j} \right)$$

Pour $\frac{\overrightarrow{OF}}{\|\overrightarrow{OF}\|} = \frac{\sin((\vec{i}, \vec{j}) - (\vec{i}, \overrightarrow{OF}))}{\sin(\vec{i}, \vec{j})} \cdot \vec{i} + \frac{\sin(\vec{i}, \overrightarrow{OF})}{\sin(\vec{i}, \vec{j})} \cdot \vec{j}$, voir la démonstration dans l'annexe « Angles et coordonnées ».

On a, avec $\sin((\vec{i}, \vec{j}) - (\vec{i}, \overrightarrow{OF})) = -\sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF})$:

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \left[\frac{|\sin(\vec{i}, \vec{j})|}{|\sin \delta|} \cdot \vec{k} - \frac{|\sin(\vec{i}, \vec{j})|}{|\sin \delta|} \cdot \cos \delta \cdot \left(-\frac{\sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF})}{\sin(\vec{i}, \vec{j})} \cdot \vec{i} + \frac{\sin(\vec{i}, \overrightarrow{OF})}{\sin(\vec{i}, \vec{j})} \cdot \vec{j} \right) \right]$$

Qu'on peut présenter de façon plus commode :

$$\vec{i} \wedge \vec{j} \underset{\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \sin \delta \neq 0}{=} \begin{pmatrix} \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{|\sin(\vec{i}, \vec{j})| \cdot \sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF}) \cdot \cos \delta}{|\sin \delta| \cdot \sin(\vec{i}, \vec{j})} \cdot \vec{i} \\ -\psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{|\sin(\vec{i}, \vec{j})| \cdot \sin(\vec{i}, \overrightarrow{OF}) \cdot \cos \delta}{|\sin \delta| \cdot \sin(\vec{i}, \vec{j})} \cdot \vec{j} \\ \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{|\sin(\vec{i}, \vec{j})|}{|\sin \delta|} \cdot \vec{k} \end{pmatrix}$$

$\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j}) \text{ 2D}$

$\overrightarrow{OF} = \vec{0}$, donc δ n'est pas défini et on a $\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j}) \text{ 2D}$ comme condition décrivant le repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}) \text{ 3D}$. Dans ce cas on a simplement dans $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$:

$$\vec{i} \wedge \vec{j} \underset{\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j}) \text{ 2D}}{=} \begin{pmatrix} 0 \cdot \vec{i} \\ 0 \cdot \vec{j} \\ \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\sin(\vec{i}, \vec{j})| \cdot \vec{k} \end{pmatrix}$$

Note : rappelons que, dans le programme informatique, comme on l'a vu au chapitre 1, on utilise la variable "korto" tel que $\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j}) \text{ 2D} \Leftrightarrow \text{korto} = 0 \Leftrightarrow \text{Perception empirique au début de l'étude}$

$$\vec{k}(O; \vec{i}; \vec{j}) 2D \Leftrightarrow korto = 1 \Leftrightarrow \text{Perception empirique au début de l'étude}$$

On se sert donc des conditions suivantes pour définir $\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j}) 2D$:

$$[korto = 1 \text{ ET } \sin(\vec{i}, \vec{j}) \neq 0] \Leftrightarrow \vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j}) 2D$$

On rappelle que dans tous les cas où δ, γ, μ sont définis, on peut caractériser l'existence de $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}) 3D$ par :

$$\begin{array}{ccc} \sin(\vec{i}, \vec{j}).\sin\delta \neq 0 & \Leftrightarrow & \sin(\vec{j}, \vec{k}).\sin\gamma \neq 0 & \Leftrightarrow & \sin(\vec{k}, \vec{i}).\sin\mu \neq 0 \Rightarrow (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}) 3D \\ \vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j}) 2D & & \vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j}) 2D & & \\ \vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k}) 2D & & \vec{i} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k}) 2D & & \\ \vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{i}) 2D & & \vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{i}) 2D & & \end{array}$$

Et aussi :

$$[\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j}) 2D \text{ ou } \vec{i} \perp (O; \vec{j}; \vec{k}) 2D \text{ ou } \vec{j} \perp (O; \vec{k}; \vec{i}) 2D] \Rightarrow (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}) 3D$$

2.4 Forme analytique de $\vec{j} \wedge \vec{k}$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}) 3D$

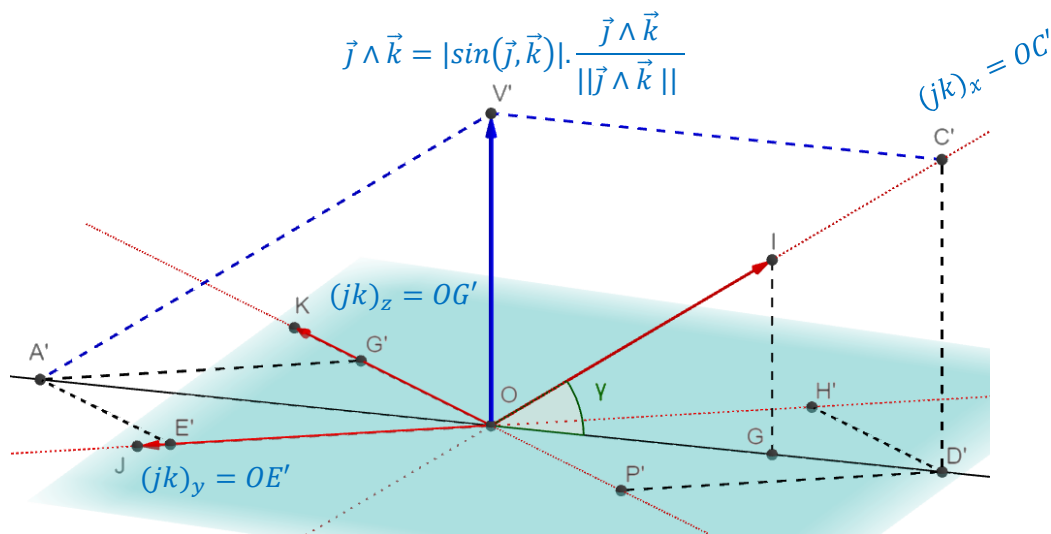
La définition logique de $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}) 3D$ portant sur les variables de $(O; \vec{j}; \vec{k}) 2D$ est :

$$\sin(\vec{j}, \vec{k}).\sin\gamma \neq 0 \text{ OU } \vec{i} \perp (O; \vec{j}; \vec{k}) 2D$$

$$\sin(\vec{j}, \vec{k}).\sin\gamma \neq 0$$

$\vec{OG} \neq \vec{0}$, donc γ est défini et on a $\sin(\vec{j}, \vec{k}).\sin\gamma \neq 0$ comme condition décrivant $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}) 3D$.

On utilise la même disposition de vecteurs. On utilise l'angle $\gamma = (\vec{OG}, \vec{i})$, et on suit les mêmes raisonnements que pour $\vec{i} \wedge \vec{j}$. On prend garde que OC' désigne $(jk)_x$ et non pas $(jk)_z$. De même OG' désigne $(jk)_z$ et non pas $(jk)_y$. De même OE' désigne $(jk)_y$ et non pas $(jk)_x$.



D'où la formule analytique de ce produit vectoriel par un raisonnement analogue à celui ayant établi $\vec{i} \wedge \vec{j}$:

$$\vec{j} \wedge \vec{k} \quad \sin(\vec{j}, \vec{k}) \neq 0 \quad \begin{pmatrix} \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{|\sin(\vec{j}, \vec{k})|}{|\sin \gamma|} \cdot \vec{i} \\ \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{|\sin(\vec{j}, \vec{k})| \cdot \sin(\vec{k}, \vec{OG}) \cdot \cos \gamma}{|\sin \gamma| \cdot \sin(\vec{j}, \vec{k})} \cdot \vec{j} \\ -\psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{|\sin(\vec{j}, \vec{k})| \cdot \sin(\vec{j}, \vec{OG}) \cdot \cos \gamma}{|\sin \gamma| \cdot \sin(\vec{j}, \vec{k})} \cdot \vec{k} \end{pmatrix}$$

Note : on a donc utilisé la formule :

$$\frac{\vec{OG}}{\|\vec{OG}\|} = -\frac{\sin(\vec{k}, \vec{OG})}{\sin(\vec{j}, \vec{k})} \cdot \vec{j} + \frac{\sin(\vec{j}, \vec{OG})}{\sin(\vec{j}, \vec{k})} \cdot \vec{k}$$

Le point E' est situé toujours sur l'axe des abscisses, qui est aussi dans cette formule l'axe à partir duquel on mesure les angles (l'axe sur lequel on superpose mentalement l'axe des cosinus du repère trigonométrique). De même le point G' est situé toujours sur l'axe des ordonnées. C'est donc un faux problème, en considérant la figure ci-dessus, de se demander si E' et G' peuvent être intervertis, puisque tout est défini dans la formule ci-dessus, qui n'utilise pas d'autres réalités géométriques que les mesures entre les vecteurs $\vec{j}, \vec{k}, \vec{OG}$. Si on veut vraiment suivre un procédé déductif, on écrira :

$$\begin{aligned} \frac{\vec{OG}}{\|\vec{OG}\|} &= -\frac{\vec{OE'}}{(o;\vec{j};\vec{k})} - \frac{\vec{OG'}}{(o;\vec{j};\vec{k})} = -\left(-\frac{\sin(\vec{k}, \vec{OG})}{\sin(\vec{j}, \vec{k})} \cdot \vec{j}\right) - \left(\frac{\sin(\vec{j}, \vec{OG})}{\sin(\vec{j}, \vec{k})} \cdot \vec{k}\right) \\ \frac{\vec{OG}}{\|\vec{OG}\|} &= -\frac{\vec{OE'}}{(o;\vec{k};\vec{j})} - \frac{\vec{OG'}}{(o;\vec{k};\vec{j})} = -\left(-\frac{\sin(\vec{j}, \vec{OG})}{\sin(\vec{k}, \vec{j})} \cdot \vec{k}\right) - \left(\frac{\sin(\vec{k}, \vec{OG})}{\sin(\vec{k}, \vec{j})} \cdot \vec{j}\right) = -\left(\frac{\vec{OG'}}{(o;\vec{j};\vec{k})}\right) - \left(\frac{\vec{OE'}}{(o;\vec{j};\vec{k})}\right) \end{aligned}$$

Dont on conclut que les points E' et G' peuvent s'intervertir :

$$\frac{\vec{OE'}}{(o;\vec{j};\vec{k})} = \frac{\vec{OG'}}{(o;\vec{k};\vec{j})} = -\frac{\sin(\vec{k}, \vec{OG})}{\sin(\vec{j}, \vec{k})} \cdot \vec{j} ; \quad \frac{\vec{OG'}}{(o;\vec{j};\vec{k})} = \frac{\vec{OE'}}{(o;\vec{k};\vec{j})} = \frac{\sin(\vec{j}, \vec{OG})}{\sin(\vec{j}, \vec{k})} \cdot \vec{k}$$

... pour désigner toujours les mêmes objets, qui sont ce qu'ils sont indépendamment des repères dans lesquels on les mesure :

$$\frac{\vec{OG}}{\|\vec{OG}\|} = \frac{\vec{OG}}{\|\vec{OG}\|} ; \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{j} \wedge \vec{k} \quad \begin{matrix} (o;\vec{j};\vec{k}) & (o;\vec{k};\vec{j}) \end{matrix}$$

Plus généralement, n'importe quelle disposition spatiale des vecteurs $\vec{j} \wedge \vec{k} ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k}$ dans la figure ci-dessus aurait permis de raisonner en analogie avec le calcul des coordonnées de $\vec{i} \wedge \vec{j}$.

$\vec{i} \perp (o;\vec{j};\vec{k})_{2D}$

$\vec{OG} = \vec{0}$, donc γ n'est pas défini et on a $\sin(\vec{j}, \vec{k}) \neq 0$ et $\vec{i} \perp (o;\vec{j};\vec{k})$ comme condition décrivant $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})_{3D}$. Dans ce cas on a simplement dans $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$:

$$\vec{i} \wedge \vec{k} \quad \vec{i} \perp (o;\vec{j};\vec{k})_{2D} \quad \begin{pmatrix} \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\sin(\vec{j}, \vec{k})| \cdot \vec{i} \\ 0 \cdot \vec{j} \\ 0 \cdot \vec{k} \end{pmatrix}$$

2.6- Produits vectoriels des vecteurs unitaires dans les repères de $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{2D}$

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{2D}$ est un plan, il est pour lui-même un espace 2D .

L'opérateur $\psi_2 = 1$ ou $\psi_2 = -1$ caractérise l'orientation de l'espace 2D.

L'opérateur $\xi_3 = 1$ ou $\xi_3 = -1$ caractérise l'orientation de l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{2D}$. On affecte donc à l'énumération $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$ le signe qu'on veut.

Le produit vectoriel de tout couple de vecteurs unitaires colinéaires est défini, bien que nul selon sa définition géométrique, car le plan est un espace pour définir l'orthogonalité à cette droite. L'orientation du vecteur nul n'a pas de sens.

Le produit vectoriel de tout couple de vecteurs unitaires non colinéaires n'est pas défini dans un espace 2D

On rappelle un jeu de paramètres définissant $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{2D}$:

$$[\sin(\vec{i}, \vec{j}) \neq 0 \text{ ET } \sin\delta = 0] \text{ OU } [\sin(\vec{i}, \vec{j}) = 0 \text{ ET } \sin\delta \neq 0] \text{ OU } \vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{1D}$$

Note : dans le programme informatique, on utilise une instruction commune aux plans et aux droites pour définir l'orthogonalité.

L'instruction $\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{1D}$ est donc définie par $[\sin(\vec{i}, \vec{j}) = 0 \text{ ET } \vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{1D}]$

*

On a avec ce jeu de paramètres :

$$\sin(\vec{i}, \vec{j}) \neq 0 \quad \Rightarrow_{(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{2D}} \begin{pmatrix} \psi_2 = \pm 1 \\ \xi_3 = \pm 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{i} \wedge \vec{j} = \text{indéfini}$$

$$\sin(\vec{i}, \vec{j}) = 0 \quad \Rightarrow_{(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{2D}} \begin{pmatrix} \psi_2 = \pm 1 \\ \xi_3 = \pm 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{0} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} = \text{indéfini} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} = \text{indéfini} \end{pmatrix}$$

$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{0}$ est défini dans les repères $(O; \vec{j}; \vec{k})_{2D}$ et $(O; \vec{k}; \vec{i})_{2D}$

*

$$\sin(\vec{j}, \vec{k}) \neq 0 \quad \Rightarrow_{(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{2D}} \begin{pmatrix} \psi_2 = \pm 1 \\ \xi_3 = \pm 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{j} \wedge \vec{k} = \text{indéfini}$$

$$\sin(\vec{j}, \vec{k}) = 0 \quad \Rightarrow_{(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{2D}} \begin{pmatrix} \psi_2 = \pm 1 \\ \xi_3 = \pm 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \vec{i} \wedge \vec{j} = \text{indéfini} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{0} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} = \text{indéfini} \end{pmatrix}$$

$\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{0}$ est défini dans les repères $(O; \vec{k}; \vec{i})_{2D}$ et $(O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}$

*

$$\sin(\vec{k}, \vec{i}) \neq 0 \quad \Rightarrow_{(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{2D}} \begin{pmatrix} \psi_2 = \pm 1 \\ \xi_3 = \pm 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{k} \wedge \vec{i} = \text{indéfini}$$

$$\sin(\vec{k}, \vec{i}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \psi_2 = \pm 1 \\ \xi_3 = \pm 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \vec{i} \wedge \vec{j} = \text{indéfini} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} = \text{indéfini} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{0} \end{pmatrix}$$

$\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{0}$ est défini dans les repères $(O; \vec{j}; \vec{k})_{2D}$ et $(O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}$

Note : On a noté des implications et pas des équivalences. Pour les cas de nullité du produit vectoriel, par exemple, la réciproque n'est pas toujours vrai : on peut avoir $\vec{j} \wedge \vec{k} = \text{indéfini}$ dans $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}$ et $\sin(\vec{k}, \vec{i}) \neq 0$

2.7 Produits vectoriels des vecteurs unitaires dans les repères de $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{1D}$

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{1D}$ est une droite, il est pour lui-même un espace 1D.

L'opérateur $\psi_1 = 1$ ou $\psi_1 = -1$ caractérise l'orientation de l'espace 1D.

L'opérateur $\xi_3 = 1$ ou $\xi_3 = -1$ caractérise donc l'orientation de $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{1D}$. On affecte donc à l'énumération $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$ le signe qu'on veut.

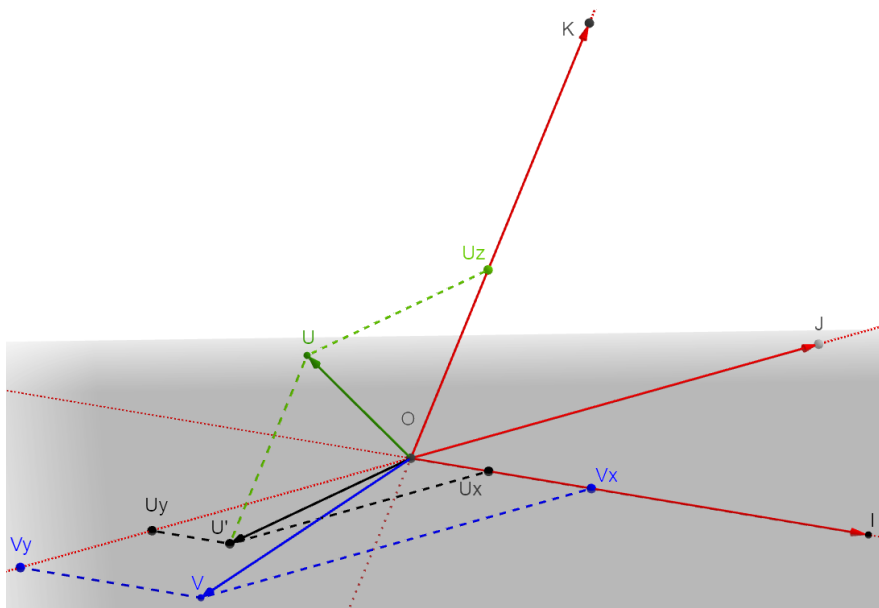
Le produit vectoriel, même nul, de tout couple de vecteurs unitaires n'est pas défini dans un espace 1D.

$$[\sin(\vec{i}, \vec{j}) = 0 \text{ ET } \sin\delta = 0] \Rightarrow \begin{pmatrix} \psi_1 = 1 \\ \xi_3 = \pm 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \vec{i} \wedge \vec{j} = \text{indéfini} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} = \text{indéfini} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} = \text{indéfini} \end{pmatrix}$$

C'est seulement une implication pour ces cas de non-définition du produit vectoriel, car la réciproque n'est pas toujours vrai : on peut avoir par exemple $\vec{k} \wedge \vec{i} = \text{indéfini}$ dans $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{2D}$ et $\sin(\vec{i}, \vec{j}) \neq 0$

2.8 Coordonnées de points et vecteurs dans les repères de l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

Apparences et descriptions

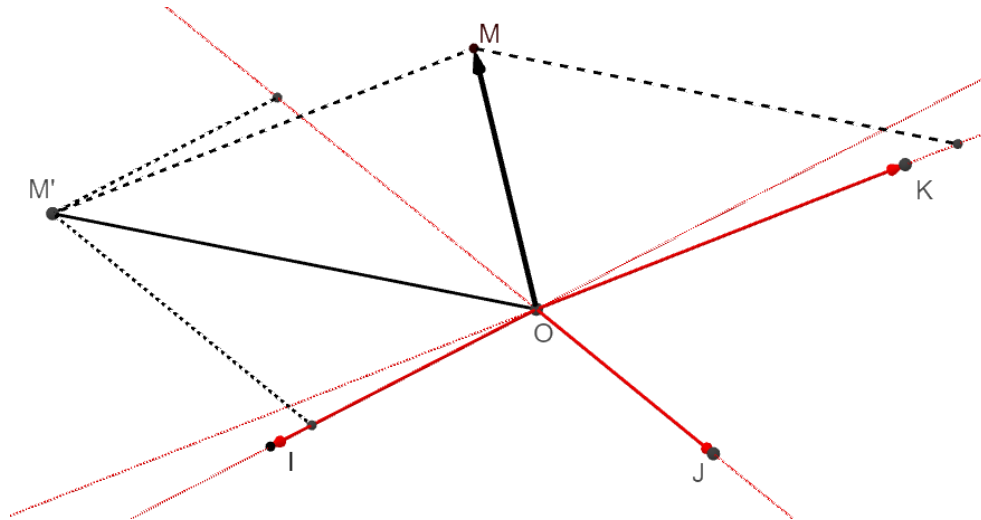


Si la réalité d'un ou plusieurs objets est observable ou décrite dans un espace de dimension n , on doit

prendre les coordonnées de ces objets dans un repère de dimension $m \geq n$. Si on prend les coordonnées de ces objets dans un repère de dimension $m < n$, ce qu'on mesure ne correspond pas aux apparences de ces objets (angles, normes, produit scalaire et vectoriel...).

On voit bien sur la figure ci-dessus que $\vec{u}$ n'est pas $\overrightarrow{OU'}$, on ne mesurera donc pas $||\vec{u}|| \in (0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}$ dans un repère 2D ou 1D de l'objet $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

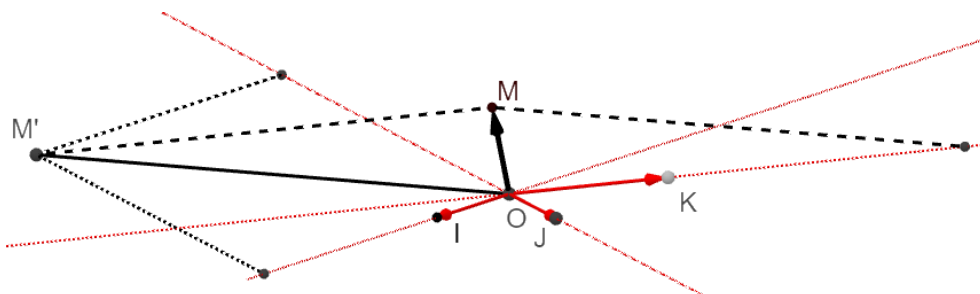
Coordonnées dans le repère $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}$



Les coordonnées dites « cartésiennes » de n'importe quel point de l'espace $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}$ s'obtiennent comme suit : on projette le point M parallèlement à la droite (O, K) dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on obtient alors le point M' . On projette le point M parallèlement à la droite (O, M') sur la droite (O, K) , on obtient le point M_z . On projette le point M' parallèlement à la droite (O, I) sur la droite (O, J) , on obtient le point M_y . On projette le point M' parallèlement à la droite (O, J) sur la droite (O, I) , on obtient le point M_x .

On peut faire le même raisonnement en projetant le point M parallèlement à la droite (O, I) dans le plan $(O, \vec{j}, \vec{k})$, ou parallèlement à la droite (O, J) dans le plan $(O, \vec{k}, \vec{i})$, on obtiendra toujours le même triplet de coordonnées.

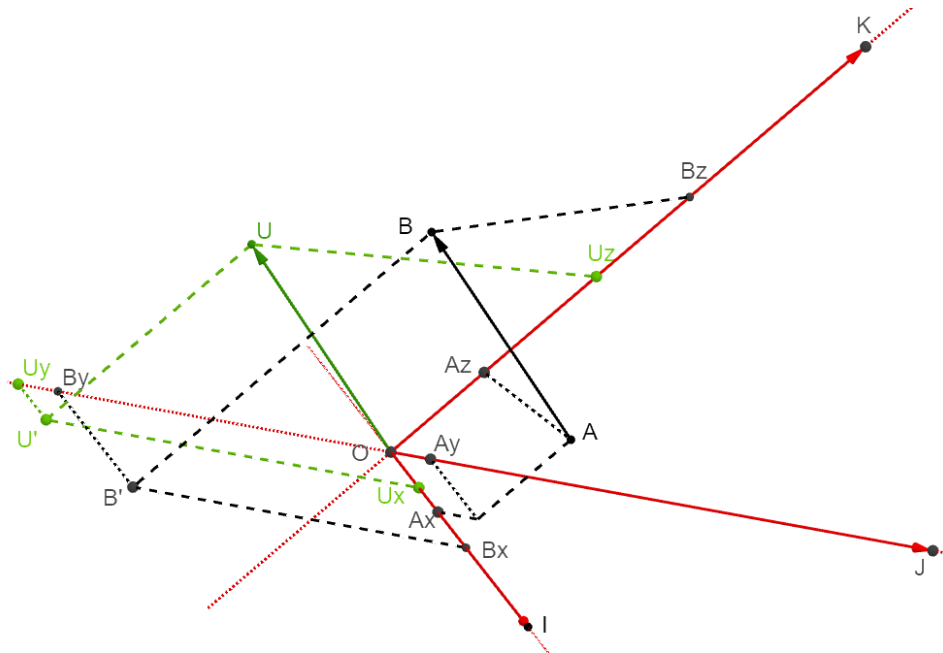
On s'aperçoit que si $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}$ s'écarte d'une configuration orthonormée, les coordonnées sur les axes peuvent devenir très grandes par rapport à la distance $|OM|$ d'un point M mesurée en ligne droite depuis l'origine du repère. Pratiquement, si $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}$ tend infiniment vers un « aspect » de $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{2D}$ ou 1D, les coordonnées de M deviennent infinies pour une distance $|OM|$ finie :



Note : si on avait choisi de dessiner le vecteur $\vec{k}$ avec une apparence deux fois plus longue que le vecteur $\vec{i}$, tout en attribuant la norme 1 à ces deux vecteurs, la méthode de projection de coordonnées par droites parallèles décrite ci-dessus identifierait toujours aussi bien un point de l'espace, mais la distance $|OM|$ devrait être mesurée selon l'apparence de $\vec{k}$ ou de $\vec{i}$, elle ne serait pas intelligible avec les deux simultanément. On peut donc prendre conscience que la mesure $|OM|$ se fait selon une norme et une apparence.

Ci-dessous une autre figure mettant en évidence un vecteur $\overrightarrow{AB}$ construit sur les points A et B et le représentant $\vec{u}$ de $\overrightarrow{AB}$ en O . Le point O est l'origine de tous les repères de $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, et ses coordonnées sont toujours toutes nulles. Le vecteur $\vec{u}$ est le vecteur allant du point O au point u qui s'écrit : $\vec{u} = \overrightarrow{Ou} = (u_x - 0_x) \cdot \vec{i} + (u_y - 0_y) \cdot \vec{j} + (u_z - 0_z) \cdot \vec{k} = u_x \cdot \vec{i} + u_y \cdot \vec{j} + u_z \cdot \vec{k}$.

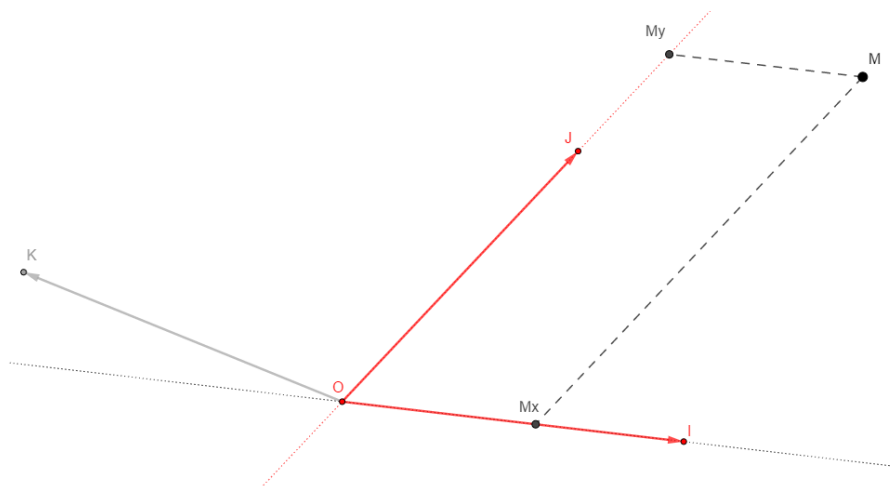
On y constate les compositions vectorielles suivantes : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$, mais aussi en fonction de composantes du plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$: $\vec{u} = \overrightarrow{OU'} + \overrightarrow{OU''} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BxB'} + \overrightarrow{OU''}$



Coordonnées dans les repères $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ 2D

Le programme informatique évaluera quels sont les repères 2D disponibles parmi $(O; \vec{j}; \vec{k})$ 2D, $(O; \vec{i}; \vec{j})$ 2D, $(O; \vec{k}; \vec{i})$ 2D, en fonction de la configuration de l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ 2D.

Dans $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ 2D on ne peut pas donner un triplet de coordonnées cartésiennes $x; y; z$ à un repère 2D, parce que leurs valeurs seraient infinies avec la méthode par projections de droites parallèles employée pour $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ 3D. On supprime donc une dimension, au choix parmi $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$ pour identifier un point du plan, en même temps que la méthode par projections de droites parallèles devient différente. On écrit donc, si on peut supprimer $\vec{k}$ et qu'on se place dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ 2D :



$$\overrightarrow{OMx} = \frac{||\overrightarrow{OM}|| \cdot \sin[(\vec{i}, \vec{j}) - (\vec{i}, \overrightarrow{OM})]}{\sin(\vec{i}, \vec{j})} \cdot \vec{i} ; \quad \overrightarrow{OMy} = \frac{||\overrightarrow{OM}|| \cdot \sin(\vec{i}, \overrightarrow{OM})}{\sin(\vec{i}, \vec{j})} \cdot \vec{j}$$

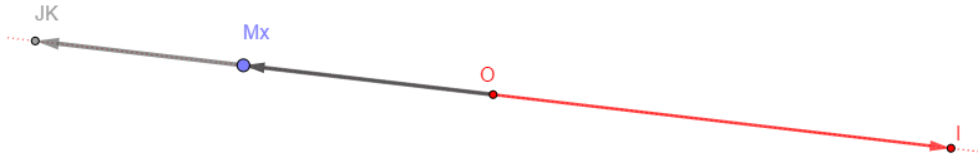
Le vecteur $\vec{k}$, figuré en gris, est toujours présent dans le plan et orienté comme on voudra, mais on ne s'en sert pas. On aurait pu ne pas le dessiner. De même, si on donne les coordonnées de M dans $(O; \vec{j}; \vec{k})$ 2D, on supprime $\vec{i}$. Si on donne les coordonnées de M dans $(O; \vec{k}; \vec{i})$ 2D, on supprime $\vec{j}$.

Coordonnées dans les repères $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ 1D

Les trois repères $(O; \vec{j})$ 1D, $(O; \vec{i})$ 1D, $(O; \vec{k})$ 1D sont disponibles dans la configuration de l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ 1D.

Dans $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ 1D on ne peut pas donner un triplet de coordonnées cartésiennes $x; y; z$. ni une paire $x; y$, à un repère 1D. On supprime donc deux dimensions, au choix parmi $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$ pour identifier un point de l'espace. On peut alors utiliser avec des résultats finis dans la droite la méthode de coordonnées cartésiennes et on écrit donc si on supprime $\vec{k}$ et $\vec{j}$ et qu'on se place dans le repère $(O; \vec{i})$:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OMx} = OM \cdot \vec{i} ; \quad ||\overrightarrow{OM}|| = |OM|$$



Les vecteurs $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont toujours présents sur la droite et orientés comme on voudra, mais on ne s'en sert pas. On aurait pu ne pas les dessiner.

2.9 Produits vectoriels de vecteurs quelconques

Forme géométrique de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dans l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

La forme géométrique de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est toujours définie dans un espace s'il contient assez de dimensions pour modéliser la mesure d'une longueur (définie pour $n \geq 0$), la mesure d'un angle (définie nul ou plat pour $n \geq 1$) et la notion d'orthogonalité à chacun des vecteurs en produit.

On pose que la forme géométrique de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est toujours définie dans $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ 3D si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$. Mais si $\vec{u} = \vec{0}$ et/ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \wedge \vec{v}$ n'est pas défini car l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ n'est pas défini.

On rappelle la forme géométrique de $||\vec{u} \wedge \vec{v}||$ comme l'aire du parallélogramme qui est construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$||\vec{u} \wedge \vec{v}||_{\vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$$

Ci-dessous sa forme analytique dans un repère local $(O; \frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{||\vec{u} \wedge \vec{v}||})$ de l'espace $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ 3D :

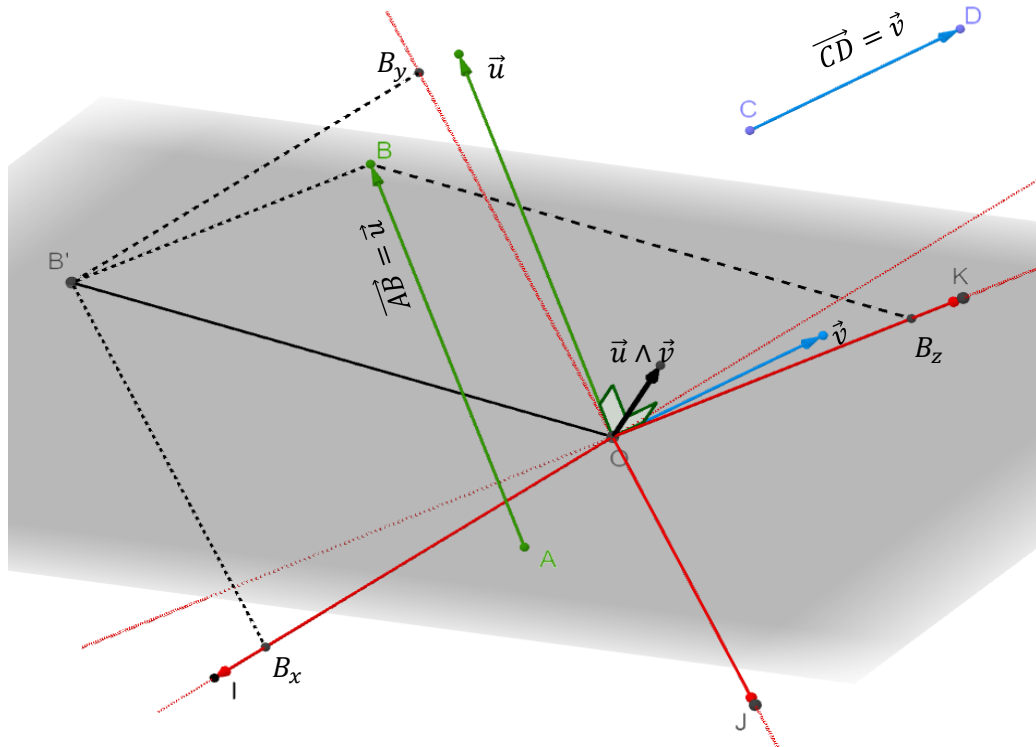
$$\vec{u} \wedge \vec{v}_{\vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot |\sin(\vec{u}, \vec{v})| \cdot \frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{||\vec{u} \wedge \vec{v}||}$$

Forme analytique de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}$

On pose qu'elle n'est pas définie dans $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}$ si $\vec{u} = \vec{0}$ et/ou $\vec{v} = \vec{0}$, car L'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ n'est alors pas défini. Même si cet angle semble absent dans la présentation de l'écriture analytique.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \\ \vec{u} = \vec{0} \text{ et/ou } \vec{v} = \vec{0}}}{=} \text{indéfini}$$

Figure avec $\vec{u}$ le représentant en O d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}$ le représentant en O d'un vecteur $\overrightarrow{CD}$ dans un espace orienté indirect avec $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ directoïde :



Tous les cas de définitions possibles des produits vectoriels des vecteurs de bases ont été traités. Il suffit donc de développer la formule générique.

Avec $\vec{u} (u_x \cdot \vec{i} + u_y \cdot \vec{j} + u_z \cdot \vec{k})$ et $\vec{v} (v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k})$ on a la formule :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (\vec{u} \wedge \vec{v})_x + (\vec{u} \wedge \vec{v})_y + (\vec{u} \wedge \vec{v})_z = (uv)_x \cdot \vec{i} + (uv)_y \cdot \vec{j} + (uv)_z \cdot \vec{k}$$

Dont on explique les mesures algébriques (les coordonnées $(uv)_i$) en la développant :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_x \cdot \vec{i} + u_y \cdot \vec{j} + u_z \cdot \vec{k}) \wedge (v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k})$$

En éliminant les produits vectoriels des vecteurs colinéaires : $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$, et en tenant compte que $\vec{i} \wedge \vec{j} = -(\vec{j} \wedge \vec{i})$ on trouve :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot (\vec{i} \wedge \vec{j}) + (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) \cdot (\vec{j} \wedge \vec{k}) + (u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z) \cdot (\vec{k} \wedge \vec{i})$$

On met en évidence les coordonnées des produits vectoriels des vecteurs de bases :

$$\begin{aligned}
(\vec{i} \wedge \vec{j}) &= (ij)_x \cdot \vec{i} + (ij)_y \cdot \vec{j} + (ij)_z \cdot \vec{k} \\
(\vec{j} \wedge \vec{k}) &= (jk)_x \cdot \vec{i} + (jk)_y \cdot \vec{j} + (jk)_z \cdot \vec{k} \\
(\vec{k} \wedge \vec{i}) &= (ki)_x \cdot \vec{i} + (ki)_y \cdot \vec{j} + (ki)_z \cdot \vec{k}
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\vec{u} \wedge \vec{v} &= (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot [(ij)_x \cdot \vec{i} + (ij)_y \cdot \vec{j} + (ij)_z \cdot \vec{k}] \\
&+ (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) \cdot [(jk)_x \cdot \vec{i} + (jk)_y \cdot \vec{j} + (jk)_z \cdot \vec{k}] \\
&+ (u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z) \cdot [(ki)_x \cdot \vec{i} + (ki)_y \cdot \vec{j} + (ki)_z \cdot \vec{k}]
\end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned}
(\vec{u} \wedge \vec{v})_x &= (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot (ij)_x + (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) \cdot (jk)_x + (u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z) \cdot (ki)_x \\
(\vec{u} \wedge \vec{v})_y &= (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot (ij)_y + (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) \cdot (jk)_y + (u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z) \cdot (ki)_y \\
(\vec{u} \wedge \vec{v})_z &= (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot (ij)_z + (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) \cdot (jk)_z + (u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z) \cdot (ki)_z
\end{aligned}$$

On a donc les composantes :

$$\begin{aligned}
(uv)_x &= (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot (ij)_x + (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) \cdot (jk)_x + (u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z) \cdot (ki)_x \\
(uv)_y &= (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot (ij)_y + (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) \cdot (jk)_y + (u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z) \cdot (ki)_y \\
(uv)_z &= (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot (ij)_z + (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) \cdot (jk)_z + (u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z) \cdot (ki)_z
\end{aligned}$$

Qu'on présente plus clairement :

$$\begin{aligned}
&\vec{u} \wedge \vec{v} \\
&(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \\
&\vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} [(u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot (ij)_x + (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) \cdot (jk)_x + (u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z) \cdot (ki)_x] \cdot \vec{i} \\ [(u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot (ij)_y + (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) \cdot (jk)_y + (u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z) \cdot (ki)_y] \cdot \vec{j} \\ [(u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot (ij)_z + (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) \cdot (jk)_z + (u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z) \cdot (ki)_z] \cdot \vec{k} \end{pmatrix}$$

Les calculs dépendent de nombreux paramètres et se font à l'aide du programme informatique téléchargeable avec le lien en annexe.

Note : on retrouve l'aire du parallélogramme engendrée par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ situés dans un plan, par exemple $(O; \vec{i}; \vec{j})$ 2D avec $\sin(\vec{i}, \vec{j}) = 1$. La formule précédente donne, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ 3D ;

$$\begin{aligned}
\vec{u} \wedge \vec{v} &\underset{\substack{(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{ortho} \\ (\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}}}{=} (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot (ij)_z \cdot \vec{k}
\end{aligned}$$

$(u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x)$ est le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$ 2D dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ 3D. La mesure $(ij)_z = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\sin(\vec{i}, \vec{j})|$ vaut ± 1 . Si le repère orthonormé est d'orientation directe dans un espace d'orientation directe, alors $(ij)_z = 1$.

Dans ce cas particulier de $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé, la valeur absolue du déterminant est l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ pour $(\vec{u}, \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j})$ 2D. De façon générale, si on peut lui conserver une mesure algébrique, on parle d'aire orientée (par le signe, il n'y a pas d'autres raisons).

Le déterminant est un nombre. Il peut être calculé sur des matrices carrées d'autant de coordonnées vectorielles

qu'il y a de dimensions d'espace, s'il est nul la famille de vecteurs sur laquelle il a été calculé est liée.

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{matrix} \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ (\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \end{matrix} \quad ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot |\sin(\vec{u}, \vec{v})| \cdot \frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{||\vec{u} \wedge \vec{v}||}$ est aussi une forme analytique dans le repère $(O; \frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{||\vec{u} \wedge \vec{v}||})_{1D}$. Avec $\frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{||\vec{u} \wedge \vec{v}||}$ vecteur unitaire de l'espace orienté selon ψ , avec $(\vec{u}, \vec{v})$ l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $(O, \vec{u}, \vec{v})_{2D}$ ou $1D$, orienté de la façon dont on voudra, puisque $|\sin(\vec{u}, \vec{v})|$ laisse $\vec{u} \wedge \vec{v}$ suivre toujours le sens de $\frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{||\vec{u} \wedge \vec{v}||}$. Le vecteur produit vectoriel reste à sa place dans l'espace euclidien, quelle que soit l'orientation du repère $3D$ dans lequel on lui donne sa forme géométrique.

Forme analytique de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dans les repères de $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{2D}$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont non colinéaires, il n'y a pas assez de dimensions dans $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{2D}$ pour définir le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ comme orthogonal à $(O; \vec{u}; \vec{v})_{2D}$.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{matrix} (\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{2D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ \vec{u} \neq \lambda \cdot \vec{v} \end{matrix} \quad \text{indéfini}$$

Cependant, l'aire géométrique du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, que l'on identifie aussi à la norme $||\vec{u} \wedge \vec{v}||$ du produit vectoriel, est défini dans un repère $2D$ ou $1D$ par :

$$||\vec{u} \wedge \vec{v}|| = \begin{matrix} \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \end{matrix} \quad ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$$

Et par une forme analytique propre à un repère $2D$ ou $1D$:

$$||\vec{u} \wedge \vec{v}|| = \begin{matrix} \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \end{matrix} \quad |\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x)|$$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont colinéaires, il y a assez de dimensions dans $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{2D}$ pour définir $\vec{u} \wedge \vec{v}$ comme orthogonal à $(O; \vec{u}; \vec{v})_{1D}$ (qui est la droite (OUV)) :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{matrix} (\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{2D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ \vec{u} = \lambda \cdot \vec{v} \end{matrix} \quad \vec{0}$$

Et si $(\vec{u}, \vec{v})$ n'est pas défini :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \begin{matrix} (\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{2D} \\ \vec{u} = \vec{0} \text{ et/ou } \vec{v} = \vec{0} \end{matrix} \quad \text{indéfini}$$

Pour deux vecteurs non nuls mesurés, par exemple dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}$:

$$\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v} \Leftrightarrow (u_x \cdot \vec{i} + u_y \cdot \vec{j}) = \lambda \cdot (v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j}) \Leftrightarrow \frac{u_x}{v_x} = \frac{u_y}{v_y} = \lambda \Leftrightarrow u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x = 0$$

La quantité $u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x$ est le déterminant de deux vecteurs dont les coordonnées sont prises dans un repère du plan.

Le déterminant dans un espace de dimension n évalue si deux vecteurs dans un espace de dimension 2 sont liés dans une droite (colinéaires) ou libres dans un plan, ou que trois vecteurs dans un espace de dimension

3 sont liés dans un plan (coplanaires) ou libres dans un volume, ou que 4 vecteurs dans un espace de dimension 4 sont liés dans un volume ou libres dans un objet 4D, etc. Son usage est donc d'une portée bien plus générale que l'évaluation de la colinéarité.

Si l'on veut évaluer dans un volume si deux vecteurs sont colinéaires avec des coordonnées 3D, On évalue la triple condition $\frac{u_x}{v_x} = \frac{u_y}{v_y} = \frac{u_z}{v_z}$ qu'on peut réécrire en annulant l'indétermination de la division par zéro si certaines coordonnées sont à zéro :

$$[(u_x \cdot v_y = u_y \cdot v_x) \text{ ET } (u_y \cdot v_z = u_z \cdot v_y) \text{ ET } (u_x \cdot v_z = u_z \cdot v_x)] \Leftrightarrow \vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}$$

Ce qui revient à évaluer dans les plans $(O; \vec{i}; \vec{j})$, $(O; \vec{j}; \vec{k})$, $(O; \vec{k}; \vec{i})$ trois déterminants de couples de vecteurs formés sur les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Forme analytique de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dans les repères de $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ 1D

Quels que soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ il n'y a pas assez de dimensions dans $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ 1D pour définir $\vec{u} \wedge \vec{v}$ comme orthogonal aux vecteurs colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{1D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}}{=} \text{indéfini}$$

Et si $(\vec{u}, \vec{v})$ n'est pas défini :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{1D} \\ \vec{u} = \vec{0} \text{ et/ou } \vec{v} = \vec{0}}}{=} \text{indéfini}$$

2.10 Produit scalaire

Forme géométrique de $\vec{u} \boxtimes \vec{v}$ dans l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

$\vec{u} \boxtimes \vec{v}$ est un nombre, $\vec{u} \boxtimes \vec{v}$ est défini dans toutes les dimensions supérieures à 1 de $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. L'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ n'est pas défini si $\vec{u} = \vec{0}$ et/ou $\vec{v} = \vec{0}$.

$\vec{u} \boxtimes \vec{v}$ est donc défini pour $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$:

$$\vec{u} \boxtimes \vec{v} \underset{\vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}{=} ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Forme analytique de $\vec{u} \boxtimes \vec{v}$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ 3D

De même, la forme analytique de $\vec{u} \boxtimes \vec{v}$ est définie pour $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$. On rappelle ici les mêmes remarques que dans « apparences et descriptions » : si la réalité des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est observable ou décrite dans un espace de dimension n , on doit prendre les coordonnées de ces vecteurs dans un repère de dimension $m \geq n$. Si on prend les coordonnées de ces vecteurs dans un repère de dimension $m < n$, ce qu'on mesure ne correspond pas aux apparences.

Avec $\vec{u} (u_x \cdot \vec{i}, u_y \cdot \vec{j}, u_z \cdot \vec{k})$ et $\vec{v} (v_x \cdot \vec{i}, v_y \cdot \vec{j}, v_z \cdot \vec{k})$, on a :

$$\begin{aligned}
\vec{u} \boxtimes \vec{v} &= (u_x \cdot \vec{i} + u_y \cdot \vec{j} + u_z \cdot \vec{k}) \boxtimes (v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}) \\
&= u_x \cdot v_x \cdot \vec{i} \boxtimes \vec{i} + u_x \cdot v_y \cdot \vec{i} \boxtimes \vec{j} + u_x \cdot v_z \cdot \vec{i} \boxtimes \vec{k} + u_y \cdot v_x \cdot \vec{j} \boxtimes \vec{i} + u_y \cdot v_y \cdot \vec{j} \boxtimes \vec{j} + u_y \cdot v_z \cdot \vec{j} \boxtimes \vec{k} \\
&\quad + u_z \cdot v_x \cdot \vec{k} \boxtimes \vec{i} + u_z \cdot v_y \cdot \vec{k} \boxtimes \vec{j} + u_z \cdot v_z \cdot \vec{k} \boxtimes \vec{k}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\vec{u} \boxtimes \vec{v} \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}}}{=} \begin{pmatrix} u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z + \cos(\vec{i}, \vec{j}) \cdot (u_x \cdot v_y + u_y \cdot v_x) \\ + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (u_y \cdot v_z + u_z \cdot v_y) + \cos(\vec{k}, \vec{i}) \cdot (u_z \cdot v_x + u_x \cdot v_z) \end{pmatrix}$$

Et si $(\vec{u}, \vec{v})$ n'est pas défini :

$$\vec{u} \boxtimes \vec{v} \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \\ \vec{u} = \vec{0} \text{ et/ou } \vec{v} = \vec{0}}}}{=} \text{indéfini}$$

Forme analytique de $\vec{u} \boxtimes \vec{v}$ dans un repère de $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{2D}$

On met certaines coordonnées à zéro dans la formule précédente en fonction des repères :

$$\vec{u} \boxtimes \vec{v} \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}}}{=} u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + \cos(\vec{i}, \vec{j}) \cdot (u_x \cdot v_y + u_y \cdot v_x)$$

$$\vec{u} \boxtimes \vec{v} \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{j}; \vec{k})_{2D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}}}{=} u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (u_y \cdot v_z + u_z \cdot v_y)$$

$$\vec{u} \boxtimes \vec{v} \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{k}; \vec{i})_{2D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}}}{=} u_x \cdot v_x + u_z \cdot v_z + \cos(\vec{k}, \vec{i}) \cdot (u_z \cdot v_x + u_x \cdot v_z)$$

Et si $(\vec{u}, \vec{v})$ n'est pas défini :

$$\vec{u} \boxtimes \vec{v} \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \\ \vec{u} = \vec{0} \text{ et/ou } \vec{v} = \vec{0}}}}{=} \text{indéfini}$$

Forme analytique de $\vec{u} \boxtimes \vec{v}$ dans un repère de $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{1D}$

On met certaines coordonnées à zéro dans la formule précédente en fonction des repères, tous les angles sont nuls ou plats, on peut définir le produit scalaire en 1D à partir de cette restriction du concept d'angle, puisque la norme des vecteurs est définie en toutes dimensions :

$$\vec{u} \boxtimes \vec{v} \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i})_{1D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}}}{=} u_x \cdot v_x ; \vec{u} \boxtimes \vec{v} \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{j})_{1D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}}}{=} u_y \cdot v_y ; \vec{u} \boxtimes \vec{v} \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{k})_{1D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}}}{=} u_z \cdot v_z$$

Et si $(\vec{u}, \vec{v})$ n'est pas défini :

$$\vec{u} \boxtimes \vec{v} \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{1D} \\ \vec{u} = \vec{0} \text{ et/ou } \vec{v} = \vec{0}}}}{=} \text{indéfini}$$

2.11 Normes de vecteurs dans les repères de l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

Le programme informatique liste les repères disponibles dans l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ en fonction des paramètres. On fait les calculs en permettant à l'observateur de choisir deux vecteurs, $\vec{u}$ et $\vec{v}$, construits sur les points A,B,C,D tels que :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{CD}$$

On lui demandera, pour simplifier, de les choisir tous deux dans un même repère.

Dans $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{1D}$ on trouvera toujours les repères $(O; \vec{i})_{1D}$, $(O; \vec{j})_{1D}$, $(O; \vec{k})_{1D}$. Dans ce cas on demande à l'observateur dans quel repère il désire donner les coordonnées de ses points de l'espace.

$$\overrightarrow{AB} \xrightarrow{\overrightarrow{AB} \in (O; \vec{i})_{1D}} = (Bx - Ax) \cdot \vec{i} = (Ax Bx) \cdot \vec{i} \quad ; \quad \overrightarrow{CD} \xrightarrow{\overrightarrow{CD} \in (O; \vec{i})_{1D}} = (Dx - Cx) \cdot \vec{i} = (Cx Dx) \cdot \vec{i}$$

Ou

$$\overrightarrow{AB} \xrightarrow{\overrightarrow{AB} \in (O; \vec{j})_{1D}} = (By - Ay) \cdot \vec{j} = (Ay By) \cdot \vec{j} \quad ; \quad \overrightarrow{CD} \xrightarrow{\overrightarrow{CD} \in (O; \vec{j})_{1D}} = (Dy - Cy) \cdot \vec{j} = (Cy Dy) \cdot \vec{j}$$

Ou

$$\overrightarrow{AB} \xrightarrow{\overrightarrow{AB} \in (O; \vec{k})_{1D}} = (Bz - Az) \cdot \vec{k} = (Az Bz) \cdot \vec{k} \quad ; \quad \overrightarrow{CD} \xrightarrow{\overrightarrow{CD} \in (O; \vec{k})_{1D}} = (Dz - Cz) \cdot \vec{k} = (Cz Dz) \cdot \vec{k}$$

Dans $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{2D}$ Le programme informatique évaluera quels sont les repères 2D disponibles parmi $(O; \vec{j}; \vec{k})_{2D}$, $(O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}$, $(O; \vec{k}; \vec{i})_{2D}$, en fonction de la configuration de l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. Bien que cet objet contienne aussi les trois repères 1D, il n'y a pas d'intérêt à recommencer la modélisation précédente. On demandera à l'observateur de situer ses quatre points dans un même repère (disponible) :

$$\overrightarrow{AB} \xrightarrow{\overrightarrow{AB} \in (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}} = (Ax Bx) \cdot \vec{i} + (Ay By) \cdot \vec{j} \quad ; \quad \overrightarrow{CD} \xrightarrow{\overrightarrow{CD} \in (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}} = (Cx Dx) \cdot \vec{i} + (Cy Dy) \cdot \vec{j}$$

Ou

$$\overrightarrow{AB} \xrightarrow{\overrightarrow{AB} \in (O; \vec{j}; \vec{k})_{2D}} = (Ay By) \cdot \vec{j} + (Az Bz) \cdot \vec{k} \quad ; \quad \overrightarrow{CD} \xrightarrow{\overrightarrow{CD} \in (O; \vec{j}; \vec{k})_{2D}} = (Cy Dy) \cdot \vec{j} + (Cz Dz) \cdot \vec{k}$$

Ou

$$\overrightarrow{AB} \xrightarrow{\overrightarrow{AB} \in (O; \vec{k}; \vec{i})_{2D}} = (Az Bz) \cdot \vec{k} + (Ax Bx) \cdot \vec{i} \quad ; \quad \overrightarrow{CD} \xrightarrow{\overrightarrow{CD} \in (O; \vec{k}; \vec{i})_{2D}} = (Cz Dz) \cdot \vec{k} + (Cx Dx) \cdot \vec{i}$$

L'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}$ est lui-même un repère. Bien qu'il contienne aussi les trois repères 1D et les trois repères 2D, il n'y a pas d'intérêt à recommencer les deux modélisations précédentes. On demandera de situer les quatre points dans ce repère 3D :

$$\overrightarrow{AB} \xrightarrow{\overrightarrow{AB} \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}} = (Ax Bx) \cdot \vec{i} + (Ay By) \cdot \vec{j} + (Az Bz) \cdot \vec{k}$$

$$\overrightarrow{CD} \xrightarrow{\overrightarrow{CD} \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}} = (Cx Dx) \cdot \vec{i} + (Cy Dy) \cdot \vec{j} + (Cz Dz) \cdot \vec{k}$$

Pour un peu plus de légèreté dans la présentation, on donne maintenant les formules en notant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$.

Normes de vecteurs dans l'objet $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$

Les normes des vecteurs sont définies dans toutes les dimensions de $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$, et même si $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ n'existe pas (pour $n = 0$).

Normes de vecteurs dans les repères de $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ 1D

On rappelle que ces repères sont définis par les paramètres tels que : $\sin(\vec{i}, \vec{j}) = 0$ ET $\sin\delta = 0$

On a simplement :

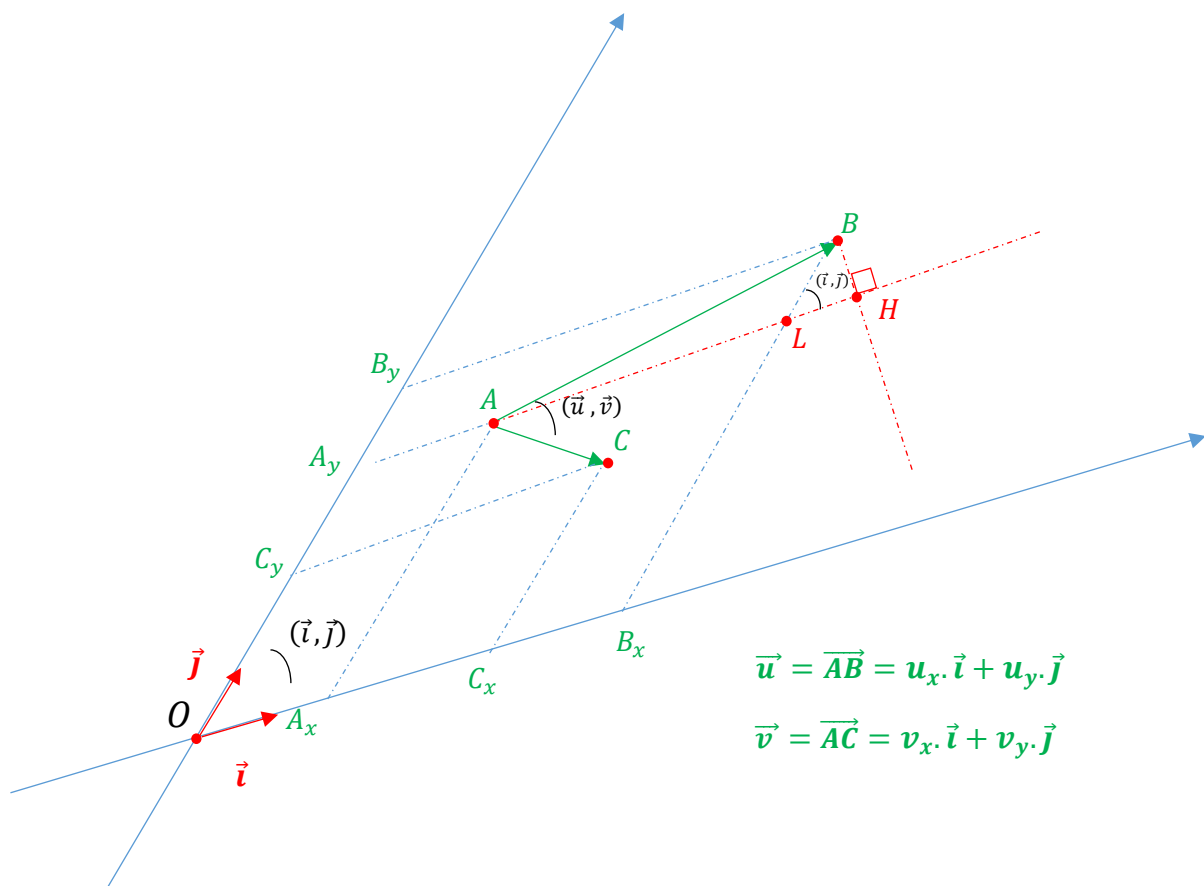
$$||\vec{u}'||_{\vec{u} \in (O; \vec{i})_{1D}} = |u_x| ; ||\vec{u}'||_{\vec{u} \in (O; \vec{j})_{1D}} = |u_y| ; ||\vec{u}'||_{\vec{u} \in (O; \vec{k})_{1D}} = |u_z|$$

Normes de vecteurs dans les repères de $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ 2D

On rappelle que ces repères sont définis par les paramètres tels que :

$$[\sin(\vec{i}, \vec{j}) \neq 0 \text{ ET } \sin\delta = 0] \text{ OU } [\sin(\vec{i}, \vec{j}) = 0 \text{ et } \sin\delta \neq 0] \text{ OU } \vec{k} \perp (O ; \vec{i} ; \vec{j})_{1D}$$

On raisonne sur la figure suivante :



Note : Le repère du plan est orienté par le sens de lecture d'un angle de référence associé à un signe. On mesure donc un angle en superposant implicitement la direction et le sens du vecteur unitaire de l'axe des cosinus d'un repère trigonométrique sur la direction et le sens des premiers vecteurs nommés dans chaque lecture d'angle, tout en respectant une orientation du repère du plan. Ce sont les mesures algébriques données aux écartements entre vecteurs qui donnent une orientation, elles ne changent pas si l'observateur effectue ses lectures en sens contraires en se déplaçant dans l'espace de part et d'autre du plan.

On donne $\|\vec{u}\|_{\vec{u} \in (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}}$ avec les composantes u_x et u_y dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ par un raisonnement géométrique. La norme est (conventionnellement) la solution positive ou nulle d'une racine carrée :

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\|_{\vec{u} \in (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}} &= \|u_x \cdot \vec{i} + u_y \cdot \vec{j}\| = (AH^2 + BH^2)^{\frac{1}{2}} = [(AL + LH)^2 + BH^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= [(u_x + u_y \cdot \cos(\vec{i}, \vec{j}))^2 + (u_y \cdot \sin(\vec{i}, \vec{j}))^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= (u_x^2 + u_y^2 + 2u_x \cdot u_y \cdot \cos(\vec{i}, \vec{j}))^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

On peut aussi l'obtenir en distribuant le produit scalaire sur les vecteurs unitaires (toujours défini puisque ces vecteurs sont non nuls) dans l'identité remarquable $(u_x \cdot \vec{i} + u_y \cdot \vec{j})^2$:

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\|_{\vec{u} \in (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}} &= [(u_x \cdot \vec{i} + u_y \cdot \vec{j})^2]^{\frac{1}{2}} = (u_x^2 \cdot \vec{i} \boxtimes \vec{i} + u_y^2 \cdot \vec{j} \boxtimes \vec{j} + 2 \cdot u_x \cdot u_y \cdot \vec{i} \boxtimes \vec{j})^{\frac{1}{2}} \\ &= (u_x^2 + u_y^2 + 2u_x \cdot u_y \cdot \cos(\vec{i}, \vec{j}))^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Note : cette formule est bien positive ou nulle quelle que soit la mesure $(\vec{i}, \vec{j})$ comme on le montre avec $\cos^2(\vec{i}, \vec{j}) \leq 1$:

$$\begin{aligned} u_x^2 + u_y^2 + 2u_x \cdot u_y \cdot \cos(\vec{i}, \vec{j}) &\geq u_x^2 + u_y^2 \cdot \cos^2(\vec{i}, \vec{j}) + 2u_x \cdot u_y \cdot \cos(\vec{i}, \vec{j}) \\ &= [u_x + u_y \cdot \cos(\vec{i}, \vec{j})]^2 \geq 0 \end{aligned}$$

On formule de la même façon :

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\|_{\vec{u} \in (O; \vec{j}; \vec{k})_{2D}} &= (u_y^2 + u_z^2 + 2u_y \cdot u_z \cdot \cos(\vec{j}, \vec{k}))^{\frac{1}{2}} \\ \|\vec{u}\|_{\vec{u} \in (O; \vec{k}; \vec{i})_{2D}} &= (u_z^2 + u_x^2 + 2u_z \cdot u_x \cdot \cos(\vec{k}, \vec{i}))^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Normes de vecteurs dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}$

On rappelle que ce repère est défini par les paramètres tel que :

$$\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \sin \delta \neq 0 \text{ OU } \vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}$$

On donne $\|\vec{u}\|_{\vec{u} \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}}$ en s'aidant du résultat précédemment acquis et en distribuant à nouveau le produit scalaire (qui commute, rappelons-le : $\vec{i} \boxtimes \vec{k} = \vec{k} \boxtimes \vec{i}$ parce que $\cos(\vec{k}, \vec{i}) = \cos(\vec{i}, \vec{k})$) :

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\|_{\vec{u} \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}} &= [(u_x \cdot \vec{i} + u_y \cdot \vec{j}) + u_z \cdot \vec{k}]^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= [(u_x \cdot \vec{i} + u_y \cdot \vec{j}) \boxtimes (u_x \cdot \vec{i} + u_y \cdot \vec{j}) + u_z^2 \cdot \vec{k} \boxtimes \vec{k} + 2 \cdot u_z \cdot (u_x \cdot \vec{i} + u_y \cdot \vec{j}) \boxtimes \vec{k}]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Avec $(u_x \cdot \vec{i} + u_y \cdot \vec{j}) \boxtimes \vec{k} = u_x \cdot \vec{i} \boxtimes \vec{k} + u_y \cdot \vec{j} \boxtimes \vec{k} = u_x \cdot \cos(\vec{k}, \vec{i}) + u_y \cdot \cos(\vec{j}, \vec{k})$, on a :

$$\|\vec{u}\|_{\vec{u} \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}} = [\|u_x \cdot \vec{i} + u_y \cdot \vec{j}\|^2 + u_z^2 + 2 \cdot u_z \cdot [u_x \cdot \cos(\vec{k}, \vec{i}) + u_y \cdot \cos(\vec{j}, \vec{k})]]^{\frac{1}{2}}$$

Avec $\|u_x \cdot \vec{i} + u_y \cdot \vec{j}\|^2 = u_x^2 + u_y^2 + 2u_x \cdot u_y \cdot \cos(\vec{i}, \vec{j})$, on a donc :

$$||\vec{u}||_{\vec{u} \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}} = [u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + 2u_x u_y \cos(\vec{i}, \vec{j}) + 2u_z u_y \cos(\vec{j}, \vec{k}) + 2u_z u_x \cos(\vec{k}, \vec{i})]^{\frac{1}{2}}$$

On rappelle que les angles $(\vec{i}, \vec{j})$, $(\vec{j}, \vec{k})$, $(\vec{k}, \vec{i})$ ont été déterminés dans le chapitre 1 dans toutes les configurations de l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. De même :

$$||\vec{v}||_{\vec{v} \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}} = [v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 + 2v_x v_y \cos(\vec{i}, \vec{j}) + 2v_z v_y \cos(\vec{j}, \vec{k}) + 2v_z v_x \cos(\vec{k}, \vec{i})]^{\frac{1}{2}}$$

La norme de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est donnée de la même façon. Elle est définie si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$. On reprend la notation (uv) des coordonnées d'un vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$, que l'on connaît maintenant en fonction des coordonnées des produits vectoriels des vecteurs unitaires et de celles des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Il est inutile de donner ici l'expression complète développée.

Avec :

$$\vec{u} \wedge \vec{v}_{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}} = (uv)_x \cdot \vec{i} + (uv)_y \cdot \vec{j} + (uv)_z \cdot \vec{k}$$

On a la norme de $\vec{u} \wedge \vec{v}$, qui est géométriquement la valeur absolue de l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans un espace de dimension 3, mesuré dans un repère de dimension 3, aux axes orientés de façon quelconque, l'ensemble du repère étant d'orientation quelconque relativement à un choix d'orientation de l'espace. Il est nécessaire que les vecteurs unitaires du repère soient de mêmes longueurs apparentes pour que les mesures des objets calculés correspondent à leurs apparences (voir annexe équations d'objets et apparences) :

$$||\vec{u} \wedge \vec{v}||_{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}} = [(uv)_x^2 + (uv)_y^2 + (uv)_z^2 + 2(uv)_x (uv)_y \cos(\vec{i}, \vec{j}) + 2(uv)_z (uv)_y \cos(\vec{j}, \vec{k}) + 2(uv)_z (uv)_x \cos(\vec{k}, \vec{i})]^{\frac{1}{2}}$$

2.12 Détermination de l'angle non orienté $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|$ entre vecteurs quelconques

La forme géométrique du produit vectoriel est la surface du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Avec $\vec{u} \wedge \vec{v}_{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}} = ||\vec{u} \wedge \vec{v}|| \cdot \frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{||\vec{u} \wedge \vec{v}||}$, on a cette surface :

$$||\vec{u} \wedge \vec{v}||_{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$$

L'unité de surface est celle des vecteurs unitaires exprimée au carré.

$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|$ dans $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}$

On a :

$$\cos(\vec{u}, \vec{v})_{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||}$$

$|\sin(\vec{u}, \vec{v})|$ est défini par $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sous condition $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$:

$$|\sin(\vec{u}, \vec{v})| \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}}}{=} \frac{||\vec{u} \wedge \vec{v}||}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||}$$

$|\sin(\vec{u}, \vec{v})|$ dans $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{2D}$

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{2D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}}}{=} \frac{\vec{u} \boxtimes \vec{v}}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||}$$

Note : on rappelle l'équivalence entre l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{2D}$ et les repères 2D qu'il contient :
 $(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{2D} \Leftrightarrow (\vec{u}; \vec{v}) \in [(O; \vec{i}; \vec{j})_{2D} \text{ ou } (O; \vec{j}; \vec{k})_{2D} \text{ ou } (O; \vec{k}; \vec{i})_{2D}]$.

$|\sin(\vec{u}, \vec{v})|$ est défini par le produit vectoriel comme angle nul ou plat par $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sous condition $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}$:

$$|\sin(\vec{u}, \vec{v})| \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{2D} \\ \vec{u} = \lambda \cdot \vec{v} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}}}{=} \frac{||\vec{u} \wedge \vec{v}||}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||} = 0$$

$$|\sin(\vec{u}, \vec{v})| \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{2D} \\ \vec{u} \neq \lambda \cdot \vec{v} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}}}{=} \text{indéfini par le produit vectoriel}$$

Cependant il est évident que toutes les mesures de $(\vec{u}, \vec{v})$ existent en 2D pour $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, nous verrons plus loin à l'article « Détermination de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ entre vecteurs quelconques » comment les mesurer.

$|\sin(\vec{u}, \vec{v})|$ dans $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{1D}$

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{1D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}}}{=} \frac{\vec{u} \boxtimes \vec{v}}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||}$$

Note : on rappelle l'équivalence entre l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{1D}$ et les repères 1D qu'il contient :
 $(\vec{u}, \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{1D} \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) \in [(O; \vec{i})_{1D} \text{ ou } (O; \vec{j})_{1D} \text{ ou } (O; \vec{k})_{1D}]$.

$|\sin(\vec{u}, \vec{v})|$ n'est pas défini par $\vec{u} \wedge \vec{v}$:

$$|\sin(\vec{u}, \vec{v})| \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{1D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}}}{=} \text{indéfini par le produit vectoriel}$$

Idem que précédemment pour déterminer plus loin la mesure $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ ou π par d'autres moyens. On a maintenant la connaissance conjointe de $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ et de $|\sin(\vec{u}, \vec{v})|$ quand ils sont définis dans toutes les dimensions de $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. Ces équations ne nous permettent donc pas d'orienter $(\vec{u}, \vec{v})$, à cause de la valeur absolue sur $\sin(\vec{u}, \vec{v})$, pour mettre $(\vec{u}, \vec{v})$ en cohérence avec les orientations des plans de $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

2.13 Détermination de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ entre vecteurs quelconques

$(\vec{u}, \vec{v})$ dans les repères de $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ 1D

Figure avec $(O; \vec{i})$ 1D



$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i})_{1D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}}}{=} \frac{\vec{u} \boxtimes \vec{v}}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||} = \frac{u_x \cdot v_x}{|u_x \cdot v_x|}$$

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{j})_{1D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}}}{=} \frac{\vec{u} \boxtimes \vec{v}}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||} = \frac{u_y \cdot v_y}{|u_y \cdot v_y|}$$

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{k})_{1D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}}}{=} \frac{\vec{u} \boxtimes \vec{v}}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||} = \frac{u_z \cdot v_z}{|u_z \cdot v_z|}$$

$\sin(\vec{u}, \vec{v})$ se définit par la géométrie de $\vec{u}$; $\vec{v}$, elle-même définie par le nombre des dimensions de l'espace. Si l'espace est 1D, $(\vec{u}, \vec{v})$ ne peut être qu'un angle nul ou plat dans tous les repères 1D de l'objet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ 1D :

$$\sin(\vec{u}, \vec{v}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{1D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}}}{=} 0$$

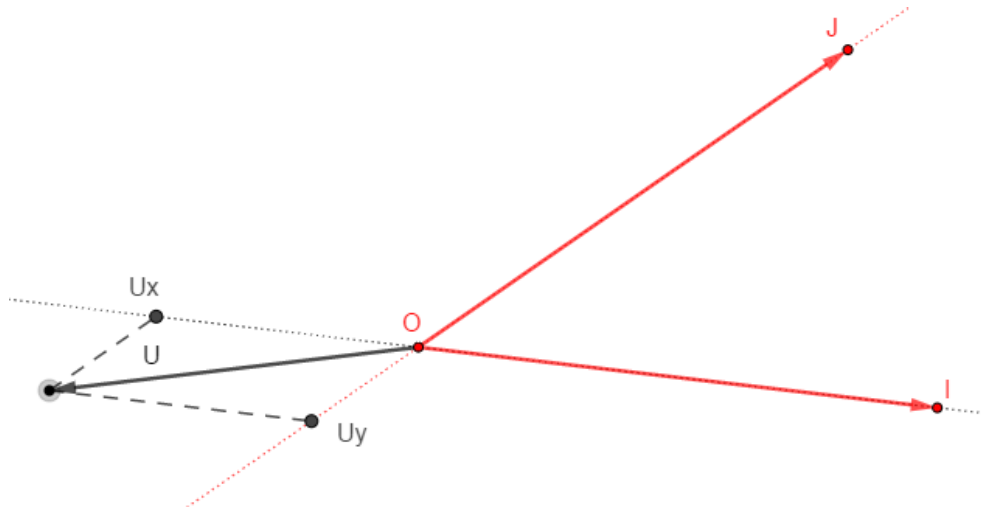
$$|\sin(\vec{u}, \vec{v})| \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{1D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}}}{=} \text{indéfini par le produit vectoriel}$$

Bien sûr, si $\vec{u} = \vec{0}$ et/ou $\vec{v} = \vec{0}$, ni l'angle ni ses fonctions trigonométriques ne sont définis :

$$(\vec{u}, \vec{v}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{1D} \\ \vec{u} = \vec{0} \text{ et/ou } \vec{v} = \vec{0}}}}{=} \text{indéfini}$$

$(\vec{u}, \vec{v})$ dans les repères de $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{2D}$

Figure avec $(O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}$



L'angle $(\vec{i}, \vec{u})$ est correctement orienté dans $(O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}$ par :

$$\sin(\vec{i}, \vec{u})_{(\vec{i}; \vec{u}) \in \overline{(O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}} \atop u_y \neq 0} = \frac{\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot u_y}{|\vec{u}|}$$

$$\cos(\vec{i}, \vec{u})_{(\vec{i}; \vec{u}) \in \overline{(O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}} \atop u_x \neq 0} = \frac{\vec{i} \boxtimes \vec{u}}{|\vec{i}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{u_x + u_y \cdot \cos(\vec{i}, \vec{j})}{|\vec{u}|}$$

L'angle $(\vec{i}, \vec{v})$ est correctement orienté dans $(O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}$ par :

$$\sin(\vec{i}, \vec{v})_{(\vec{i}; \vec{v}) \in \overline{(O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}} \atop v_y \neq 0} = \frac{\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot v_y}{|\vec{v}|}$$

$$\cos(\vec{i}, \vec{v})_{(\vec{i}; \vec{v}) \in \overline{(O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}} \atop v_x \neq 0} = \frac{\vec{i} \boxtimes \vec{v}}{|\vec{i}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{v_x + v_y \cdot \cos(\vec{i}, \vec{j})}{|\vec{v}|}$$

On a :

$$\sin(\vec{u}, \vec{v})_{(\vec{u}; \vec{v}) \in \overline{(O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}} \atop \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}} = \sin((\vec{i}, \vec{v}) - (\vec{i}, \vec{u})) = \sin(\vec{i}, \vec{v}) \cdot \cos(\vec{i}, \vec{u}) - \cos(\vec{i}, \vec{v}) \cdot \sin(\vec{i}, \vec{u})$$

$$\cos(\vec{u}, \vec{v})_{(\vec{u}; \vec{v}) \in \overline{(O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}} \atop \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}} = \cos((\vec{i}, \vec{v}) - (\vec{i}, \vec{u})) = \cos(\vec{i}, \vec{v}) \cdot \cos(\vec{i}, \vec{u}) + \sin(\vec{i}, \vec{v}) \cdot \sin(\vec{i}, \vec{u})$$

Soit :

$$\sin(\vec{u}, \vec{v})_{(\vec{u}; \vec{v}) \in \overline{(O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}} \atop \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}} = \frac{\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x)}{|\vec{v}| \cdot |\vec{u}|}$$

$$\cos(\vec{u}, \vec{v})_{(\vec{u}; \vec{v}) \in \overline{(O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}} \atop \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}} = \frac{v_x \cdot u_x + v_y \cdot u_y + \cos(\vec{i}, \vec{j}) \cdot (v_x \cdot u_y + v_y \cdot u_x)}{|\vec{v}| \cdot |\vec{u}|}$$

On sait calculer ces formules avec :

$$||\vec{u}||_{(\vec{u}; \vec{v}) \in (\vec{O}; \vec{i}; \vec{j})_{2D}} = (u_x^2 + u_y^2 + 2u_x \cdot u_y \cdot \cos(\vec{i}, \vec{j}))^{\frac{1}{2}}$$

$$||\vec{v}||_{(\vec{u}; \vec{v}) \in (\vec{O}; \vec{i}; \vec{j})_{2D}} = (v_x^2 + v_y^2 + 2v_x \cdot v_y \cdot \cos(\vec{i}, \vec{j}))^{\frac{1}{2}}$$

On obtient avec les mêmes raisonnements :

$$\sin(\vec{u}, \vec{v})_{(\vec{u}; \vec{v}) \in (\vec{O}; \vec{j}; \vec{k})_{2D} \atop \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}} = \frac{\sin(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y)}{||\vec{v}|| \cdot ||\vec{u}||}$$

$$\cos(\vec{u}, \vec{v})_{(\vec{u}; \vec{v}) \in (\vec{O}; \vec{j}; \vec{k})_{2D} \atop \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}} = \frac{v_y \cdot u_y + v_z \cdot u_z + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (v_y \cdot u_z + v_z \cdot u_y)}{||\vec{v}|| \cdot ||\vec{u}||}$$

Avec :

$$||\vec{u}||_{\vec{u} \in (\vec{O}; \vec{j}; \vec{k})_{2D}} = (u_y^2 + u_z^2 + 2u_y \cdot u_z \cdot \cos(\vec{j}, \vec{k}))^{\frac{1}{2}}$$

$$||\vec{v}||_{\vec{u} \in (\vec{O}; \vec{j}; \vec{k})_{2D}} = (v_y^2 + v_z^2 + 2v_y \cdot v_z \cdot \cos(\vec{j}, \vec{k}))^{\frac{1}{2}}$$

Et :

$$\sin(\vec{u}, \vec{v})_{(\vec{u}; \vec{v}) \in (\vec{O}; \vec{k}; \vec{i})_{2D} \atop \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}} = \frac{\sin(\vec{k}, \vec{i}) \cdot (u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z)}{||\vec{v}|| \cdot ||\vec{u}||}$$

$$\cos(\vec{u}, \vec{v})_{(\vec{u}; \vec{v}) \in (\vec{O}; \vec{k}; \vec{i})_{2D} \atop \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}} = \frac{v_z \cdot u_z + v_x \cdot u_x + \cos(\vec{k}, \vec{i}) \cdot (v_z \cdot u_x + v_x \cdot u_z)}{||\vec{v}|| \cdot ||\vec{u}||}$$

Avec :

$$||\vec{u}||_{\vec{u} \in (\vec{O}; \vec{k}; \vec{i})_{2D}} = (u_z^2 + u_x^2 + 2u_z \cdot u_x \cdot \cos(\vec{k}, \vec{i}))^{\frac{1}{2}}$$

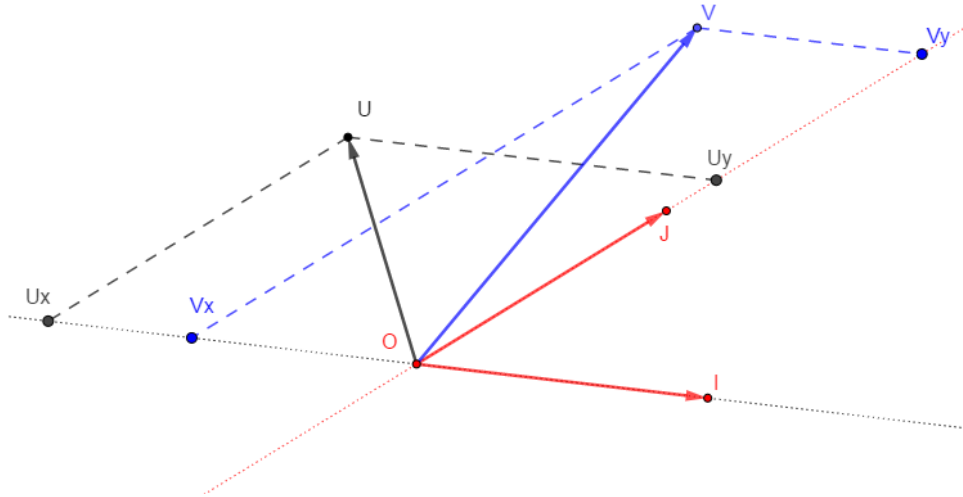
$$||\vec{v}||_{\vec{u} \in (\vec{O}; \vec{k}; \vec{i})_{2D}} = (v_z^2 + v_x^2 + 2v_z \cdot v_x \cdot \cos(\vec{k}, \vec{i}))^{\frac{1}{2}}$$

Bien sûr, si $\vec{u} = \vec{0}$ et/ou $\vec{v} = \vec{0}$, ni l'angle ni ses fonctions trigonométriques ne sont définis :

$$(\vec{u}, \vec{v})_{(\vec{u}; \vec{v}) \in (\vec{O}; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{2D} \atop \vec{u} = \vec{0} \text{ et/ou } \vec{v} = \vec{0}} = \text{indéfini}$$

$(\vec{u}, \vec{v})$ dans les repères de $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}$

On débute le raisonnement en orientant l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ par le déterminant de $\vec{u}; \vec{v}$ quand $(\vec{u}, \vec{v})$ est coplanaire avec le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}$ qui est alors un sous-espace vectoriel du repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}$. On notera la double condition $(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}$ et $(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}$ pour s'autoriser à définir $|\sin(\vec{u}, \vec{v})|$ par $\vec{u} \wedge \vec{v}$:



L'angle

$(\vec{u}, \vec{v})$ est correctement orienté dans $(O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}$ par :

$$\sin(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x}{|u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x|} \cdot \frac{\sin(\vec{i}, \vec{j})}{|\sin(\vec{i}, \vec{j})|} \cdot |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$$

$(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}$
 $(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}$
 $\vec{u} \neq \lambda \vec{v}$
 $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$

Note : le déterminant $\text{Det}(\vec{u}; \vec{v}) = u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x$ n'évalue pas ici seulement la colinéarité dans un repère du plan, mais le signe d'une mesure dans une équation modélisée avec $\sin(\vec{i}, \vec{j})$ pour que les choix des mesures correspondent aux apparences de $\sin(\vec{u}, \vec{v})$.

On rappelle que dans $(O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}$:

$$\vec{u} \neq \lambda \cdot \vec{v} \Leftrightarrow u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x \neq 0 \text{ et } \vec{u} = \lambda \cdot \vec{v} \Leftrightarrow u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x = 0$$

On s'en tient alors à l'évidence géométrique de l'angle nul ou plat si $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}$:

$$\sin(\vec{u}, \vec{v}) = 0$$

$(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}$
 $(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}$
 $\vec{u} = \lambda \vec{v}$
 $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$

Sous la double condition $(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}$ et $(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}$ on sait calculer :

$$|\sin(\vec{u}, \vec{v})| = \frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{\|(u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot [(ij)_x \cdot \vec{i} + (ij)_y \cdot \vec{j} + (ij)_z \cdot \vec{k}]\|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

$(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}$
 $(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}$
 $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$

Il est clair qu'on peut utiliser ce raisonnement pour orienter l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ quand ces vecteurs sont dans les plans $(O; \vec{j}; \vec{k})$ et $(O; \vec{k}; \vec{i})$:

$$\begin{aligned}
\sin(\vec{u}, \vec{v}) &= \frac{u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y}{|u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y|} \cdot \frac{\sin(\vec{j}, \vec{k})}{|\sin(\vec{j}, \vec{k})|} \cdot |\sin(\vec{u}, \vec{v})| ; \quad \sin(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \\
&\quad \begin{array}{l} (\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{j}; \vec{k})_{2D} \\ (\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \\ \vec{u} \neq \lambda \vec{v} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \end{array} \quad \begin{array}{l} \vec{u} = \lambda \vec{v} \\ (\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{j}; \vec{k})_{2D} \\ (\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \end{array} \\
\sin(\vec{u}, \vec{v}) &= \frac{u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z}{|u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z|} \cdot \frac{\sin(\vec{k}, \vec{i})}{|\sin(\vec{k}, \vec{i})|} \cdot |\sin(\vec{u}, \vec{v})| ; \quad \sin(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \\
&\quad \begin{array}{l} (\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{k}; \vec{i})_{2D} \\ (\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \\ \vec{u} \neq \lambda \vec{v} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \end{array} \quad \begin{array}{l} \vec{u} = \lambda \vec{v} \\ (\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{k}; \vec{i})_{2D} \\ (\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \end{array}
\end{aligned}$$

On finalise en donnant un signe à $\sin(\vec{u}, \vec{v})$ selon la colinéarité de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}$ pour garantir la cohérence de l'orientation de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ avec l'orientation des plans $(O; \vec{i}; \vec{j})$, $(O; \vec{j}; \vec{k})$, $(O; \vec{k}; \vec{i})$ quand $(\vec{u}, \vec{v})$ est dans un de ces plans.

$$\begin{aligned}
\sin(\vec{u}, \vec{v}) &= \\
&\quad \begin{array}{l} (\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \\ \vec{u} \neq \lambda \vec{v} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \end{array}
\end{aligned}$$

$$\frac{(u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot \sin(\vec{i}, \vec{j}) + (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) \cdot \sin(\vec{j}, \vec{k}) + (u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z) \cdot \sin(\vec{k}, \vec{i})}{|(u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot \sin(\vec{i}, \vec{j}) + (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) \cdot \sin(\vec{j}, \vec{k}) + (u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z) \cdot \sin(\vec{k}, \vec{i})|} \cdot |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$$

Il n'est plus nécessaire de spécifier $(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{2D}$, qui est un cas particulier de l'équation complète ci-dessus.

Avec cette équation, $\sin(\vec{u}, \vec{v})$ est en cohérence avec les orientations des plans contenant δ, γ, μ , quand ils sont confondus avec les plans $(O; \vec{i}; \vec{j})$, $(O; \vec{j}; \vec{k})$, $(O; \vec{k}; \vec{i})$, mais $\sin(\vec{u}, \vec{v})$ n'est pas formulé en cohérence avec les orientations des plans contenant δ, γ, μ , quand ces plans ne sont pas confondus avec les plans $(O; \vec{i}; \vec{j})$, $(O; \vec{j}; \vec{k})$, $(O; \vec{k}; \vec{i})$.

De même on a pour la colinéarité :

$$\begin{aligned}
\sin(\vec{u}, \vec{v}) &= 0 \\
&\quad \begin{array}{l} (\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \\ \vec{u} = \lambda \vec{v} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \end{array}
\end{aligned}$$

D'autre part on a toujours :

$$\begin{aligned}
\cos(\vec{u}, \vec{v}) &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \\
&\quad \begin{array}{l} (\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \end{array}
\end{aligned}$$

Bien sûr, si $\vec{u} = \vec{0}$ et/ou $\vec{v} = \vec{0}$, ni l'angle ni ses fonctions trigonométriques ne sont définis :

$$\begin{aligned}
(\vec{u}, \vec{v}) &= \text{indéfini} \\
&\quad \begin{array}{l} (\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \\ \vec{u} = \vec{0} \text{ et/ou } \vec{v} = \vec{0} \end{array}
\end{aligned}$$

On donne ci-dessous deux figures illustrant les trois déterminants de couples de vecteurs formés sur les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, évalués dans les plans $(O; \vec{i}; \vec{j})$, $(O; \vec{j}; \vec{k})$, $(O; \vec{k}; \vec{i})$. Dans $(O; \vec{i}; \vec{j})$ le déterminant d'un vecteur $\vec{u}_{xy}$ de ce plan avec un vecteur $\vec{v}_{xy}$ tel que :

$\overrightarrow{u_{xy}}$ est formé par les coordonnées u_x et u_y : $\vec{u} = u_x \cdot \vec{i} + u_y \cdot \vec{j} + u_z \cdot \vec{k} = \overrightarrow{u_{xy}} + u_z \cdot \vec{k}$

$\overrightarrow{v_{xy}}$ est formé par les coordonnées v_x et v_y : $\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k} = \overrightarrow{v_{xy}} + v_z \cdot \vec{k}$

Dans $(O; \vec{j}; \vec{k})$ le déterminant d'un vecteur $\overrightarrow{u_{yz}}$ de ce plan avec un vecteur $\overrightarrow{v_{yz}}$ tel que :

$\overrightarrow{u_{yz}}$ est formé par les coordonnées u_y et u_z de : $\vec{u} = u_x \cdot \vec{i} + u_y \cdot \vec{j} + u_z \cdot \vec{k} = u_x \cdot \vec{i} + \overrightarrow{u_{yz}}$

$\overrightarrow{v_{yz}}$ est formé par les coordonnées v_y et v_z de : $\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k} = v_x \cdot \vec{i} + \overrightarrow{v_{yz}}$

Dans $(O; \vec{k}; \vec{i})$ le déterminant d'un vecteur $\overrightarrow{u_{zx}}$ de ce plan avec un vecteur $\overrightarrow{v_{zx}}$ tel que :

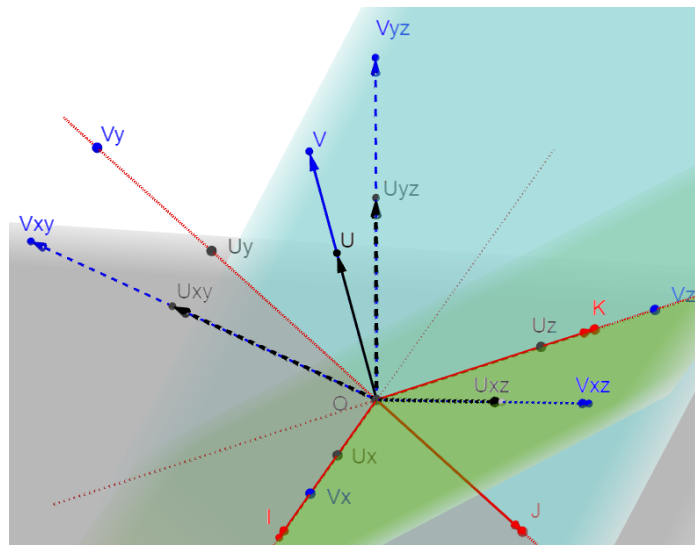
$\overrightarrow{u_{zx}}$ est formé par les coordonnées u_z et u_x de : $\vec{u} = \overrightarrow{u_{zx}} + u_y \cdot \vec{j}$

$\overrightarrow{v_{zx}}$ est formé par les coordonnées v_z et v_x de : $\vec{v} = \overrightarrow{v_{zx}} + v_y \cdot \vec{j}$

On peut a priori étendre ce principe à deux vecteurs non nuls d'un espace de dimension supérieur ou égal à 2. Pour la dimension 1 on trouve toujours un réel λ tel que $u_x - \lambda \cdot v_x = 0$ et le déterminant est nul. Pour la dimension 0, à mon sens, rien n'existe, pas même le vecteur nul, ni les nombres, ni même mon mental que je tiens à impliquer dans l'objet observé.

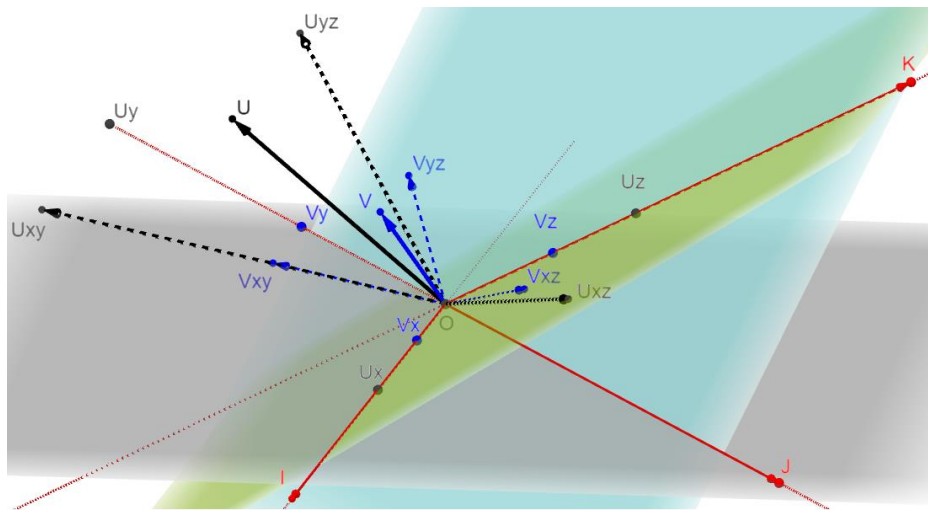
Si $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}$ comme l'illustre la figure ci-dessous, chacun des déterminants des couples de vecteurs $(\overrightarrow{u_{xy}}$ et $\overrightarrow{v_{xy}})$, $(\overrightarrow{u_{yz}}$ et $\overrightarrow{v_{yz}})$, $(\overrightarrow{u_{zx}}$ et $\overrightarrow{v_{zx}})$ est nul. On a, avec le même réel λ :

$$\overrightarrow{u_{xy}} = \lambda \cdot \overrightarrow{v_{xy}} ; \overrightarrow{u_{yz}} = \lambda \cdot \overrightarrow{v_{yz}} ; \overrightarrow{u_{zx}} = \lambda \cdot \overrightarrow{v_{zx}}$$



Si $\vec{u} \neq \lambda \cdot \vec{v}$ comme l'illustre la figure ci-dessous au moins un des déterminants des couples de vecteurs

$(\overrightarrow{u_{xy}}$ et $\overrightarrow{v_{xy}})$, $(\overrightarrow{u_{yz}}$ et $\overrightarrow{v_{yz}})$, $(\overrightarrow{u_{zx}}$ et $\overrightarrow{v_{zx}})$ est non nul :



2.14 Produit mixte

Le produit scalaire de deux vecteurs peut être celui d'un vecteur et du vecteur représentant le produit vectoriel. Le nombre ainsi obtenu donne alors le volume V du parallélépipède qui est construit sur trois vecteurs $\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$. Ce volume peut être orienté s'il possède un signe positif ou négatif selon les combinaisons des coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans un repère cartésien, ou encore l'ordre dans lequel on construit le produit mixte :

$$V = \vec{w} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v})$$

Note :

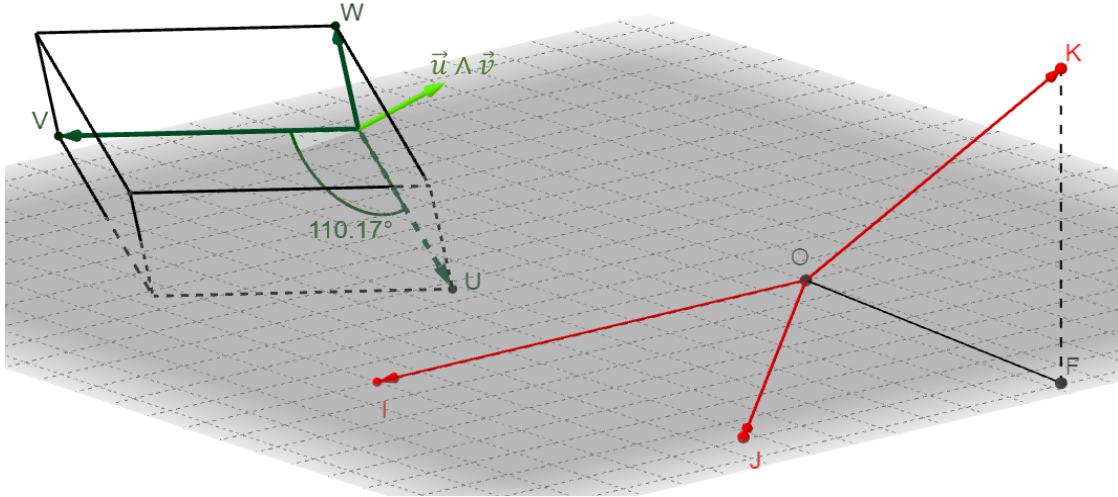
le volume orienté du parallélépipède est aussi donné par le déterminant calculé sur $\vec{w}$; $\vec{u}$; $\vec{v}$ uniquement dans un repère 3D orthonormé :

$$\begin{aligned} V_{(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}) \text{ orthonormé}} &= \text{Det}(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \\ &= \begin{vmatrix} w_x & u_x & v_x \\ w_y & u_y & v_y \\ w_z & u_z & v_z \end{vmatrix} = w_x \cdot \begin{vmatrix} u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{vmatrix} - w_y \cdot \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_z & v_z \end{vmatrix} + w_z \cdot \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} \\ &=_{(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}) \text{ orthonormé}} w_x \cdot (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) - w_y \cdot (u_x \cdot v_z - u_z \cdot v_x) + w_z \cdot (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \end{aligned}$$

L'ordre dans lequel on dispose les vecteurs conditionne le signe.

Produit mixte dans $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}$

Figure pour $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dans un espace euclidien orienté indirect



Le produit mixte représente le volume orienté du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$. Il n'est pas défini pour $\vec{u} = \vec{0}$ et/ou $\vec{v} = \vec{0}$ et/ou $\vec{w} = \vec{0}$ car il utilise des mesures d'angle entre chacun de ces vecteurs :

$$\vec{w} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et/ou } \vec{v} \neq \vec{0} \text{ et/ou } \vec{w} \neq \vec{0}}}}{=} \text{indéfini}$$

Ci-dessous sa forme géométrique, orientée uniquement par le signe de $\cos(\vec{w}, (\vec{u} \wedge \vec{v}))$:

$$\vec{w} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{w} \neq \vec{0}}}}{=} |\vec{w}| \cdot |\vec{u} \wedge \vec{v}| \cdot \cos(\vec{w}, (\vec{u} \wedge \vec{v}))$$

Avec $\vec{w} (w_x \cdot \vec{i} + w_y \cdot \vec{j} + w_z \cdot \vec{k})$, Ci-dessous la forme analytique du produit mixte, orienté selon les combinaisons des coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}$ ces coordonnées étant relatives à la disposition spatiale des vecteurs unitaires de $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}$:

$$\vec{w} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{w} \neq \vec{0}}}}{=} (w_x \cdot \vec{i} + w_y \cdot \vec{j} + w_z \cdot \vec{k}) \boxtimes [(uv)_x \cdot \vec{i} + (uv)_y \cdot \vec{j} + (uv)_z \cdot \vec{k}]$$

D'où :

$$\vec{w} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{w} \neq \vec{0}}}}{=}$$

$$\left(w_x \cdot (uv)_x + w_y \cdot (uv)_y + w_z \cdot (uv)_z + \cos(\vec{i}, \vec{j}) \cdot (w_x \cdot (uv)_y + w_y \cdot (uv)_x) \right. \\ \left. + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (w_y \cdot (uv)_z + w_z \cdot (uv)_y) + \cos(\vec{k}, \vec{i}) \cdot (w_z \cdot (uv)_x + w_x \cdot (uv)_z) \right)$$

Avec :

$$\begin{aligned}(uv)_x &= (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot (ij)_x + (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) \cdot (jk)_x + (u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z) \cdot (ki)_x \\(uv)_y &= (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot (ij)_y + (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) \cdot (jk)_y + (u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z) \cdot (ki)_y \\(uv)_z &= (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot (ij)_z + (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) \cdot (jk)_z + (u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z) \cdot (ki)_z\end{aligned}$$

$(ij)_x = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{ \sin(\vec{l}, \vec{j}) \cdot \sin(\vec{j}, \vec{OF}) \cdot \cos \delta}{ \sin \delta \cdot \sin(\vec{l}, \vec{j})}$	$(ij)_x = 0$ $\vec{k} \perp (O; \vec{l}; \vec{j})_{2D}$
$(ij)_y = -\psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{ \sin(\vec{l}, \vec{j}) \cdot \sin(\vec{l}, \vec{OF}) \cdot \cos \delta}{ \sin \delta \cdot \sin(\vec{l}, \vec{j})}$	$(ij)_y = 0$ $\vec{k} \perp (O; \vec{l}; \vec{j})_{2D}$
$(ij)_z = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{ \sin(\vec{l}, \vec{j}) }{ \sin \delta }$	$(ij)_z = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \sin(\vec{l}, \vec{j}) $ $\vec{k} \perp (O; \vec{l}; \vec{j})_{2D}$
$(jk)_x = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{ \sin(\vec{j}, \vec{k}) }{ \sin \gamma }$	$(jk)_x = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \sin(\vec{j}, \vec{k}) $ $\vec{l} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2D}$
$(jk)_y = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{ \sin(\vec{j}, \vec{k}) \cdot \sin(\vec{k}, \vec{OG}) \cdot \cos \gamma}{ \sin \gamma \cdot \sin(\vec{j}, \vec{k})}$	$(jk)_y = 0$ $\vec{l} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2D}$
$(jk)_z = -\psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{ \sin(\vec{j}, \vec{k}) \cdot \sin(\vec{j}, \vec{OG}) \cdot \cos \gamma}{ \sin \gamma \cdot \sin(\vec{j}, \vec{k})}$	$(jk)_z = 0$ $\vec{l} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2D}$
$(ki)_x = -\psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{ \sin(\vec{k}, \vec{l}) \cdot \sin(\vec{k}, \vec{OZ}) \cdot \cos \mu}{ \sin \mu \cdot \sin(\vec{k}, \vec{l})}$	$(ki)_x = 0$ $\vec{j} \perp (O; \vec{k}; \vec{l})_{2D}$
$(ki)_y = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{ \sin(\vec{k}, \vec{l}) }{ \sin \mu }$	$(ki)_y = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \sin(\vec{k}, \vec{l}) $ $\vec{j} \perp (O; \vec{k}; \vec{l})_{2D}$
$(ki)_z = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{ \sin(\vec{k}, \vec{l}) \cdot \sin(\vec{l}, \vec{OZ}) \cdot \cos \mu}{ \sin \mu \cdot \sin(\vec{k}, \vec{l})}$	$(ki)_z = 0$ $\vec{j} \perp (O; \vec{k}; \vec{l})_{2D}$

Si la base est orthonormée, $\cos(\vec{l}, \vec{j}) = \cos(\vec{j}, \vec{k}) = \cos(\vec{k}, \vec{l}) = 0$, et si le repère est d'orientation directe dans l'espace d'orientation directe on a $(ij)_z = (jk)_x = (ki)_y = 1$

Soit :

$$\begin{aligned}\vec{w} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v}) &=_{(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})} w_x \cdot (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) + w_y \cdot (u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z) + w_z \cdot (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \\&\in (O; \vec{l}; \vec{j}; \vec{k})_{ortho} \\&ET \psi = \xi = 1 \\&\vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{w} \neq \vec{0}\end{aligned}$$

Avec les mêmes techniques utilisées que celles utilisées précédemment pour orienter un angle $(\vec{u}, \vec{v})$ on oriente l'angle $(\vec{w}, (\vec{u} \wedge \vec{v}))$.

Produit mixte dans $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{2D}$

Si un ou plusieurs des vecteurs $\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}$ est nul, $\vec{w} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v})$, est considéré indéfini car les angles $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{w}, (\vec{u} \wedge \vec{v}))$ nécessaires aux définitions des produits vectoriels et scalaires sont indéfinis :

$$\vec{w} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{2D} \\ \vec{u}=\vec{0} \text{ et/ou } \vec{v}=\vec{0} \text{ et/ou } \vec{w}=\vec{0}}} = \text{indéfini}$$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont non colinéaires :

$(\vec{u} \wedge \vec{v})$ n'est pas défini et même si la surface du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est définie, la surface de $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{2D}$ ne contient pas assez de dimensions pour une orthogonalité théorique au plan $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On pose qu'un volume (non nul) ne peut se définir que dans un espace de dimension $n \geq 3$. On pose donc que le produit mixte est indéfini :

$$\vec{w} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{2D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{w} \neq \vec{0} \\ \vec{u} \neq \lambda \vec{v}}} = \text{indéfini}$$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont colinéaires :

$(\vec{u} \wedge \vec{v})$ est défini comme nul parce que la surface de $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{2D}$ contient assez de dimensions pour une orthogonalité théorique à la droite (OUV). La surface du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nulle, on pose que le volume nul peut se définir dans un espace de dimension $n \geq 2$. On pose donc que le produit mixte est défini et nul :

$$\vec{w} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{2D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{w} \neq \vec{0} \\ \vec{u} = \lambda \vec{v}}} = 0$$

Produit mixte dans $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{1D}$

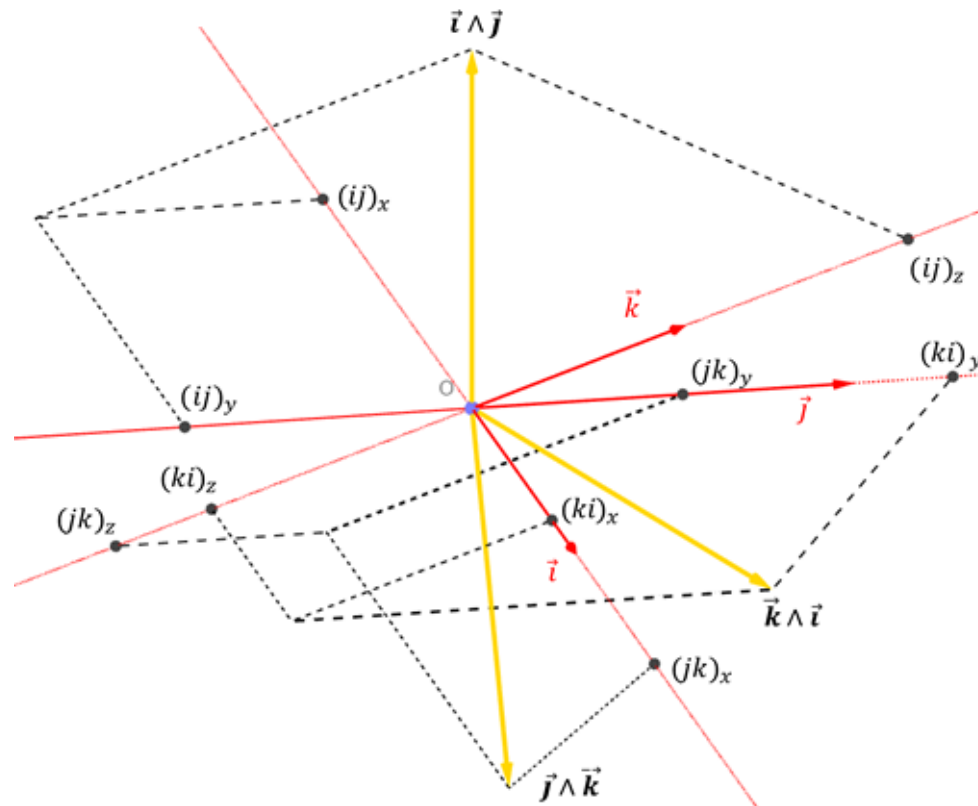
Là aussi :

$$\vec{w} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{1D} \\ \vec{u}=\vec{0} \text{ et/ou } \vec{v}=\vec{0} \text{ et/ou } \vec{w}=\vec{0}}} = \text{indéfini}$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont colinéaires et $(\vec{u} \wedge \vec{v})$ n'est pas défini. La longueur de $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{1D}$ ne contient pas assez de dimensions pour une orthogonalité théorique à la droite (OUV), ni pour un volume nul. On pose donc que le produit mixte est toujours indéfini en 1D :

$$\vec{w} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{1D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{w} \neq \vec{0} \\ \vec{u} = \lambda \vec{v}}} = \text{indéfini}$$

2.15 Tableau récapitulatif des formules des opérations géométriques dans l'objet $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$



$$\psi_3 = 1$$

$$\xi_3 = 1$$

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ objet et espace en 3 dimensions $\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \sin \delta \neq 0$ OU $\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})2D$

Si l'espace est orienté direct : $\psi_3 = 1$ ou $\psi_3 = -1$

Alors :

Si $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est directoïde : ξ_3 est du signe de ψ_3

Si $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est indirectoïde : ξ_3 est du signe contraire à ψ_3

Si l'espace est orienté indirect : $\psi_3 = 1$ ou $\psi_3 = -1$

Alors :

Si $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est indirectoïde : ξ_3 est du signe de ψ_3

Si $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est directoïde : ξ_3 est du signe contraire à ψ_3

$\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \sin \delta \neq 0$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} \begin{pmatrix} \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{|\sin(\vec{i}, \vec{j})| \cdot \sin(\vec{j}, \vec{OF}) \cdot \cos \delta}{|\sin \delta| \cdot \sin(\vec{i}, \vec{j})} \cdot \vec{i} \\ -\psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{|\sin(\vec{i}, \vec{j})| \cdot \sin(\vec{i}, \vec{OF}) \cdot \cos \delta}{|\sin \delta| \cdot \sin(\vec{i}, \vec{j})} \cdot \vec{j} \\ \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{|\sin(\vec{i}, \vec{j})|}{|\sin \delta|} \cdot \vec{k} \end{pmatrix}$$

$\sin(\vec{j}, \vec{k}) \cdot \sin \gamma \neq 0$

$$\vec{j} \wedge \vec{k} \begin{pmatrix} \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{|\sin(\vec{j}, \vec{k})|}{|\sin \gamma|} \cdot \vec{i} \\ \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{|\sin(\vec{j}, \vec{k})| \cdot \sin(\vec{k}, \vec{OG}) \cdot \cos \gamma}{|\sin \gamma| \cdot \sin(\vec{j}, \vec{k})} \cdot \vec{j} \\ -\psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{|\sin(\vec{j}, \vec{k})| \cdot \sin(\vec{j}, \vec{OG}) \cdot \cos \gamma}{|\sin \gamma| \cdot \sin(\vec{j}, \vec{k})} \cdot \vec{k} \end{pmatrix}$$

$\sin(\vec{k}, \vec{i}) \cdot \sin \mu \neq 0$

$$\vec{k} \wedge \vec{i} \begin{pmatrix} -\psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{|\sin(\vec{k}, \vec{i})| \cdot \sin(\vec{k}, \vec{OZ}) \cdot \cos \mu}{|\sin \mu| \cdot \sin(\vec{k}, \vec{i})} \cdot \vec{i} \\ \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{|\sin(\vec{k}, \vec{i})|}{|\sin \mu|} \cdot \vec{j} \\ \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{|\sin(\vec{k}, \vec{i})| \cdot \sin(\vec{i}, \vec{OZ}) \cdot \cos \mu}{|\sin \mu| \cdot \sin(\vec{k}, \vec{i})} \cdot \vec{k} \end{pmatrix}$$

$\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j}) 2D$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} \begin{pmatrix} 0 \cdot \vec{i} \\ 0 \cdot \vec{j} \\ \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\sin(\vec{i}, \vec{j})| \cdot \vec{k} \end{pmatrix}$$

$\vec{i} \perp (O; \vec{j}; \vec{k}) 2D$

$$\vec{j} \wedge \vec{k} \begin{pmatrix} \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\sin(\vec{j}, \vec{k})| \cdot \vec{i} \\ 0 \cdot \vec{j} \\ 0 \cdot \vec{k} \end{pmatrix}$$

$\vec{j} \perp (O; \vec{k}; \vec{i}) 2D$

$$\vec{k} \wedge \vec{i} \begin{pmatrix} 0 \cdot \vec{i} \\ \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\sin(\vec{k}, \vec{i})| \cdot \vec{j} \\ 0 \cdot \vec{k} \end{pmatrix}$$

$$||\vec{u}||_{\vec{u} \in (0; \vec{l}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}} = [u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + 2u_x \cdot u_y \cdot \cos(\vec{l}, \vec{j}) + 2u_z u_y \cdot \cos(\vec{j}, \vec{k}) + 2u_z \cdot u_x \cdot \cos(\vec{k}, \vec{l})]^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{u} \boxtimes \vec{v}_{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (0; \vec{l}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}} = \begin{pmatrix} u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z + \cos(\vec{l}, \vec{j}) \cdot (u_x \cdot v_y + u_y \cdot v_x) \\ + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (u_y \cdot v_z + u_z \cdot v_y) + \cos(\vec{k}, \vec{l}) \cdot (u_z \cdot v_x + u_x \cdot v_z) \end{pmatrix} ; \vec{u} \boxtimes \vec{v}_{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (0; \vec{l}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \\ \vec{u} = \vec{0} \text{ et/ou } \vec{v} = \vec{0}}} = \text{indéfini}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v}_{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (0; \vec{l}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}} = \begin{pmatrix} [(u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot (ij)_x + (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) \cdot (jk)_x + (u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z) \cdot (ki)_x] \cdot \vec{l} \\ [(u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot (ij)_y + (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) \cdot (jk)_y + (u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z) \cdot (ki)_y] \cdot \vec{j} \\ [(u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot (ij)_z + (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) \cdot (jk)_z + (u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z) \cdot (ki)_z] \cdot \vec{k} \end{pmatrix} ; \vec{u} \wedge \vec{v}_{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (0; \vec{l}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \\ \vec{u} = \vec{0} \text{ et/ou } \vec{v} = \vec{0}}} = \text{indéfini}$$

$$\cos(\vec{u}, \vec{v})_{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (0; \vec{l}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}} = \frac{\vec{u} \boxtimes \vec{v}}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||} ; |\sin(\vec{u}, \vec{v})|_{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (0; \vec{l}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}} = \frac{||\vec{u} \wedge \vec{v}||}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||}$$

$$\sin(\vec{u}, \vec{v})_{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (0; \vec{l}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \\ \vec{u} \neq \lambda \cdot \vec{v} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}} = \frac{(u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot \sin(\vec{l}, \vec{j}) + (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) \cdot \sin(\vec{j}, \vec{k}) + (u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z) \cdot \sin(\vec{k}, \vec{l})}{|(u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot \sin(\vec{l}, \vec{j}) + (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) \cdot \sin(\vec{j}, \vec{k}) + (u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z) \cdot \sin(\vec{k}, \vec{l})|} \cdot |\sin(\vec{u}, \vec{v})| ; \sin(\vec{u}, \vec{v})_{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (0; \vec{l}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \\ \vec{u} = \lambda \cdot \vec{v} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}} = 0$$

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (0; \vec{l}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \\ \vec{u} = \vec{0} \text{ et/ou } \vec{v} = \vec{0}}} = \text{indéfini}$$

$$\vec{w} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v})_{\substack{(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \in (0; \vec{l}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{w} \neq \vec{0}}} = \begin{pmatrix} w_x \cdot (uv)_x + w_y \cdot (uv)_y + w_z \cdot (uv)_z + \cos(\vec{l}, \vec{j}) \cdot (w_x \cdot (uv)_y + w_y \cdot (uv)_x) \\ + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (w_y \cdot (uv)_z + w_z \cdot (uv)_y) + \cos(\vec{k}, \vec{l}) \cdot (w_z \cdot (uv)_x + w_x \cdot (uv)_z) \end{pmatrix}$$

$$\vec{w} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v})_{\substack{(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \in (0; \vec{l}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \\ \vec{u} = \vec{0} \text{ et/ou } \vec{v} = \vec{0} \text{ et/ou } \vec{w} = \vec{0}}} = \text{indéfini}$$

$(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ objet et espace en 2 dimensions $\psi_2 = 1$ ou $\psi_2 = -1$; $\xi_3 = 1$ ou $\xi_3 = -1$

$[\sin(\vec{i}, \vec{j}) \neq 0 \text{ ET } \sin\delta = 0] \text{ OU } [\sin(\vec{i}, \vec{j}) = 0 \text{ ET } \sin\delta \neq 0] \text{ OU } [\sin(\vec{i}, \vec{j}) = 0 \text{ ET } \vec{k} \perp (O ; \vec{i} ; \vec{j}) 1D]$

$\sin(\vec{i}, \vec{j}) \neq 0$

$$\begin{pmatrix} \psi_2 = \pm 1 \\ \xi_3 = \pm 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{i} \wedge \vec{j} = \text{indéfini}$$

$\sin(\vec{j}, \vec{k}) \neq 0$

$$\begin{pmatrix} \psi_2 = \pm 1 \\ \xi_3 = \pm 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{j} \wedge \vec{k} = \text{indéfini}$$

$\sin(\vec{k}, \vec{i}) \neq 0$

$$\begin{pmatrix} \psi_2 = \pm 1 \\ \xi_3 = \pm 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{k} \wedge \vec{i} = \text{indéfini}$$

$\sin(\vec{i}, \vec{j}) = 0$

$$\begin{pmatrix} \psi_2 = \pm 1 \\ \xi_3 = \pm 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{0} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} = \text{indéfini} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} = \text{indéfini} \end{pmatrix}$$

$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{0}$ est défini dans les repères
 $(O ; \vec{j} ; \vec{k}) 2D$ et $(O ; \vec{k} ; \vec{i}) 2D$

$\sin(\vec{j}, \vec{k}) = 0$

$$\begin{pmatrix} \psi_2 = \pm 1 \\ \xi_3 = \pm 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \vec{i} \wedge \vec{j} = \text{indéfini} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{0} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} = \text{indéfini} \end{pmatrix}$$

$\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{0}$ est défini dans les repères
 $(O ; \vec{k} ; \vec{i}) 2D$ et $(O ; \vec{i} ; \vec{j}) 2D$

$\sin(\vec{k}, \vec{i}) = 0$

$$\begin{pmatrix} \psi_2 = \pm 1 \\ \xi_3 = \pm 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \vec{i} \wedge \vec{j} = \text{indéfini} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} = \text{indéfini} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{0} \end{pmatrix}$$

$\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{0}$ est défini dans les repères
 $(O ; \vec{j} ; \vec{k}) 2D$ et $(O ; \vec{i} ; \vec{j}) 2D$

$$||\vec{u}'||_{\vec{u}' \in (O ; \vec{i} ; \vec{j}) 2D} = (u_x^2 + u_y^2 + 2u_x \cdot u_y \cdot \cos(\vec{i}, \vec{j}))^{\frac{1}{2}} ; ||\vec{u}'||_{\vec{u}' \in (O ; \vec{j} ; \vec{k}) 2D} = (u_y^2 + u_z^2 + 2u_y \cdot u_z \cdot \cos(\vec{j}, \vec{k}))^{\frac{1}{2}} ; ||\vec{u}'||_{\vec{u}' \in (O ; \vec{k} ; \vec{i}) 2D} = (u_z^2 + u_x^2 + 2u_z \cdot u_x \cdot \cos(\vec{k}, \vec{i}))^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{u} \boxtimes \vec{v}_{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O ; \vec{i} ; \vec{j}) 2D \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + \cos(\vec{i}, \vec{j}) \cdot (u_x \cdot v_y + u_y \cdot v_x) ; \vec{u} \boxtimes \vec{v}_{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O ; \vec{j} ; \vec{k}) 2D \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}} = u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (u_y \cdot v_z + u_z \cdot v_y)$$

$$\vec{u} \boxtimes \vec{v}_{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O ; \vec{k} ; \vec{i}) 2D \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}} = u_x \cdot v_x + u_z \cdot v_z + \cos(\vec{k}, \vec{i}) \cdot (u_z \cdot v_x + u_x \cdot v_z) ; \vec{u} \boxtimes \vec{v}_{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O ; \vec{i} ; \vec{j}) 2D \\ \vec{u} = \vec{0} \text{ et/ou } \vec{v} = \vec{0}}} = \text{indéfini}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v}_{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k}) 2D \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ \vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}}} = \vec{0} ; \vec{u} \wedge \vec{v}_{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k}) 2D \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ \vec{u} \neq \lambda \cdot \vec{v}}} = \text{indéfini} ; (\vec{u} \wedge \vec{v})_{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k}) 2D \\ \vec{u} = \vec{0} \text{ et/ou } \vec{v} = \vec{0}}} = \text{indéfini}$$

$$|\sin(\vec{u}, \vec{v})| \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{l}; \vec{j}; \vec{k})_{2D} \\ \vec{u} = \lambda \vec{v} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}}}{=} \frac{||\vec{u} \wedge \vec{v}||}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||} = 0 ; |\sin(\vec{u}, \vec{v})| \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{l}; \vec{j}; \vec{k})_{2D} \\ \vec{u} \neq \lambda \vec{v} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}}}{=} \text{indéfini par le produit vectoriel}$$

$$\sin(\vec{u}, \vec{v}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{l}; \vec{j})_{2D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}}}{=} \frac{\sin(\vec{l}, \vec{j}) \cdot (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x)}{||\vec{v}|| \cdot ||\vec{u}||} ; \cos(\vec{u}, \vec{v}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{l}; \vec{j})_{2D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}}}{=} \frac{v_x \cdot u_x + v_y \cdot u_y + \cos(\vec{l}, \vec{j}) \cdot (v_x \cdot u_y + v_y \cdot u_x)}{||\vec{v}|| \cdot ||\vec{u}||}$$

$$\sin(\vec{u}, \vec{v}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{j}; \vec{k})_{2D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}}}{=} \frac{\sin(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y)}{||\vec{v}|| \cdot ||\vec{u}||} ; \cos(\vec{u}, \vec{v}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{j}; \vec{k})_{2D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}}}{=} \frac{v_y \cdot u_y + v_z \cdot u_z + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (v_y \cdot u_z + v_z \cdot u_y)}{||\vec{v}|| \cdot ||\vec{u}||}$$

$$\sin(\vec{u}, \vec{v}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{k}; \vec{l})_{2D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}}}{=} \frac{\sin(\vec{k}, \vec{l}) \cdot (u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z)}{||\vec{v}|| \cdot ||\vec{u}||} ; \cos(\vec{u}, \vec{v}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{k}; \vec{l})_{2D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}}}{=} \frac{v_z \cdot u_z + v_x \cdot u_x + \cos(\vec{k}, \vec{l}) \cdot (v_z \cdot u_x + v_x \cdot u_z)}{||\vec{v}|| \cdot ||\vec{u}||}$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{l}; \vec{j}; \vec{k})_{2D} \\ \vec{u} = \vec{0} \text{ et/ou } \vec{v} = \vec{0}}}}{=} \text{indéfini}$$

$$\vec{w} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \in (O; \vec{l}; \vec{j}; \vec{k})_{2D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{w} \neq \vec{0} \\ \vec{u} \neq \lambda \vec{v}}}}{=} \text{indéfini} ; \vec{w} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \in (O; \vec{l}; \vec{j}; \vec{k})_{2D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{w} \neq \vec{0} \\ \vec{u} = \lambda \vec{v}}}}{=} 0 ; \vec{w} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \in (O; \vec{l}; \vec{j}; \vec{k})_{2D} \\ \vec{u} = \vec{0} \text{ et/ou } \vec{v} = \vec{0} \text{ et/ou } \vec{w} = \vec{0}}}}{=} \text{indéfini}$$

$(\vec{0} ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ objet et espace en 1 dimension $\psi_1 = 1$ ou $\psi_1 = -1$; $\xi_3 = 1$ ou $\xi_3 = -1$
 $\sin(\vec{i}, \vec{j}) = 0$ ET $\sin \delta = 0$

$$\begin{pmatrix} \psi_1 = \pm 1 \\ \xi_3 = \pm 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \vec{i} \wedge \vec{j} = \text{indéfini} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} = \text{indéfini} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} = \text{indéfini} \end{pmatrix}$$

$$||\vec{u}||_{\vec{u} \in (O; \vec{i})_{1D}} \vec{u} |u_x| ; ||\vec{u}||_{\vec{u} \in (O; \vec{j})_{1D}} \vec{u} |u_y| ; ||\vec{u}||_{\vec{u} \in (O; \vec{k})_{1D}} \vec{u} |u_z|$$

$$\vec{u} \boxtimes \vec{v} \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i})_{1D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}}}{=} u_x \cdot v_x ; \vec{u} \boxtimes \vec{v} \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{j})_{1D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}}}{=} u_y \cdot v_y ; \vec{u} \boxtimes \vec{v} \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{k})_{1D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}}}{=} u_z \cdot v_z ; \vec{u} \boxtimes \vec{v} \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{1D} \\ \vec{u} = \vec{0} \text{ et/ou } \vec{v} = \vec{0}}}}{=} \text{indéfini}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{1D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}}}{=} \text{indéfini} ; \vec{u} \wedge \vec{v} \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{1D} \\ \vec{u} = \vec{0} \text{ et/ou } \vec{v} = \vec{0}}}}{=} \text{indéfini}$$

$$|\sin(\vec{u}, \vec{v})| \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{1D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}}}{=} \text{indéfini par le produit vectoriel} ; \sin(\vec{u}, \vec{v}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{1D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}}}{=} 0$$

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i})_{1D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}}}{=} \frac{u_x \cdot v_x}{|u_x \cdot v_x|} ; \cos(\vec{u}, \vec{v}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{j})_{1D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}}}{=} \frac{u_y \cdot v_y}{|u_y \cdot v_y|} ; \cos(\vec{u}, \vec{v}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{k})_{1D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}}}{=} \frac{u_z \cdot v_z}{|u_z \cdot v_z|}$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{1D} \\ \vec{u} = \vec{0} \text{ et/ou } \vec{v} = \vec{0}}}}{=} \text{indéfini}$$

$$\vec{w} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{1D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{w} \neq \vec{0} \\ \vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}}}}{=} \text{indéfini} ; \vec{w} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{1D} \\ \vec{u} = \vec{0} \text{ et/ou } \vec{v} = \vec{0} \text{ et/ou } \vec{w} = \vec{0}}}}{=} \text{indéfini}$$

Chapitre 3

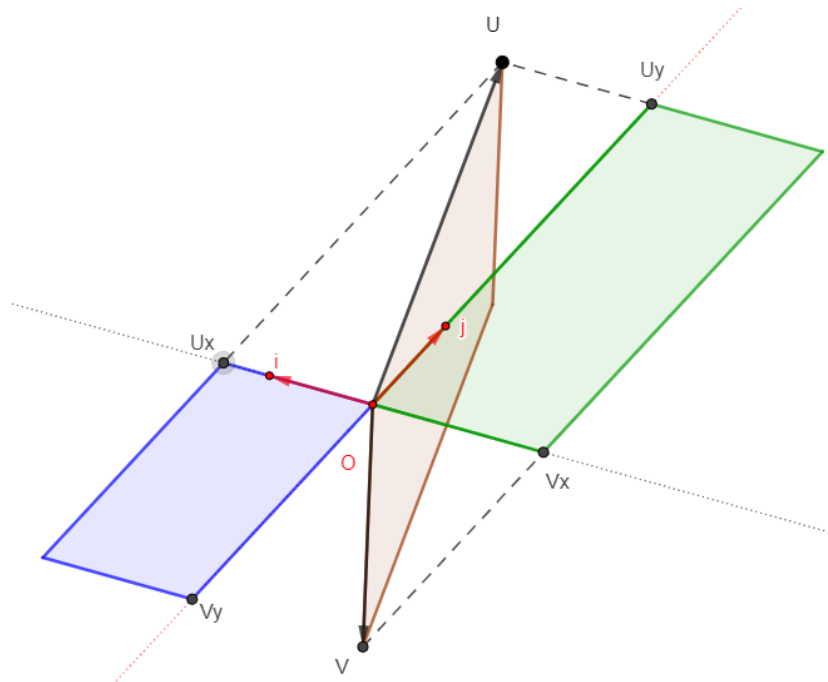
CONVERSIONS DE COORDONNÉES ENTRE REPÈRES QUELCONQUES EUCLIDIENS

3.1 Généralités

La présentation visuelle compacte et rectangulaire d'une matrice (voir annexe « L'écriture compactée en matrice ») ou d'un déterminant représente l'écriture d'un long développé, mais représente beaucoup plus encore. À partir du long développé et en faisant des efforts particuliers je peux trouver la formule d'un produit mixte en dimension n , mais avec la disposition de l'écriture compacte, je n'ai pas ces efforts à faire. Il y a le risque cependant que je ne comprenne pas ce que je fais, sans en avoir conscience.

3.2 Déterminants et objets orientés

Dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ 2D on constate un lien entre les mesures des coordonnées des vecteurs et les aires formées sur ces vecteurs.



$$\text{Aire orientée } (O; \vec{u}; \vec{v}) = \text{Aire orientée } (O; \vec{u}_x; \vec{v}_y) - \text{Aire orientée } (O; \vec{u}_y; \vec{v}_x)$$

$$\text{Aire orientée } (O; \vec{u}; \vec{v}) = - \text{Aire orientée } (O; \vec{v}; \vec{u})$$

Soit les mesures

$$\text{Aire orientée } (O; \vec{u}_x; \vec{v}_y) = u_x \cdot v_y \cdot \sin(\vec{i}, \vec{j})$$

$$\text{Aire orientée } (O; \vec{u}_y; \vec{v}_x) = u_y \cdot v_x \cdot \sin(\vec{i}, \vec{j})$$

Qui permettent d'écrire :

$$\text{Aire orientée } (O; \vec{u}; \vec{v}) = (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot \sin(\vec{i}, \vec{j})$$

La quantité $u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x = \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = \text{Det}(\vec{u}; \vec{v})$ est appelé « déterminant » des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, avec une notion d'ordre dans la façon dont on énumère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\text{Det}(\vec{u}; \vec{v}) = -\text{Det}(\vec{v}; \vec{u})$.

Dans le repère quelconque $(O ; \vec{i} ; \vec{j})_{2D}$, la mesure principale de l'angle saillant $(\vec{u}, \vec{v})$ est de signe contraire à la mesure principale de l'angle saillant $(\vec{i}, \vec{j})$ si $u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x$ est négatif, et ces angles sont alors orientés en sens contraires. Si $u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x$ est positif, ces angles sont orientés en sens identiques.

Note : la comparaison de l'orientation de deux angles est une perception empirique. Par ce terme « empirique » appliqué à ce cas, j'entends qu'il existe des directions et des sens dans l'espace qu'il serait inepte de vouloir démontrer avec des notions de directions et de sens. La perception empirique prend alors une valeur d'axiome, et c'est une valeur suffisante pour garantir la justesse d'un raisonnement et les correspondances des mesures aux apparences. On compare donc les sens des angles (par la perception d'un « chemin » du premier objet nommé au second) et on perçoit s'ils sont identiques ou contraires. Il y a des angles rentrants et saillants. On peut comparer saillant et saillant, saillant et rentrant, rentrant et rentrant. On peut édicter des règles pour chacun de ces cas, afin que chacune mette en accord les mesures d'angle avec une mesure de $(\vec{i}, \vec{j})$. Si on compare les sens de deux angles saillants et que ces sens sont contraires, les mesures de ces angles sont de signes contraires, sinon elles sont identiques.

Produit vectoriel dans un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})_{3D}$, avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ appartenant au plan $(O ; \vec{i} ; \vec{j})_{2D}$

Le produit vectoriel est orienté non pas selon le signe d'une mesure algébrique, comme l'est un angle dans le repère d'un plan ou un point dans le repère d'une droite, mais selon une des deux orientations de l'espace 3D possibles, données par exemple par la règle des trois doigts. Le vecteur produit vectoriel se définit donc par lui-même dans son repère local $(O ; \frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{||\vec{u} \wedge \vec{v}||})_{1D}$, avec $\frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{||\vec{u} \wedge \vec{v}||}$ vecteur orthogonal au plan $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ orienté selon un des deux choix d'orientation de l'espace, tel que :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} =_{\substack{\vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}} ||\vec{u}|| ||\vec{v}|| \cdot |\sin(\vec{u}, \vec{v})| \cdot \frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{||\vec{u} \wedge \vec{v}||}$$

Il en va de même pour le produit vectoriel des vecteurs unitaires d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})_{2D}$, avec $\frac{\vec{i} \wedge \vec{j}}{||\vec{i} \wedge \vec{j}||}$ vecteur orthogonal au plan $(O ; \vec{i} ; \vec{j})_{2D}$ orienté selon un des deux choix d'orientation de l'espace :

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = |\sin(\vec{i}, \vec{j})| \cdot \frac{\vec{i} \wedge \vec{j}}{||\vec{i} \wedge \vec{j}||}$$

On développe donc les coordonnées vectorielles, pour trouver une expression dans $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})_{3D}$, pour obtenir $\vec{u} \wedge \vec{v}$:

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &=_{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}} (u_x \cdot \vec{i} + u_y \cdot \vec{j}) \wedge (v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j}) \\ &= u_x \cdot v_x \cdot \vec{i} \wedge \vec{i} + u_x \cdot v_y \cdot \vec{i} \wedge \vec{j} + u_y \cdot v_x \cdot \vec{j} \wedge \vec{i} + u_y \cdot v_y \cdot \vec{j} \wedge \vec{j} = (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot \vec{i} \wedge \vec{j} \end{aligned}$$

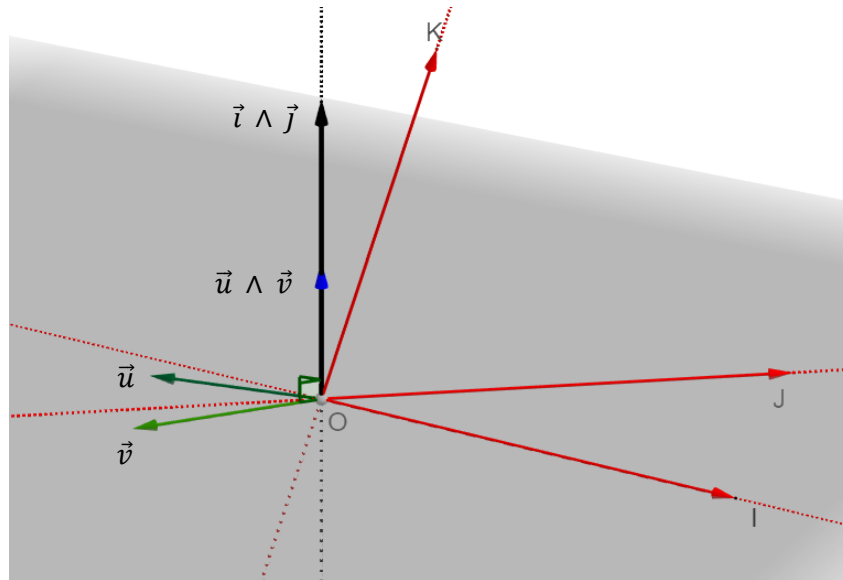
$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &=_{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}} (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot |\sin(\vec{i}, \vec{j})| \cdot \frac{\vec{i} \wedge \vec{j}}{||\vec{i} \wedge \vec{j}||} \\ &=_{\substack{\vec{u} \wedge \vec{v} \in \left(O; \frac{\vec{i} \wedge \vec{j}}{||\vec{i} \wedge \vec{j}||} \right)_{1D}}} \end{aligned}$$

La valeur algébrique $(u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot |\sin(\vec{i}, \vec{j})|$ doit être vue pour $\vec{u}; \vec{v} \in (O; \vec{i}; \vec{j})$ 2D comme la mesure de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dans un repère $(O; \frac{\vec{i} \wedge \vec{j}}{||\vec{i} \wedge \vec{j}||})$ 1D plongé dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ 3D. On ne peut plus la considérer comme la mesure d'une aire orientée dans $(O; \vec{i}; \vec{j})$ 2D, mais comme la mesure d'une longueur orientée dans $(O; \frac{\vec{i} \wedge \vec{j}}{||\vec{i} \wedge \vec{j}||})$ 1D.

Le signe de cette mesure traduit alors dans l'espace le fait que les angles $(\vec{i}, \vec{j})$ et $(\vec{u}, \vec{v})$ sont orientés de façon contraire ou identique.

Si $u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x < 0$, les angles $(\vec{i}, \vec{j})$ et $(\vec{u}, \vec{v})$ sont orientés de façon contraire et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ pointe en sens contraire de $\vec{i} \wedge \vec{j}$. Si $u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x > 0$, les angles $(\vec{i}, \vec{j})$ et $(\vec{u}, \vec{v})$ sont orientés de façons identiques et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ pointe dans le même sens que $\vec{i} \wedge \vec{j}$.

Note : on utilise $|\sin(\vec{i}, \vec{j})|$ et non pas $\sin(\vec{i}, \vec{j})$ dans la construction historique de l'outil « produit vectoriel ». Sur la figure ci-dessous, on voit $\frac{\vec{i} \wedge \vec{j}}{||\vec{i} \wedge \vec{j}||}$ et $\frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{||\vec{u} \wedge \vec{v}||}$ orientés de la même façon selon une convention directe retenue pour l'orientation de l'espace, et on a $u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x > 0$ puisque les angles $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{i}, \vec{j})$ sont de même orientation dans $(O; \vec{i}; \vec{j})$ 2D (les mesures principales de leurs angles saillants sont de même signe). Si on avait défini $\vec{i} \wedge \vec{j} = |\sin(\vec{i}, \vec{j})| \cdot \frac{\vec{i} \wedge \vec{j}}{||\vec{i} \wedge \vec{j}||}$ sans mettre en valeur absolue $\sin(\vec{i}, \vec{j})$, il suffirait d'avoir défini $\sin(\vec{i}, \vec{j}) < 0$ en donnant une mesure négative à la mesure principale de son angle saillant, pour aboutir à une contradiction : $\frac{\vec{i} \wedge \vec{j}}{||\vec{i} \wedge \vec{j}||}$ pointerait en sens inverse de $\frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{||\vec{u} \wedge \vec{v}||}$, pour une même convention d'orientation de l'espace appliquée à deux angles de même orientation.



On retrouve l'invariance de $||\vec{u} \wedge \vec{v}||$ dans son repère local $(O; \frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{||\vec{u} \wedge \vec{v}||})$ 1D en utilisant les formules des coordonnées d'un point dans un repère quelconque :

Avec $\sin[(\vec{i}, \vec{j}) - (\vec{i}, \vec{u})] = \sin(\vec{u}, \vec{j})$ et $\sin[(\vec{i}, \vec{j}) - (\vec{i}, \vec{v})] = \sin(\vec{v}, \vec{j})$ on a :

$$u_x = \frac{||\vec{u}|| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{j})}{\sin(\vec{i}, \vec{j})} ; u_y = \frac{||\vec{u}|| \cdot \sin(\vec{i}, \vec{u})}{\sin(\vec{i}, \vec{j})}$$

$$v_x = \frac{||\vec{v}|| \cdot \sin(\vec{v}, \vec{j})}{\sin(\vec{i}, \vec{j})} ; v_y = \frac{||\vec{v}|| \cdot \sin(\vec{i}, \vec{v})}{\sin(\vec{i}, \vec{j})}$$

Soit, avec la relation :

$$\sin(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\sin(\vec{u}, \vec{j}) \cdot \sin(\vec{i}, \vec{v}) - \sin(\vec{i}, \vec{u}) \cdot \sin(\vec{v}, \vec{j})}{\sin(\vec{i}, \vec{j})}$$

(que je me suis contenté de constater avec les valeurs du logiciel), on a dans $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})_{3D}$:

$$u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x = \frac{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v})}{\sin(\vec{i}, \vec{j})}$$

D'où :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \underset{\vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}{=} \frac{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v})}{\sin(\vec{i}, \vec{j})} \cdot |\sin(\vec{i}, \vec{j})| \cdot \frac{\vec{i} \wedge \vec{j}}{||\vec{i} \wedge \vec{j}||}$$

On revoit à nouveau que si $\sin(\vec{u}, \vec{v})$ et $\sin(\vec{i}, \vec{j})$ sont de même signe, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\vec{i} \wedge \vec{j}$ pointent dans le même sens. Si $\sin(\vec{u}, \vec{v})$ et $\sin(\vec{i}, \vec{j})$ sont de signes contraires, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\vec{i} \wedge \vec{j}$ pointent en sens contraire. Le signe du déterminant $u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x$ dit donc l'orientation relative de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\vec{i} \wedge \vec{j}$.

On retrouve aussi :

$$||\vec{u} \wedge \vec{v}|| \underset{\vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}{=} \left| \frac{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v})}{\sin(\vec{i}, \vec{j})} \cdot |\sin(\vec{i}, \vec{j})| \right| = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \underset{\vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}{=} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot |\sin(\vec{u}, \vec{v})| \cdot \frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{||\vec{u} \wedge \vec{v}||}$$

Dans un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})_{3D}$, avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ appartenant à tout l'espace 3D

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})_{3D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}}}{=} (u_x \cdot \vec{i} + u_y \cdot \vec{j} + u_z \cdot \vec{k}) \wedge (v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k})$$

$$= (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot \vec{i} \wedge \vec{j} + (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) \cdot \vec{j} \wedge \vec{k} + (u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z) \cdot \vec{k} \wedge \vec{i}$$

Avec, dans le repère quelconque, les coordonnées des produits vectoriels des vecteurs unitaires (explicitées dans le chapitre 2) :

$$\begin{aligned} (\vec{i} \wedge \vec{j}) &= (ij)_x \cdot \vec{i} + (ij)_y \cdot \vec{j} + (ij)_z \cdot \vec{k} \\ (\vec{j} \wedge \vec{k}) &= (jk)_x \cdot \vec{i} + (jk)_y \cdot \vec{j} + (jk)_z \cdot \vec{k} \\ (\vec{k} \wedge \vec{i}) &= (ki)_x \cdot \vec{i} + (ki)_y \cdot \vec{j} + (ki)_z \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

$$(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \quad \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \quad \left(\begin{array}{l} (uv)_x \cdot \vec{i} = \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} \cdot (ij)_x + \begin{vmatrix} u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{vmatrix} \cdot (jk)_x + \begin{vmatrix} u_z & v_z \\ u_x & v_x \end{vmatrix} \cdot (ki)_x \cdot \vec{i} \\ (uv)_y \cdot \vec{j} = \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} \cdot (ij)_y + \begin{vmatrix} u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{vmatrix} \cdot (jk)_y + \begin{vmatrix} u_z & v_z \\ u_x & v_x \end{vmatrix} \cdot (ki)_y \cdot \vec{j} \\ (uv)_z \cdot \vec{k} = \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} \cdot (ij)_z + \begin{vmatrix} u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{vmatrix} \cdot (jk)_z + \begin{vmatrix} u_z & v_z \\ u_x & v_x \end{vmatrix} \cdot (ki)_z \cdot \vec{k} \end{array} \right)$$

Ou encore dans un repère $(O; \frac{\vec{i} \wedge \vec{j}}{||\vec{i} \wedge \vec{j}||}; \frac{\vec{j} \wedge \vec{k}}{||\vec{j} \wedge \vec{k}||}; \frac{\vec{k} \wedge \vec{i}}{||\vec{k} \wedge \vec{i}||})$

$$(\vec{u}; \vec{v}) \in \left(O; \frac{\vec{i} \wedge \vec{j}}{||\vec{i} \wedge \vec{j}||}; \frac{\vec{j} \wedge \vec{k}}{||\vec{j} \wedge \vec{k}||}; \frac{\vec{k} \wedge \vec{i}}{||\vec{k} \wedge \vec{i}||} \right) \quad \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \quad \left(\begin{array}{l} (uv)'_x \cdot \frac{\vec{i} \wedge \vec{j}}{||\vec{i} \wedge \vec{j}||} = \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} \cdot |\sin(\vec{i}, \vec{j})| \cdot \frac{\vec{i} \wedge \vec{j}}{||\vec{i} \wedge \vec{j}||} \\ (uv)'_y \cdot \frac{\vec{j} \wedge \vec{k}}{||\vec{j} \wedge \vec{k}||} = \begin{vmatrix} u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{vmatrix} \cdot |\sin(\vec{j}, \vec{k})| \cdot \frac{\vec{j} \wedge \vec{k}}{||\vec{j} \wedge \vec{k}||} \\ (uv)'_z \cdot \frac{\vec{k} \wedge \vec{i}}{||\vec{k} \wedge \vec{i}||} = \begin{vmatrix} u_z & v_z \\ u_x & v_x \end{vmatrix} \cdot |\sin(\vec{k}, \vec{i})| \cdot \frac{\vec{k} \wedge \vec{i}}{||\vec{k} \wedge \vec{i}||} \end{array} \right)$$

On ne peut pas identifier ces formulations générales de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ à une longueur orientée dans un repère local 1D plongé dans $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}$ ou $(O; \frac{\vec{i} \wedge \vec{j}}{||\vec{i} \wedge \vec{j}||}; \frac{\vec{j} \wedge \vec{k}}{||\vec{j} \wedge \vec{k}||}; \frac{\vec{k} \wedge \vec{i}}{||\vec{k} \wedge \vec{i}||})$. On ne sait qu'en calculer la norme selon les coordonnées, invariantes dans les deux repères :

$$||\vec{u} \wedge \vec{v}||_{(\vec{u}; \vec{v}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \atop \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}} = \left[(uv)_x^2 + (uv)_y^2 + (uv)_z^2 + 2(uv)_x \cdot (uv)_y \cdot \cos(\vec{i}, \vec{j}) + 2 \cdot (uv)_z \cdot (uv)_y \cdot \cos(\vec{j}, \vec{k}) + 2 \cdot (uv)_z \cdot (uv)_x \cdot \cos(\vec{k}, \vec{i}) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$||\vec{u} \wedge \vec{v}||_{(\vec{u}; \vec{v}) \in \left(O; \frac{\vec{i} \wedge \vec{j}}{||\vec{i} \wedge \vec{j}||}; \frac{\vec{j} \wedge \vec{k}}{||\vec{j} \wedge \vec{k}||}; \frac{\vec{k} \wedge \vec{i}}{||\vec{k} \wedge \vec{i}||} \right)_{3D} \atop \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}} = \left[(uv)'_x^2 + (uv)'_y^2 + (uv)'_z^2 + 2(uv)'_x \cdot (uv)'_y \cdot \cos\left(\frac{\vec{i} \wedge \vec{j}}{||\vec{i} \wedge \vec{j}||}, \frac{\vec{j} \wedge \vec{k}}{||\vec{j} \wedge \vec{k}||}\right) + 2 \cdot (uv)'_z \cdot (uv)'_y \cdot \cos\left(\frac{\vec{j} \wedge \vec{k}}{||\vec{j} \wedge \vec{k}||}, \frac{\vec{k} \wedge \vec{i}}{||\vec{k} \wedge \vec{i}||}\right) + 2 \cdot (uv)'_z \cdot (uv)'_x \cdot \cos\left(\frac{\vec{k} \wedge \vec{i}}{||\vec{k} \wedge \vec{i}||}, \frac{\vec{i} \wedge \vec{j}}{||\vec{i} \wedge \vec{j}||}\right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

Avec :

$$\cos\left(\frac{\vec{i} \wedge \vec{j}}{||\vec{i} \wedge \vec{j}||}, \frac{\vec{j} \wedge \vec{k}}{||\vec{j} \wedge \vec{k}||}\right) = \frac{\vec{i} \wedge \vec{j}}{||\vec{i} \wedge \vec{j}||} \boxtimes \frac{\vec{j} \wedge \vec{k}}{||\vec{j} \wedge \vec{k}||} = \frac{(ij)_x \cdot \vec{i} + (ij)_y \cdot \vec{j} + (ij)_z \cdot \vec{k}}{|\sin(\vec{i}, \vec{j})|} \boxtimes \frac{(jk)_x \cdot \vec{i} + (jk)_y \cdot \vec{j} + (jk)_z \cdot \vec{k}}{|\sin(\vec{j}, \vec{k})|} =$$

$$\frac{(ij)_x \cdot (jk)_x + (ij)_y \cdot (jk)_y + (ij)_z \cdot (jk)_z + \begin{vmatrix} (ij)_x & (jk)_x \\ (ij)_y & (jk)_y \end{vmatrix} \cdot \cos(\vec{i}, \vec{j}) + \begin{vmatrix} (ij)_y & (jk)_y \\ (ij)_z & (jk)_z \end{vmatrix} \cdot \cos(\vec{j}, \vec{k}) + \begin{vmatrix} (ij)_z & (jk)_z \\ (ij)_x & (jk)_x \end{vmatrix} \cdot \cos(\vec{k}, \vec{i})}{|\sin(\vec{i}, \vec{j})| \cdot |\sin(\vec{j}, \vec{k})|}$$

$$\cos\left(\frac{\vec{j} \wedge \vec{k}}{\|\vec{j} \wedge \vec{k}\|}, \frac{\vec{k} \wedge \vec{i}}{\|\vec{k} \wedge \vec{i}\|}\right) =$$

$$\frac{(jk)_x \cdot (ki)_x + (jk)_y \cdot (ki)_y + (jk)_z \cdot (ki)_z + \begin{vmatrix} (jk)_x & (ki)_x \\ (jk)_y & (ki)_y \end{vmatrix} \cdot \cos(\vec{j}, \vec{k}) + \begin{vmatrix} (jk)_y & (ki)_y \\ (jk)_z & (ki)_z \end{vmatrix} \cdot \cos(\vec{k}, \vec{i}) + \begin{vmatrix} (jk)_z & (ki)_z \\ (jk)_x & (ki)_x \end{vmatrix} \cdot \cos(\vec{i}, \vec{j})}{|\sin(\vec{j}, \vec{k})| \cdot |\sin(\vec{k}, \vec{i})|}$$

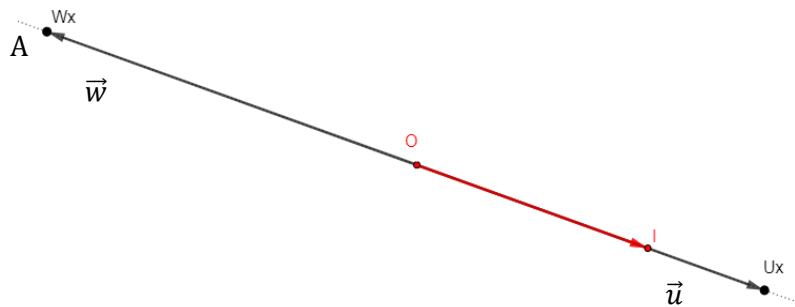
$$\cos\left(\frac{\vec{k} \wedge \vec{i}}{\|\vec{k} \wedge \vec{i}\|}, \frac{\vec{i} \wedge \vec{j}}{\|\vec{i} \wedge \vec{j}\|}\right) =$$

$$\frac{(ki)_x \cdot (ij)_x + (ki)_y \cdot (ij)_y + (ki)_z \cdot (ij)_z + \begin{vmatrix} (ki)_x & (ij)_x \\ (ki)_y & (ij)_y \end{vmatrix} \cdot \cos(\vec{k}, \vec{i}) + \begin{vmatrix} (ki)_y & (ij)_y \\ (ki)_z & (ij)_z \end{vmatrix} \cdot \cos(\vec{i}, \vec{j}) + \begin{vmatrix} (ki)_z & (ij)_z \\ (ki)_x & (ij)_x \end{vmatrix} \cdot \cos(\vec{j}, \vec{k})}{|\sin(\vec{k}, \vec{i})| \cdot |\sin(\vec{i}, \vec{j})|}$$

3.3 Résolutions des systèmes d'équations de combinaisons linéaires de vecteurs

Jusqu'à présent, produit et sommes de matrices n'ont consisté qu'à présenter de façon compacte sous forme de tableaux de nombres et de variables des systèmes d'équations. Il est possible d'utiliser cette présentation pour effectuer les calculs permettant de résoudre ces équations. Les solutions des systèmes d'équations dans un espace 1D sont des proportionnalités de longueurs, dans un espace 2D des proportionnalités de surfaces, dans un espace 3D des proportionnalités de volumes, dans un espace 4D des proportionnalités d'objet 4D, etc. Ce sont ces très belles réalités géométriques qu'on va montrer, sans prétendre les démontrer ici de façon générale et abstraite. Ce sont les visions simples, claires et immédiates qui ont le pouvoir de faire désirer, réaliser et comprendre les démonstrations plus abstraites.

Dans les repères de $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})1D$



Soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ non nuls appartenant à une droite $(O; \vec{i})1D$, tel que

$$\vec{w} = \overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OA} = \lambda_u \cdot \vec{u}$$

On a la combinaison linéaire $\vec{w} = \lambda_u \cdot \vec{u}$ et on peut résoudre le système d'une équation à une inconnue $\{w_x = \lambda_u \cdot u_x\}$ par des rapports de longueurs orientées. *longueur_{1u}* est la longueur orientée de la droite

construite sur $\vec{u}$. Elle dépend des coordonnées de ce vecteur dans le repère $(O; \vec{i})$ 1D. Mêmes remarques pour longueur2w qui est la longueur orientée de la droite construite sur $\vec{w}$:

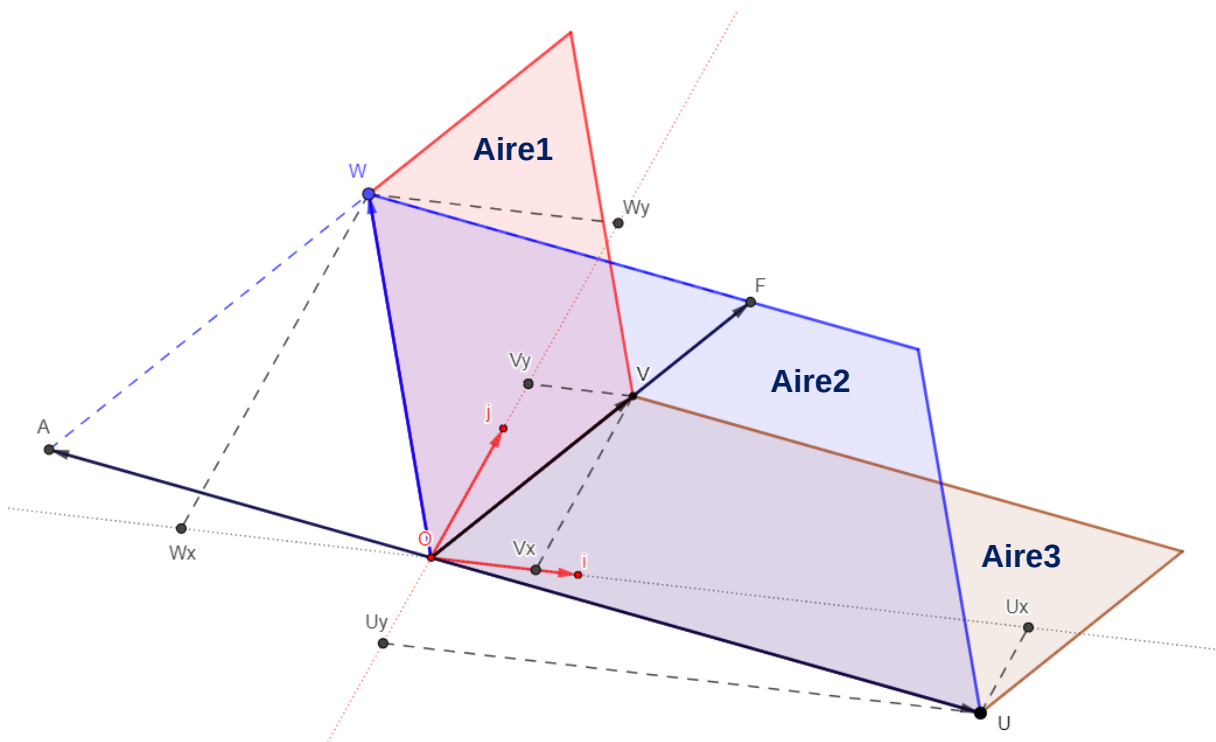
$$\lambda_u = \frac{\text{longueur2w}}{\text{longueur1u}} = \frac{w_x}{u_x}$$

Ce qui résout le système $\{w_x = \lambda_u \cdot u_x\}$. On procède de même dans les repères $(O; \vec{j})$ 1D, $(O; \vec{k})$ 1D.

Si $\vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{w} = \vec{0}$, λ_u prend une infinité de valeurs. Si $\vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{w} \neq \vec{0}$, alors $\lambda_u = 0$ mais pour d'autres raisons qu'une division de longueurs.

Note : Une longueur orientée peut aussi être vue comme le déterminant d'un seul vecteur dans un repère 1D :
 $\text{Det}(\vec{u})_{\vec{u} \in (O; \vec{i}) 1D} = u_x$.

Dans les repères de $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ 2D



Soit les vecteurs $\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}$ non nuls appartenant au plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$ 2D, tel que

$$\vec{w} = \vec{OA} + \vec{OF} ; \vec{OA} = \lambda_u \cdot \vec{u} ; \vec{OF} = \lambda_v \cdot \vec{v}$$

On a la combinaison linéaire $\vec{w} = \lambda_u \cdot \vec{u} + \lambda_v \cdot \vec{v}$ et on peut résoudre le système de deux équations à deux inconnues $\begin{cases} w_x = \lambda_u \cdot u_x + \lambda_v \cdot v_x \\ w_y = \lambda_u \cdot u_y + \lambda_v \cdot v_y \end{cases}$ par des rapports d'aires orientées.

aire1wv est l'aire orientée du parallélogramme construit sur $\vec{w}$ et $\vec{v}$. Elle dépend des coordonnées de ces vecteurs dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et, si on en décide ainsi, de l'orientation donnée par le signe de $\sin(\vec{i}, \vec{j})$ à ce plan. Par contre comme on le voit ci-dessus ce dernier paramètre s'annule par division et la résolution des équations ne dépend donc pas de l'orientation du repère, ni du fait qu'il soit orthonormé ou quelconque. Mêmes remarques pour aire2uw qui est l'aire orientée du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{w}$ et pour aire3uv qui est l'aire orientée du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\lambda_u = \frac{\text{aire1}wv}{\text{aire3}uv} = \frac{\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \begin{vmatrix} w_x & v_x \\ w_y & v_y \end{vmatrix}}{\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix}} = \frac{\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \text{Det}(\vec{w}; \vec{v})}{\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \text{Det}(\vec{u}; \vec{v})} = \frac{\text{Det}(\vec{w}; \vec{v})}{\text{Det}(\vec{u}; \vec{v})}$$

$$\lambda_v = \frac{\text{aire2}uw}{\text{aire3}uv} = \frac{\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \begin{vmatrix} u_x & w_x \\ u_y & w_y \end{vmatrix}}{\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix}} = \frac{\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \text{Det}(\vec{u}; \vec{w})}{\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \text{Det}(\vec{u}; \vec{v})} = \frac{\text{Det}(\vec{u}; \vec{w})}{\text{Det}(\vec{u}; \vec{v})}$$

Note : la constante $\sin(\vec{i}, \vec{j})$ est un cas particulier de la constante a , qui sera théorisé plus loin. On verra au chapitre 5 qu'on a :

$$a = \psi_n \cdot \xi_n \cdot |\cos((\vec{e}_1), \vec{e}_1)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3)| \dots |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_{m-1}), \vec{e}_m)|$$

Qui ici, dans un objet repère du plan s'écrit :

$$a = \psi_2 \cdot \xi_2 \cdot |\sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2)|$$

Avec $\psi_2 = 1$:

$$a = \xi_2 \cdot |\sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2)| = \sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2) = \sin(\vec{i}, \vec{j})$$

Ce qui résout le système $\begin{cases} w_x = \lambda_u \cdot u_x + \lambda_v \cdot v_x \\ w_y = \lambda_u \cdot u_y + \lambda_v \cdot v_y \end{cases}$.

Si $\text{Det}(\vec{u}; \vec{v}) = 0$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Si de plus $\text{Det}(\vec{u}; \vec{w}) = 0$ alors $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires (et on a donc aussi $\text{Det}(\vec{w}; \vec{v}) = 0$). Sous cette double condition, l'application linéaire $\vec{w} = \lambda_u \cdot \vec{u} + \lambda_v \cdot \vec{v}$ admet une infinité de combinaisons et l'ensemble des solutions du système d'équations est $\lambda_u \in \mathbb{R}$ et $\lambda_v \in \mathbb{R}$.

Si $\text{Det}(\vec{u}; \vec{v}) = 0$ et si par exemple $\text{Det}(\vec{u}; \vec{w}) \neq 0$ alors $\vec{w}$ n'est pas dans l'espace 1D dimensionné par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Sous cette double condition, l'application linéaire $\vec{w} = \lambda_u \cdot \vec{u} + \lambda_v \cdot \vec{v}$ n'admet aucune combinaison et l'ensemble des solutions du système d'équations est vide.

Mais pourquoi avoir disposé ainsi les déterminants ? On liste à nouveau toutes les coordonnées vectorielles en fonction de l'orientation du repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, pour essayer de s'en faire une idée :

$$u_x = \frac{||\vec{u}|| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{j})}{\sin(\vec{i}, \vec{j})} \quad ; \quad u_y = \frac{||\vec{u}|| \cdot \sin(\vec{i}, \vec{u})}{\sin(\vec{i}, \vec{j})}$$

$$v_x = \frac{||\vec{v}|| \cdot \sin(\vec{v}, \vec{j})}{\sin(\vec{i}, \vec{j})} \quad ; \quad v_y = \frac{||\vec{v}|| \cdot \sin(\vec{i}, \vec{v})}{\sin(\vec{i}, \vec{j})}$$

$$w_x = \frac{||\vec{w}|| \cdot \sin(\vec{w}, \vec{j})}{\sin(\vec{i}, \vec{j})} \quad ; \quad w_y = \frac{||\vec{w}|| \cdot \sin(\vec{i}, \vec{w})}{\sin(\vec{i}, \vec{j})}$$

Les signes des coordonnées dépendent des écarts des vecteurs en présence dans le repère $(O; \vec{c}; \vec{s})$ implicite du cercle trigonométrique (pour lequel historiquement on a fixé $(\vec{c}, \vec{s}) = \frac{\pi}{2}$). Ainsi on a :

$$Aire1wv = \sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \begin{vmatrix} w_x & v_x \\ w_y & v_y \end{vmatrix} = \frac{||\vec{w}|| \cdot \sin(\vec{w}, \vec{j})}{\sin(\vec{i}, \vec{j})} \cdot \frac{||\vec{v}|| \cdot \sin(\vec{i}, \vec{v})}{\sin(\vec{i}, \vec{j})} - \frac{||\vec{w}|| \cdot \sin(\vec{i}, \vec{w})}{\sin(\vec{i}, \vec{j})} \cdot \frac{||\vec{v}|| \cdot \sin(\vec{v}, \vec{j})}{\sin(\vec{i}, \vec{j})}$$

Or on a là aussi :

$$\frac{\sin(\vec{w}, \vec{j}) \cdot \sin(\vec{i}, \vec{v}) - \sin(\vec{i}, \vec{w}) \cdot \sin(\vec{v}, \vec{j})}{\sin(\vec{i}, \vec{j})} = \sin(\vec{w}, \vec{v})$$

Et donc, puisque $\sin(\vec{w}, \vec{v}) = -\sin(\vec{v}, \vec{w})$:

$$\begin{vmatrix} w_x & v_x \\ w_y & v_y \end{vmatrix} = ||\vec{w}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \sin(\vec{w}, \vec{v}) = - \begin{vmatrix} v_x & w_x \\ v_y & w_y \end{vmatrix} = -||\vec{v}|| \cdot ||\vec{w}|| \cdot \sin(\vec{v}, \vec{w})$$

Soit le résultat que finalement on connaissait déjà, mais qui prouve $Det(\vec{w}; \vec{v}) = -Det(\vec{v}; \vec{w})$.

Note : par permutation circulaire dans l'expression développée du déterminant 2x2, ou en redéveloppant celui-ci à partir de l'écriture compactée, on montre que :

$$Det(\vec{w}; \vec{v}) = -Det(\vec{v}; \vec{w})$$

Mais pour le calcul des inconnues des équations, l'orientation du repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ n'est plus contraignante. On s'aperçoit alors que les signes des coordonnées dépendent de l'orientation relative des angles. Dans un repère de la droite (OAU) on peut écrire un rapport de mesures algébriques :

$$\lambda_u = \frac{\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \begin{vmatrix} w_x & v_x \\ w_y & v_y \end{vmatrix}}{\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix}} = \frac{||\vec{w}|| \cdot \sin(\vec{w}, \vec{v})}{||\vec{u}|| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v})} = \frac{OA}{OU}$$

Si l'angle $(\vec{w}, \vec{v})$ est d'orientation relative contraire à $(\vec{u}, \vec{v})$, on a $\lambda_u < 0$. Si ces angles sont de même orientation relative, $\lambda_u > 0$.

Même remarque pour λ_v dans un repère de la droite (OFV) :

$$\lambda_v = \frac{\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \begin{vmatrix} u_x & w_x \\ u_y & w_y \end{vmatrix}}{\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix}} = \frac{||\vec{w}|| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{w})}{||\vec{v}|| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v})} = \frac{OF}{OV}$$

On procède de même dans les repères $(O; \vec{j}; \vec{k})_{2D}$, $(O; \vec{k}; \vec{i})_{2D}$.

Note : si on avait écrit $\lambda_u = \frac{\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \begin{vmatrix} v_x & w_x \\ v_y & w_y \end{vmatrix}}{\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix}}$, en positionnant dans la colonne de droite les coordonnées de $\vec{w}$,

et non pas à gauche, on aurait eu les angles $(\vec{v}, \vec{w})$ et $(\vec{u}, \vec{v})$ de mêmes orientations en considérant la figure ci-

dessus. Donc on aurait eu $\lambda_u = \frac{\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \begin{vmatrix} v_x & w_x \\ v_y & w_y \end{vmatrix}}{\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix}} = \frac{||\vec{w}|| \cdot \sin(\vec{v}, \vec{w})}{||\vec{u}|| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v})} = \frac{OA}{OU} > 0$. Or on voit bien sur la figure que dans

le repère de la droite (OAU) les mesures algébriques OA et OU sont de signes contraires (ce raisonnement ne prétend pas être une démonstration).

Dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}$

Soit les vecteurs $\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}; \vec{m}$ non nuls appartenant à l'espace $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}$, tel que

$$\vec{m} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OS} ; \overrightarrow{OA} = \lambda_u \cdot \vec{u} ; \overrightarrow{OF} = \lambda_v \cdot \vec{v} ; \overrightarrow{OS} = \lambda_w \cdot \vec{w}$$

On a la combinaison linéaire $\vec{m} = \lambda_u \cdot \vec{u} + \lambda_v \cdot \vec{v} + \lambda_w \cdot \vec{w}$ et on peut résoudre le système de trois équations à

$$\text{trois inconnues} \begin{cases} m_x = \lambda_u \cdot u_x + \lambda_v \cdot v_x + \lambda_w \cdot w_x \\ m_y = \lambda_u \cdot u_y + \lambda_v \cdot v_y + \lambda_w \cdot w_y \\ m_z = \lambda_u \cdot u_z + \lambda_v \cdot v_z + \lambda_w \cdot w_z \end{cases} \text{ par des rapports de volumes orientés.}$$

volume1 est le volume orienté du parallélépipède construit sur $\vec{m}; \vec{u}; \vec{v}$. Il est donné par le produit mixte. Il est figuré ci-dessous en bleu par les représentants de ces vecteurs :

$$volume1 = \vec{m} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v})$$

volume2 est le volume orienté du parallélépipède construit sur $\vec{w}; \vec{m}; \vec{v}$. Il est donné par le produit mixte. Il est figuré ci-dessous en marron par les représentants de ces vecteurs :

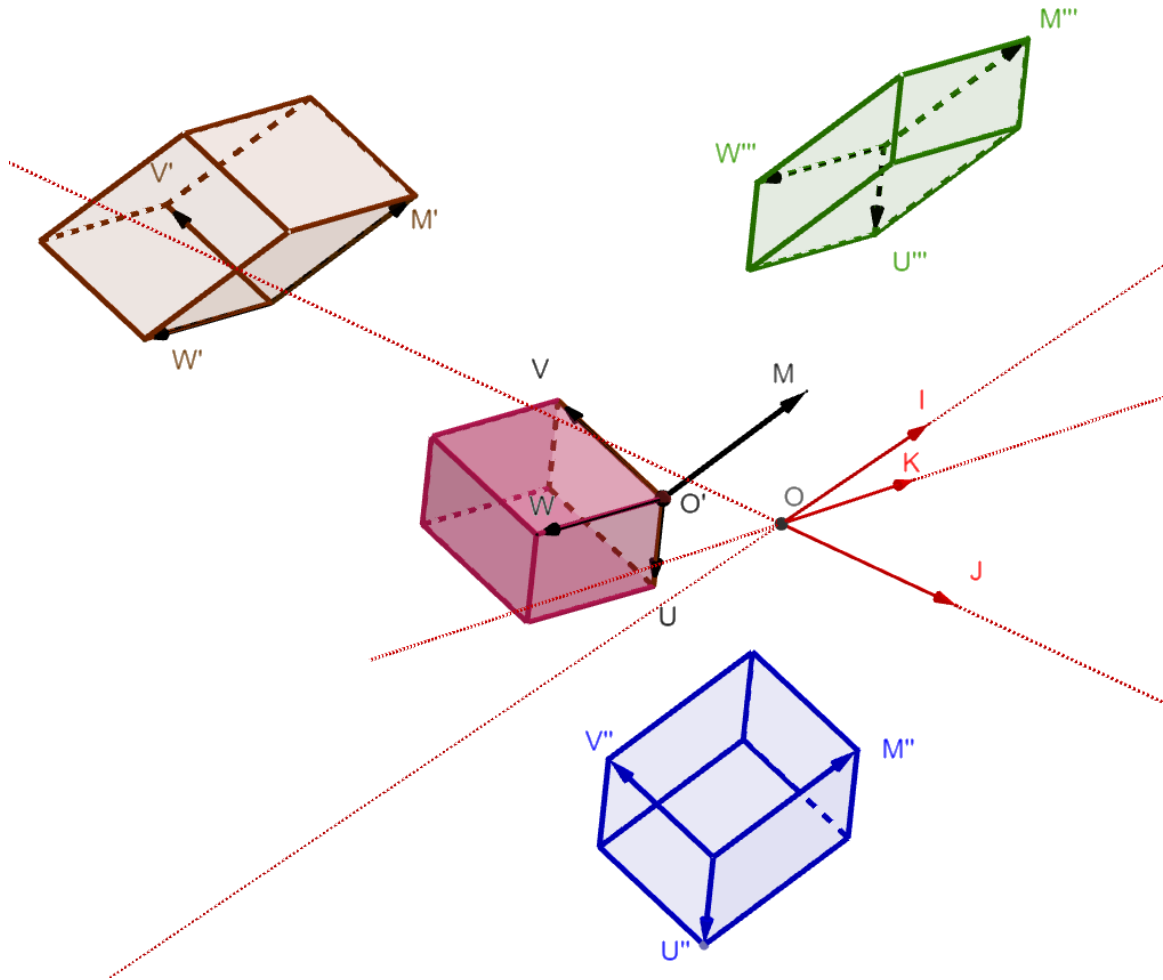
$$volume2 = \vec{v} \boxtimes (\vec{m} \wedge \vec{u})$$

volume3 est le volume orienté du parallélépipède construit sur $\vec{u}; \vec{w}; \vec{m}$. Il est donné par le produit mixte. Il est figuré ci-dessous en vert par les représentants de ces vecteurs :

$$volume3 = \vec{u} \boxtimes (\vec{w} \wedge \vec{m})$$

volume4 est le volume orienté du parallélépipède construit sur $\vec{w}; \vec{u}; \vec{v}$. Il est donné par le produit mixte. Il est figuré ci-dessous en rose par les représentants de ces vecteurs :

$$volume4 = \vec{w} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v})$$



Le principe mnémotechnique est le suivant. On choisit un des trois produits mixtes possibles avec $\vec{w}$; $\vec{u}$; $\vec{v}$, par exemple $\vec{w} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v})$. On place ensuite au numérateur le même produit mixte, dans lequel on substitue successivement le vecteur $\vec{m}$ à chacun des vecteurs $\vec{w}$; $\vec{u}$; $\vec{v}$. Le vecteur manquant est celui qui se multiplie au scalaire λ que l'on cherche :

$$\lambda_u = \frac{\text{volume3}}{\text{volume4}} = \frac{\vec{w} \boxtimes (\vec{m} \wedge \vec{v})}{\vec{w} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v})} = \frac{OA}{OU}$$

$$\lambda_v = \frac{\text{volume2}}{\text{volume4}} = \frac{\vec{w} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{m})}{\vec{w} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v})} = \frac{OF}{OV}$$

$$\lambda_w = \frac{\text{volume1}}{\text{volume4}} = \frac{\vec{m} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v})}{\vec{w} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v})} = \frac{OS}{OW}$$

Si $\vec{w} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires. Si de plus $\vec{w} \boxtimes (\vec{m} \wedge \vec{v}) = 0$ alors $\vec{w}$ et $\vec{v}$ et $\vec{m}$ sont coplanaires (et on a donc aussi $\vec{w} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{m}) = \vec{m} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$). Sous cette double condition, l'application linéaire $\vec{m} = \lambda_u \cdot \vec{u} + \lambda_v \cdot \vec{v} + \lambda_w \cdot \vec{w}$ admet une infinité de combinaisons et l'ensemble des solutions du système d'équations est $\lambda_u \in \mathbb{R}$ et $\lambda_v \in \mathbb{R}$ et $\lambda_w \in \mathbb{R}$

Si $\vec{w} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$ et si par exemple $\vec{w} \boxtimes (\vec{m} \wedge \vec{v}) \neq 0$ alors $\vec{m}$ n'est pas dans l'espace 2D dimensionné par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Sous cette double condition, l'application linéaire $\vec{m} = \lambda_u \cdot \vec{u} + \lambda_v \cdot \vec{v} + \lambda_w \cdot \vec{w}$ n'admet aucune combinaison et l'ensemble des solutions du système d'équations est vide.

Soit les développés:

$$\lambda_u = \frac{\begin{pmatrix} w_x \cdot (mv)_x + w_y \cdot (mv)_y + w_z \cdot (mv)_z + \cos(\vec{l}, \vec{j}) \cdot (w_x \cdot (mv)_y + w_y \cdot (mv)_x) \\ + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (w_y \cdot (mv)_z + w_z \cdot (mv)_y) + \cos(\vec{k}, \vec{l}) \cdot (w_z \cdot (mv)_x + w_x \cdot (mv)_z) \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} w_x \cdot (uv)_x + w_y \cdot (uv)_y + w_z \cdot (uv)_z + \cos(\vec{l}, \vec{j}) \cdot (w_x \cdot (uv)_y + w_y \cdot (uv)_x) \\ + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (w_y \cdot (uv)_z + w_z \cdot (uv)_y) + \cos(\vec{k}, \vec{l}) \cdot (w_z \cdot (uv)_x + w_x \cdot (uv)_z) \end{pmatrix}}$$

$$\lambda_v = \frac{\begin{pmatrix} w_x \cdot (um)_x + w_y \cdot (um)_y + w_z \cdot (um)_z + \cos(\vec{l}, \vec{j}) \cdot (w_x \cdot (um)_y + w_y \cdot (um)_x) \\ + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (w_y \cdot (um)_z + w_z \cdot (um)_y) + \cos(\vec{k}, \vec{l}) \cdot (w_z \cdot (um)_x + w_x \cdot (um)_z) \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} w_x \cdot (uv)_x + w_y \cdot (uv)_y + w_z \cdot (uv)_z + \cos(\vec{l}, \vec{j}) \cdot (w_x \cdot (uv)_y + w_y \cdot (uv)_x) \\ + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (w_y \cdot (uv)_z + w_z \cdot (uv)_y) + \cos(\vec{k}, \vec{l}) \cdot (w_z \cdot (uv)_x + w_x \cdot (uv)_z) \end{pmatrix}}$$

$$\lambda_w = \frac{\begin{pmatrix} m_x \cdot (uv)_x + m_y \cdot (uv)_y + m_z \cdot (uv)_z + \cos(\vec{l}, \vec{j}) \cdot (m_x \cdot (uv)_y + m_y \cdot (uv)_x) \\ + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (m_y \cdot (uv)_z + m_z \cdot (uv)_y) + \cos(\vec{k}, \vec{l}) \cdot (m_z \cdot (uv)_x + m_x \cdot (uv)_z) \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} w_x \cdot (uv)_x + w_y \cdot (uv)_y + w_z \cdot (uv)_z + \cos(\vec{l}, \vec{j}) \cdot (w_x \cdot (uv)_y + w_y \cdot (uv)_x) \\ + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (w_y \cdot (uv)_z + w_z \cdot (uv)_y) + \cos(\vec{k}, \vec{l}) \cdot (w_z \cdot (uv)_x + w_x \cdot (uv)_z) \end{pmatrix}}$$

On résout ces équations avec :

$$\begin{aligned} (mv)_x &= \begin{vmatrix} m_x & v_x \\ m_y & v_y \end{vmatrix} \cdot (ij)_x + \begin{vmatrix} m_y & v_y \\ m_z & v_z \end{vmatrix} \cdot (jk)_x + \begin{vmatrix} m_z & v_z \\ m_x & v_x \end{vmatrix} \cdot (ki)_x \\ (mv)_y &= \begin{vmatrix} m_x & v_x \\ m_y & v_y \end{vmatrix} \cdot (ij)_y + \begin{vmatrix} m_y & v_y \\ m_z & v_z \end{vmatrix} \cdot (jk)_y + \begin{vmatrix} m_z & v_z \\ m_x & v_x \end{vmatrix} \cdot (ki)_y \\ (mv)_z &= \begin{vmatrix} m_x & v_x \\ m_y & v_y \end{vmatrix} \cdot (ij)_z + \begin{vmatrix} m_y & v_y \\ m_z & v_z \end{vmatrix} \cdot (jk)_z + \begin{vmatrix} m_z & v_z \\ m_x & v_x \end{vmatrix} \cdot (ki)_z \\ (um)_x &= \begin{vmatrix} u_x & m_x \\ u_y & m_y \end{vmatrix} \cdot (ij)_x + \begin{vmatrix} u_y & m_y \\ u_z & m_z \end{vmatrix} \cdot (jk)_x + \begin{vmatrix} u_z & m_z \\ u_x & m_x \end{vmatrix} \cdot (ki)_x \\ (um)_y &= \begin{vmatrix} u_x & m_x \\ u_y & m_y \end{vmatrix} \cdot (ij)_y + \begin{vmatrix} u_y & m_y \\ u_z & m_z \end{vmatrix} \cdot (jk)_y + \begin{vmatrix} u_z & m_z \\ u_x & m_x \end{vmatrix} \cdot (ki)_y \\ (um)_z &= \begin{vmatrix} u_x & m_x \\ u_y & m_y \end{vmatrix} \cdot (ij)_z + \begin{vmatrix} u_y & m_y \\ u_z & m_z \end{vmatrix} \cdot (jk)_z + \begin{vmatrix} u_z & m_z \\ u_x & m_x \end{vmatrix} \cdot (ki)_z \\ (uv)_x &= \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} \cdot (ij)_x + \begin{vmatrix} u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{vmatrix} \cdot (jk)_x + \begin{vmatrix} u_z & v_z \\ u_x & v_x \end{vmatrix} \cdot (ki)_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (uv)_y &= \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} \cdot (ij)_y + \begin{vmatrix} u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{vmatrix} \cdot (jk)_y + \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_z & v_z \end{vmatrix} \cdot (ki)_y \\
 (uv)_z &= \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} \cdot (ij)_z + \begin{vmatrix} u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{vmatrix} \cdot (jk)_z + \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_z & v_z \end{vmatrix} \cdot (ki)_z
 \end{aligned}$$

Et :

$(ij)_x = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{ \sin(\vec{l}, \vec{j}) \cdot \sin(\vec{j}, \vec{OF}) \cdot \cos \delta}{ \sin \delta \cdot \sin(\vec{l}, \vec{j})}$	$(ij)_x = 0$ $\vec{k} \perp (O; \vec{l}; \vec{j})_{2D}$
$(ij)_y = -\psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{ \sin(\vec{l}, \vec{j}) \cdot \sin(\vec{l}, \vec{OF}) \cdot \cos \delta}{ \sin \delta \cdot \sin(\vec{l}, \vec{j})}$	$(ij)_y = 0$ $\vec{k} \perp (O; \vec{l}; \vec{j})_{2D}$
$(ij)_z = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{ \sin(\vec{l}, \vec{j}) }{ \sin \delta }$	$(ij)_z = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \sin(\vec{l}, \vec{j}) $ $\vec{k} \perp (O; \vec{l}; \vec{j})_{2D}$
$(jk)_x = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{ \sin(\vec{j}, \vec{k}) }{ \sin \gamma }$	$(jk)_x = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \sin(\vec{j}, \vec{k}) $ $\vec{l} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2D}$
$(jk)_y = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{ \sin(\vec{j}, \vec{k}) \cdot \sin(\vec{k}, \vec{OG}) \cdot \cos \gamma}{ \sin \gamma \cdot \sin(\vec{j}, \vec{k})}$	$(jk)_y = 0$ $\vec{l} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2D}$
$(jk)_z = -\psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{ \sin(\vec{j}, \vec{k}) \cdot \sin(\vec{j}, \vec{OG}) \cdot \cos \gamma}{ \sin \gamma \cdot \sin(\vec{j}, \vec{k})}$	$(jk)_z = 0$ $\vec{l} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2D}$
$(ki)_x = -\psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{ \sin(\vec{k}, \vec{l}) \cdot \sin(\vec{k}, \vec{OZ}) \cdot \cos \mu}{ \sin \mu \cdot \sin(\vec{k}, \vec{l})}$	$(ki)_x = 0$ $\vec{j} \perp (O; \vec{k}; \vec{l})_{2D}$
$(ki)_y = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{ \sin(\vec{k}, \vec{l}) }{ \sin \mu }$	$(ki)_y = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \sin(\vec{k}, \vec{l}) $ $\vec{j} \perp (O; \vec{k}; \vec{l})_{2D}$
$(ki)_z = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{ \sin(\vec{k}, \vec{l}) \cdot \sin(\vec{l}, \vec{OZ}) \cdot \cos \mu}{ \sin \mu \cdot \sin(\vec{k}, \vec{l})}$	$(ki)_z = 0$ $\vec{j} \perp (O; \vec{k}; \vec{l})_{2D}$

Base orthonormée

Si la base est orthonormée, $\cos(\vec{l}, \vec{j}) = \cos(\vec{j}, \vec{k}) = \cos(\vec{k}, \vec{l}) = 0$, et si le repère est d'orientation directe dans l'espace d'orientation directe on a $(ij)_z = (jk)_x = (ki)_y = 1$, et le calcul d'un volume orienté s'identifie alors au calcul d'un déterminant. Soit, avec les égalités :

$$\begin{vmatrix} u_z & v_z \\ u_x & v_x \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_z & v_z \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} m_z & v_z \\ m_x & v_x \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} m_x & v_x \\ m_z & v_z \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} u_z & m_z \\ u_x & m_x \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} u_x & m_x \\ u_z & m_z \end{vmatrix}$$

On a aux numérateurs, dans le repère 3D orthonormé direct :

$$\vec{w} \boxtimes (\vec{m} \wedge \vec{v}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}; \vec{m}) \\ \in \\ (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}) \\ ortho \\ \psi = \xi = 1 \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ \text{et } \vec{w} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{m} \neq \vec{0}}}{=}} w_x \cdot \begin{vmatrix} m_y & v_y \\ m_z & v_z \end{vmatrix} - w_y \cdot \begin{vmatrix} m_x & v_x \\ m_z & v_z \end{vmatrix} + w_z \cdot \begin{vmatrix} m_x & v_x \\ m_y & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_x & m_x & v_x \\ w_y & m_y & v_y \\ w_z & m_z & v_z \end{vmatrix} = Det(\vec{w}; \vec{m}; \vec{v})$$

$$\vec{w} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{m}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}; \vec{m}) \\ \in \\ (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}) \\ ortho \\ \psi = \xi = 1 \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ \text{et } \vec{w} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{m} \neq \vec{0}}}{=}} w_x \cdot \begin{vmatrix} u_y & m_y \\ u_z & m_z \end{vmatrix} - w_y \cdot \begin{vmatrix} u_x & m_x \\ u_z & m_z \end{vmatrix} + w_z \cdot \begin{vmatrix} u_x & m_x \\ u_y & m_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_x & u_x & m_x \\ w_y & u_y & m_y \\ w_z & u_z & m_z \end{vmatrix} = Det(\vec{w}; \vec{u}; \vec{m})$$

$$\vec{m} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}; \vec{m}) \\ \in \\ (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}) \\ ortho \\ \psi = \xi = 1 \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ \text{et } \vec{w} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{m} \neq \vec{0}}}{=}} m_x \cdot \begin{vmatrix} u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{vmatrix} - m_y \cdot \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_z & v_z \end{vmatrix} + m_z \cdot \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_x & u_x & v_x \\ m_y & u_y & v_y \\ m_z & u_z & v_z \end{vmatrix} = Det(\vec{m}; \vec{u}; \vec{v})$$

Et au dénominateur :

$$\vec{w} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}; \vec{m}) \\ \in \\ (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}) \\ ortho \\ \psi = \xi = 1 \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ \text{et } \vec{w} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{m} \neq \vec{0}}}{=}} w_x \cdot \begin{vmatrix} u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{vmatrix} - w_y \cdot \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_z & v_z \end{vmatrix} + w_z \cdot \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_x & u_x & v_x \\ w_y & u_y & v_y \\ w_z & u_z & v_z \end{vmatrix} = Det(\vec{w}; \vec{u}; \vec{v})$$

On retrouve alors la présentation habituelle des formules de Cramer, en permutant circulairement de la même façon les vecteurs au numérateur et au dénominateur :

$$\lambda_u = \frac{\begin{vmatrix} w_x & m_x & v_x \\ w_y & m_y & v_y \\ w_z & m_z & v_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} w_x & u_x & v_x \\ w_y & u_y & v_y \\ w_z & u_z & v_z \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} m_x & v_x & w_x \\ m_y & v_y & w_y \\ m_z & v_z & w_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix}}$$

$$\lambda_v = \frac{\begin{vmatrix} w_x & u_x & m_x \\ w_y & u_y & m_y \\ w_z & u_z & m_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} w_x & u_x & v_x \\ w_y & u_y & v_y \\ w_z & u_z & v_z \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} u_x & m_x & w_x \\ u_y & m_y & w_y \\ u_z & m_z & w_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix}}$$

$$\lambda_w = \frac{\begin{vmatrix} m_x & u_x & v_x \\ m_y & u_y & v_y \\ m_z & u_z & v_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} w_x & u_x & v_x \\ w_y & u_y & v_y \\ w_z & u_z & v_z \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} u_x & v_x & m_x \\ u_y & v_y & m_y \\ u_z & v_z & m_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix}}$$

Note : par permutation circulaire dans l'expression développée du déterminant 3x3, ou en redéveloppant celui-ci à partir de l'écriture compactée, on montre que :

$$\text{Det}(\vec{w}; \vec{u}; \vec{v}) = \text{Det}(\vec{u}; \vec{w}; \vec{v}) = \text{Det}(\vec{v}; \vec{u}; \vec{w}) = -[\text{Det}(\vec{v}; \vec{w}; \vec{u}) = \text{Det}(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = \text{Det}(\vec{w}; \vec{u}; \vec{v})]$$

Pour une méthode de calcul des déterminants 3x3 et nxn, voir en annexe.

Base quelconque

On verra au chapitre 4 que le calcul d'un volume orienté est proportionnel, selon une constante a dépendante de la configuration du repère, au calcul d'un déterminant dans le repère 3D quelconque, et qu'on peut écrire :

$$\lambda_u = \frac{a \cdot \begin{vmatrix} w_x & m_x & v_x \\ w_y & m_y & v_y \\ w_z & m_z & v_z \end{vmatrix}}{a \cdot \begin{vmatrix} w_x & u_x & v_x \\ w_y & u_y & v_y \\ w_z & u_z & v_z \end{vmatrix}} = \frac{\left(w_x \cdot (mv)_x + w_y \cdot (mv)_y + w_z \cdot (mv)_z + \cos(\vec{i}, \vec{j}) \cdot (w_x \cdot (mv)_y + w_y \cdot (mv)_x) \right.}{\left(w_x \cdot (uv)_x + w_y \cdot (uv)_y + w_z \cdot (uv)_z + \cos(\vec{i}, \vec{j}) \cdot (w_x \cdot (uv)_y + w_y \cdot (uv)_x) \right.}$$

$$\left. + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (w_y \cdot (mv)_z + w_z \cdot (mv)_y) + \cos(\vec{k}, \vec{i}) \cdot (w_z \cdot (mv)_x + w_x \cdot (mv)_z) \right) \cdot \frac{1}{\left(w_x \cdot (uv)_x + w_y \cdot (uv)_y + w_z \cdot (uv)_z + \cos(\vec{i}, \vec{j}) \cdot (w_x \cdot (uv)_y + w_y \cdot (uv)_x) \right.}$$

$$\left. + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (w_y \cdot (uv)_z + w_z \cdot (uv)_y) + \cos(\vec{k}, \vec{i}) \cdot (w_z \cdot (uv)_x + w_x \cdot (uv)_z) \right)}$$

$$\lambda_v = \frac{a \cdot \begin{vmatrix} w_x & u_x & m_x \\ w_y & u_y & m_y \\ w_z & u_z & m_z \end{vmatrix}}{a \cdot \begin{vmatrix} w_x & u_x & v_x \\ w_y & u_y & v_y \\ w_z & u_z & v_z \end{vmatrix}} = \frac{\left(w_x \cdot (um)_x + w_y \cdot (um)_y + w_z \cdot (um)_z + \cos(\vec{i}, \vec{j}) \cdot (w_x \cdot (um)_y + w_y \cdot (um)_x) \right.}{\left(w_x \cdot (uv)_x + w_y \cdot (uv)_y + w_z \cdot (uv)_z + \cos(\vec{i}, \vec{j}) \cdot (w_x \cdot (uv)_y + w_y \cdot (uv)_x) \right.}$$

$$\left. + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (w_y \cdot (um)_z + w_z \cdot (um)_y) + \cos(\vec{k}, \vec{i}) \cdot (w_z \cdot (um)_x + w_x \cdot (um)_z) \right) \cdot \frac{1}{\left(w_x \cdot (uv)_x + w_y \cdot (uv)_y + w_z \cdot (uv)_z + \cos(\vec{i}, \vec{j}) \cdot (w_x \cdot (uv)_y + w_y \cdot (uv)_x) \right.}$$

$$\left. + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (w_y \cdot (uv)_z + w_z \cdot (uv)_y) + \cos(\vec{k}, \vec{i}) \cdot (w_z \cdot (uv)_x + w_x \cdot (uv)_z) \right)}$$

$$\lambda_w = \frac{a \cdot \begin{vmatrix} m_x & u_x & v_x \\ m_y & u_y & v_y \\ m_z & u_z & v_z \end{vmatrix}}{a \cdot \begin{vmatrix} w_x & u_x & v_x \\ w_y & u_y & v_y \\ w_z & u_z & v_z \end{vmatrix}} = \frac{\left(m_x \cdot (uv)_x + m_y \cdot (uv)_y + m_z \cdot (uv)_z + \cos(\vec{i}, \vec{j}) \cdot (m_x \cdot (uv)_y + m_y \cdot (uv)_x) \right.}{\left(w_x \cdot (uv)_x + w_y \cdot (uv)_y + w_z \cdot (uv)_z + \cos(\vec{i}, \vec{j}) \cdot (w_x \cdot (uv)_y + w_y \cdot (uv)_x) \right.}$$

$$\left. + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (m_y \cdot (uv)_z + m_z \cdot (uv)_y) + \cos(\vec{k}, \vec{i}) \cdot (m_z \cdot (uv)_x + m_x \cdot (uv)_z) \right) \cdot \frac{1}{\left(w_x \cdot (uv)_x + w_y \cdot (uv)_y + w_z \cdot (uv)_z + \cos(\vec{i}, \vec{j}) \cdot (w_x \cdot (uv)_y + w_y \cdot (uv)_x) \right.}$$

$$\left. + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (w_y \cdot (uv)_z + w_z \cdot (uv)_y) + \cos(\vec{k}, \vec{i}) \cdot (w_z \cdot (uv)_x + w_x \cdot (uv)_z) \right)}$$

3.4 Formules de changement de coordonnées entre repères quelconques de mêmes dimensions

Des formules de changement de coordonnées entre repères quelconques de dimensions différentes n'ont de sens que si elles mesurent le même objet. On peut modéliser un objet de dimension p (avec des coordonnées prises dans un repère de dimension p) dans un repère de dimension $n \geq p$, mais pas l'inverse. Pour le dire autrement, on peut modéliser un cercle dans un espace 2D ou 3D, mais on ne peut pas modéliser une sphère dans un espace 2D ou 1D (ou 0D).

Note : les orientations des plans des repères quelconques ne déterminent en rien les calculs de coordonnées. Toutes les équations employées jusqu'ici comportent des cosinus d'angle, insensibles aux orientations des plans, ou bien des divisions de sinus de même plan ou des valeurs absolues de sinus, ce qui rend ces opérations insensibles aux orientations des plans.

3.4a D'un repère $(O ; \vec{i})$ 1D à un repère $(O' ; \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|})$ 1D

On suppose connues les coordonnées d'un point $M(M_x)$ dans $(O ; \vec{i})$. On cherche les coordonnées de ce point $M(M_{x'})$ dans le repère $(O' ; \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|})$ construit sur le vecteur $\vec{u}$ tel que :

$$\overrightarrow{O'M} = (M_x - O'_x) \cdot \vec{i} = \lambda_u \cdot \vec{u} = \lambda_u \cdot \|\vec{u}\| \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

... qui est une relation indépendante de tout repère. On a donc la solution, avec $O'_{x'} = 0$ puisque O' est l'origine du nouveau repère :

$$\{M_{x'} = \lambda_u \cdot \|\vec{u}\|\}$$

Qui est trouvée par la résolution du système :

$$\{(M_x - O'_x) = \lambda_u \cdot u_x\}$$

Dont on connaît la solution $\lambda_u = (M_x - O'_x)/u_x$ par une division de longueurs orientées, que l'on sait calculer dans le repère quelconque.

On sait par ailleurs déterminer la norme du vecteur $\vec{u}$ en fonction des paramètres choisis pour construire $(O ; \vec{i})$:

$$\|\vec{u}\|_{\vec{u} \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}} = [u_x^2]^{\frac{1}{2}} = |u_x|$$

On peut donc calculer les coordonnées de $M(M_{x'})$ dans le repère $(O' ; \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|})$:

$$M_{x'} = \lambda_u \cdot \|\vec{u}\| = \frac{(M_x - O'_x) \cdot |u_x|}{u_x}$$

On procède de même dans les repères $(O' ; \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|})$ 1D, $(O' ; \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|})$ 1D de $(O ; \vec{i})$ 1D

On procède de même dans les repères $(O' ; \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|})$ 1D $(O' ; \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|})$ 1D, $(O' ; \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|})$ 1D de $(O ; \vec{j})$ 1D

On procède de même dans les repères $(O' ; \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|})$ 1D $(O' ; \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|})$ 1D, $(O' ; \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|})$ 1D de $(O ; \vec{k})$ 1D

3.4b D'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}$ à un repère $(O'; \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}; \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|})_{2D}$

Soit $\vec{u}; \vec{v} \in (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}$. On suppose connues les coordonnées d'un point $M(M_x; M_y)$ dans $(O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}$.

On cherche les coordonnées de ce point $M(M_{x'}; M_{y'})$ dans le repère $(O'; \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}; \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|})$ construit sur les deux vecteurs $\vec{u}; \vec{v}$ tel que :

$$\overrightarrow{O'M} = (M_x - O'_x) \cdot \vec{i} + (M_y - O'_y) \cdot \vec{j} = \lambda_u \cdot \vec{u} + \lambda_v \cdot \vec{v} = \lambda_u \cdot \|\vec{u}\| \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \lambda_v \cdot \|\vec{v}\| \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

... qui est une relation indépendante de tout repère. On a donc les solutions, avec $O'_{x'} = O'_{y'} = 0$ puisque O' est l'origine du nouveau repère :

$$\begin{cases} M_{x'} = \lambda_u \cdot \|\vec{u}\| \\ M_{y'} = \lambda_v \cdot \|\vec{v}\| \end{cases}$$

Qui sont trouvées par la résolution du système :

$$\begin{cases} (M_x - O'_x) = \lambda_u \cdot u_x + \lambda_v \cdot v_x \\ (M_y - O'_y) = \lambda_u \cdot u_y + \lambda_v \cdot v_y \end{cases}$$

Dont on connaît les solutions $\lambda_u; \lambda_v$ par des divisions d'aires orientées, que l'on sait calculer dans le repère quelconque :

$$\lambda_u = \frac{a. \begin{vmatrix} (M_x - O'_x) & v_x \\ (M_y - O'_y) & v_y \end{vmatrix}}{a. \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix}}$$

$$\lambda_v = \frac{a. \begin{vmatrix} u_x & (M_x - O'_x) \\ u_y & (M_y - O'_y) \end{vmatrix}}{a. \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix}}$$

On sait par ailleurs déterminer les normes des vecteurs $\vec{u}; \vec{v}$ en fonction des paramètres choisis pour construire $(O; \vec{i}; \vec{j})$:

$$\|\vec{u}\|_{\vec{u} \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}} = [u_x^2 + u_y^2 + 2u_x \cdot u_y \cdot \cos(\vec{i}, \vec{j})]^{\frac{1}{2}}$$

$$\|\vec{v}\|_{\vec{v} \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}} = [v_x^2 + v_y^2 + 2v_x \cdot v_y \cdot \cos(\vec{i}, \vec{j})]^{\frac{1}{2}}$$

On peut donc calculer les coordonnées de $M(M_{x'}; M_{y'})$ dans le repère $(O'; \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}; \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|})$:

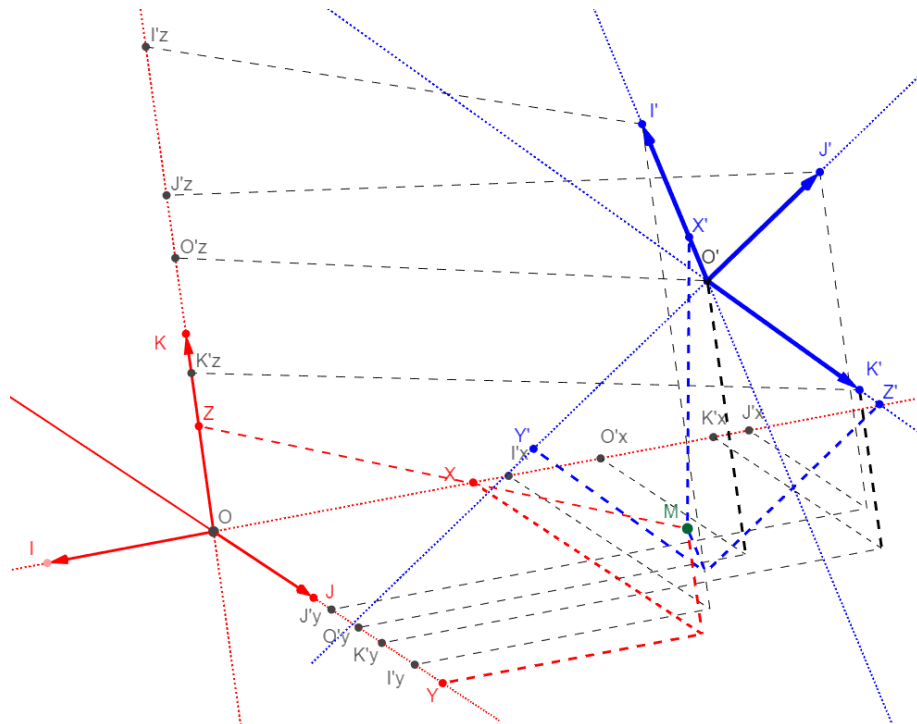
$$\left\{ \begin{array}{l} M_{x'} = \frac{a. \begin{vmatrix} (M_x - O'_x) & v_x \\ (M_y - O'_y) & v_y \end{vmatrix}}{a. \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix}} \cdot [u_x^2 + u_y^2 + 2u_x \cdot u_y \cdot \cos(\vec{i}, \vec{j})]^{\frac{1}{2}} \\ M_{y'} = \frac{a. \begin{vmatrix} u_x & (M_x - O'_x) \\ u_y & (M_y - O'_y) \end{vmatrix}}{a. \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix}} \cdot [v_x^2 + v_y^2 + 2v_x \cdot v_y \cdot \cos(\vec{i}, \vec{j})]^{\frac{1}{2}} \end{array} \right.$$

On procède de même dans les repères $(O'; \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}; \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|})_{2D}$, $(O'; \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}; \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|})_{2D}$ de $(O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}$.

Pour $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \in (O; \vec{j}; \vec{k})_{2D}$ On procède de même dans les repères $(O'; \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}; \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|})_{2D}$, $(O'; \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}; \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|})_{2D}$, $(O'; \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}; \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|})_{2D}$ de $(O; \vec{j}; \vec{k})_{2D}$.

Pour $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \in (O; \vec{k}; \vec{i})_{2D}$ On procède de même dans les repères $(O'; \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}; \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|})_{2D}$, $(O'; \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}; \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|})_{2D}$, $(O'; \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}; \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|})_{2D}$ de $(O; \vec{k}; \vec{i})_{2D}$.

3.4c D'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}$ à un repère $(O'; \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}; \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}; \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|})_{3D}$



On suppose connues les coordonnées d'un point $M(M_x; M_y; M_z)$ dans $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ 3D. On cherche les coordonnées de ce point $M(M_{x'}; M_{y'}; M_{z'})$ dans le repère $(O'; \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}; \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}; \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|})$ construit sur les trois vecteurs $\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}$ tel que :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O'M} &= (M_x - O'_x) \cdot \vec{i} + (M_y - O'_y) \cdot \vec{j} + (M_z - O'_z) \cdot \vec{k} = \\ \lambda_u \cdot \vec{u} + \lambda_v \cdot \vec{v} + \lambda_w \cdot \vec{w} &= \lambda_u \cdot \left\| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\| + \lambda_v \cdot \left\| \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right\| + \lambda_w \cdot \left\| \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} \right\|\end{aligned}$$

... qui est une relation indépendante de tout repère.

On a donc les solutions, avec $O'_{x'} = O'_{y'} = O'_{z'} = 0$ puisque O' est l'origine du nouveau repère :

$$\begin{cases} M_{x'} = \lambda_u \cdot \left\| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\| \\ M_{y'} = \lambda_v \cdot \left\| \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right\| \\ M_{z'} = \lambda_w \cdot \left\| \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} \right\| \end{cases}$$

Qui sont trouvées par la résolution du système :

$$\begin{cases} (M_x - O'_x) = \lambda_u \cdot u_x + \lambda_v \cdot v_x + \lambda_w \cdot w_x \\ (M_y - O'_y) = \lambda_u \cdot u_y + \lambda_v \cdot v_y + \lambda_w \cdot w_y \\ (M_z - O'_z) = \lambda_u \cdot u_z + \lambda_v \cdot v_z + \lambda_w \cdot w_z \end{cases}$$

Dont on connaît les solutions $\lambda_u; \lambda_v; \lambda_w$ par des divisions de volumes orientées, que l'on sait calculer dans le repère quelconque :

$$\lambda_u = \frac{a. \begin{vmatrix} w_x & (M_x - O'_x) & v_x \\ w_y & (M_y - O'_y) & v_y \\ w_z & (M_z - O'_z) & v_z \end{vmatrix}}{a. \begin{vmatrix} w_x & u_x & v_x \\ w_y & u_y & v_y \\ w_z & u_z & v_z \end{vmatrix}}$$

$$\lambda_v = \frac{a. \begin{vmatrix} w_x & u_x & (M_x - O'_x) \\ w_y & u_y & (M_y - O'_y) \\ w_z & u_z & (M_z - O'_z) \end{vmatrix}}{a. \begin{vmatrix} w_x & u_x & v_x \\ w_y & u_y & v_y \\ w_z & u_z & v_z \end{vmatrix}}$$

$$\lambda_w = \frac{a. \begin{vmatrix} (M_x - O'_x) & u_x & v_x \\ (M_y - O'_y) & u_y & v_y \\ (M_z - O'_z) & u_z & v_z \end{vmatrix}}{a. \begin{vmatrix} w_x & u_x & v_x \\ w_y & u_y & v_y \\ w_z & u_z & v_z \end{vmatrix}}$$

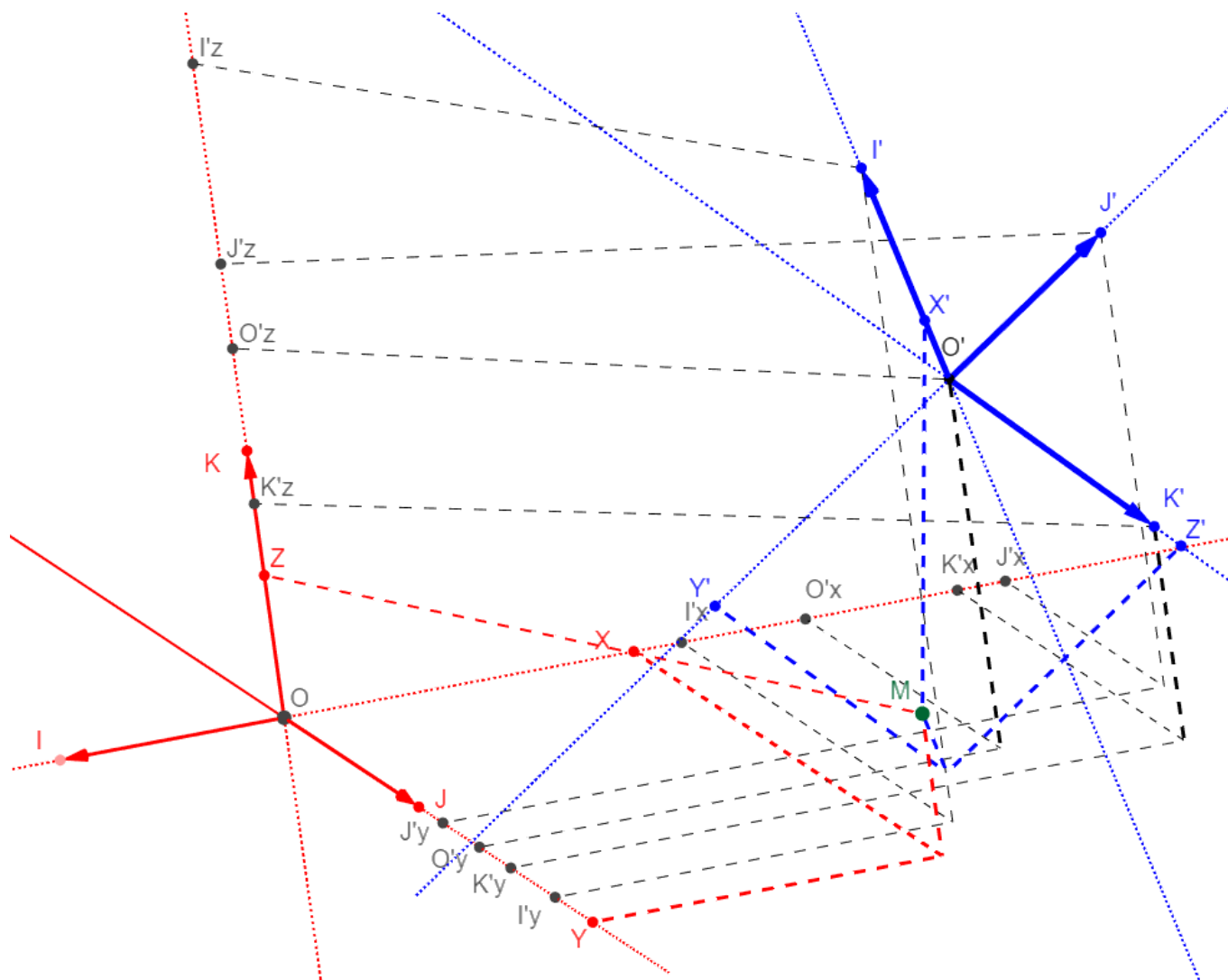
On sait par ailleurs déterminer les normes des vecteurs $\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$ en fonction des paramètres choisis pour construire $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$:

$$\begin{aligned} ||\vec{u}'|| &=_{\vec{u}' \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}} [u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + 2u_x \cdot u_y \cdot \cos(\vec{i}, \vec{j}) + 2u_z u_y \cdot \cos(\vec{j}, \vec{k}) + 2u_z \cdot u_x \cdot \cos(\vec{k}, \vec{i})]^{\frac{1}{2}} \\ ||\vec{v}'|| &=_{\vec{v}' \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}} [v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 + 2v_x \cdot v_y \cdot \cos(\vec{i}, \vec{j}) + 2v_z v_y \cdot \cos(\vec{j}, \vec{k}) + 2v_z \cdot v_x \cdot \cos(\vec{k}, \vec{i})]^{\frac{1}{2}} \\ ||\vec{w}'|| &=_{\vec{w}' \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}} [w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 + 2w_x \cdot w_y \cdot \cos(\vec{i}, \vec{j}) + 2w_z w_y \cdot \cos(\vec{j}, \vec{k}) + 2w_z \cdot w_x \cdot \cos(\vec{k}, \vec{i})]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

On peut donc calculer les coordonnées $M(M_{x'} ; M_{y'} ; M_{z'})$ dans le repère $(O' ; \frac{\vec{u}}{||\vec{u}'||} ; \frac{\vec{v}}{||\vec{v}'||} ; \frac{\vec{w}}{||\vec{w}'||})$:

$$\left\{ \begin{aligned} M_{x'} &= \frac{a \cdot \begin{vmatrix} w_x & (M_x - O'_x) & v_x \\ w_y & (M_y - O'_y) & v_y \\ w_z & (M_z - O'_z) & v_z \end{vmatrix}}{a \cdot \begin{vmatrix} w_x & u_x & v_x \\ w_y & u_y & v_y \\ w_z & u_z & v_z \end{vmatrix}} \cdot [u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + 2u_x \cdot u_y \cdot \cos(\vec{i}, \vec{j}) + 2u_z u_y \cdot \cos(\vec{j}, \vec{k}) + 2u_z \cdot u_x \cdot \cos(\vec{k}, \vec{i})]^{\frac{1}{2}} \\ M_{y'} &= \frac{a \cdot \begin{vmatrix} w_x & u_x & (M_x - O'_x) \\ w_y & u_y & (M_y - O'_y) \\ w_z & u_z & (M_z - O'_z) \end{vmatrix}}{a \cdot \begin{vmatrix} w_x & u_x & v_x \\ w_y & u_y & v_y \\ w_z & u_z & v_z \end{vmatrix}} \cdot [v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 + 2v_x \cdot v_y \cdot \cos(\vec{i}, \vec{j}) + 2v_z v_y \cdot \cos(\vec{j}, \vec{k}) + 2v_z \cdot v_x \cdot \cos(\vec{k}, \vec{i})]^{\frac{1}{2}} \\ M_{z'} &= \frac{a \cdot \begin{vmatrix} (M_x - O'_x) & u_x & v_x \\ (M_y - O'_y) & u_y & v_y \\ (M_z - O'_z) & u_z & v_z \end{vmatrix}}{a \cdot \begin{vmatrix} w_x & u_x & v_x \\ w_y & u_y & v_y \\ w_z & u_z & v_z \end{vmatrix}} \cdot [w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 + 2w_x \cdot w_y \cdot \cos(\vec{i}, \vec{j}) + 2w_z w_y \cdot \cos(\vec{j}, \vec{k}) + 2w_z \cdot w_x \cdot \cos(\vec{k}, \vec{i})]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right.$$

3.5 Tableau récapitulatif des formules de conversions de coordonnées entre repères quelconques euclidiens de mêmes dimensions



De $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ 3D à $(O' ; \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} ; \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} ; \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|})$ 3D

$$M_{x'} = \frac{a. \begin{vmatrix} w_x & (M_x - O'_x) & v_x \\ w_y & (M_y - O'_y) & v_y \\ w_z & (M_z - O'_z) & v_z \end{vmatrix}}{a. \begin{vmatrix} w_x & u_x & v_x \\ w_y & u_y & v_y \\ w_z & u_z & v_z \end{vmatrix}} \cdot [u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + 2u_x \cdot u_y \cdot \cos(\vec{i}, \vec{j}) + 2u_z u_y \cdot \cos(\vec{j}, \vec{k}) + 2u_z \cdot u_x \cdot \cos(\vec{k}, \vec{i})]^{\frac{1}{2}}$$

$$M_{y'} = \frac{a. \begin{vmatrix} w_x & u_x & (M_x - O'_x) \\ w_y & u_y & (M_y - O'_y) \\ w_z & u_z & (M_z - O'_z) \end{vmatrix}}{a. \begin{vmatrix} w_x & u_x & v_x \\ w_y & u_y & v_y \\ w_z & u_z & v_z \end{vmatrix}} \cdot [v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 + 2v_x \cdot v_y \cdot \cos(\vec{i}, \vec{j}) + 2v_z v_y \cdot \cos(\vec{j}, \vec{k}) + 2v_z \cdot v_x \cdot \cos(\vec{k}, \vec{i})]^{\frac{1}{2}}$$

$$M_{z'} = \frac{a. \begin{vmatrix} (M_x - O'_x) & u_x & v_x \\ (M_y - O'_y) & u_y & v_y \\ (M_z - O'_z) & u_z & v_z \end{vmatrix}}{a. \begin{vmatrix} w_x & u_x & v_x \\ w_y & u_y & v_y \\ w_z & u_z & v_z \end{vmatrix}} \cdot [w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 + 2w_x \cdot w_y \cdot \cos(\vec{i}, \vec{j}) + 2w_z w_y \cdot \cos(\vec{j}, \vec{k}) + 2w_z \cdot w_x \cdot \cos(\vec{k}, \vec{i})]^{\frac{1}{2}}$$

De $(O ; \vec{i} ; \vec{j})2D$ à $(O' ; \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} ; \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|})2D$

$$M_{x'} = \frac{a \cdot \begin{vmatrix} (M_x - O'_x) & v_x \\ (M_y - O'_y) & v_y \end{vmatrix}}{a \cdot \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix}} \cdot [u_x^2 + u_y^2 + 2u_x \cdot u_y \cdot \cos(\vec{i}, \vec{j})]^{\frac{1}{2}}$$

$$M_{y'} = \frac{a \cdot \begin{vmatrix} u_x & (M_x - O'_x) \\ u_y & (M_y - O'_y) \end{vmatrix}}{a \cdot \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix}} \cdot [v_x^2 + v_y^2 + 2v_x \cdot v_y \cdot \cos(\vec{i}, \vec{j})]^{\frac{1}{2}}$$

De $(O ; \vec{i})1D$ à $(O' ; \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|})1D$

$$M_{x'} = \lambda_u \cdot \left\| \vec{u} \right\| = \frac{(M_x - O'_x) \cdot |u_x|}{u_x}$$

Chapitre 4

JEUX D'ÉCRITURES DANS L'ESPACE nD

4.1 Généralités

Les considérations suivantes ne signifient pas que tout ou partie des dimensions supplémentaires existent réellement. L'esprit peut formuler des buts, il sera souvent déjoué et ne trouvera qu'un devenir d'activité combinatoire dans sa quête d'une mémoire ; ici dans le développement des jeux d'écritures d'un moment de sa réalité, qui est un mouvement de la réalité tout entière.

4.2 Mise en évidence du déterminant 3x3 dans le produit mixte

du repère quelconque 3D et première approche de la constante α

Les calculs informatiques ont montré que les quotients de déterminants 3x3 donnaient les inconnues λ même dans le cas de $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ 3D quelconque. Il existait donc un rapport de proportionnalité entre un déterminant 3x3 et son produit mixte. Cela valait donc la peine de le chercher. En développant $\vec{w} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v})$, ces trois vecteurs étant non nuls, on a :

$$\begin{aligned} \vec{w} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v}) &= w_x \cdot (uv)_x + w_y \cdot (uv)_y + w_z \cdot (uv)_z + \cos(\vec{i}, \vec{j}) \cdot (w_x \cdot (uv)_y + w_y \cdot (uv)_x) \\ &+ \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (w_y \cdot (uv)_z + w_z \cdot (uv)_y) + \cos(\vec{k}, \vec{i}) \cdot (w_z \cdot (uv)_x + w_x \cdot (uv)_z) \end{aligned}$$

Soit le développé complet :

$$\begin{aligned} \vec{w} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v}) &= \\ &w_x \cdot (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot (ij)_x + w_x \cdot (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) \cdot (jk)_x - w_x \cdot (u_x \cdot v_z - u_z \cdot v_x) \cdot (ki)_x \\ &+ w_y \cdot (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot (ij)_y + w_y \cdot (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) \cdot (jk)_y - w_y \cdot (u_x \cdot v_z - u_z \cdot v_x) \cdot (ki)_y \\ &+ w_z \cdot (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot (ij)_z + w_z \cdot (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) \cdot (jk)_z - w_z \cdot (u_x \cdot v_z - u_z \cdot v_x) \cdot (ki)_z \\ &+ \cos(\vec{i}, \vec{j}) \cdot w_x \cdot (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot (ij)_y + \cos(\vec{i}, \vec{j}) \cdot w_x \cdot (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) \cdot (jk)_y - \cos(\vec{i}, \vec{j}) \cdot w_x \cdot (u_x \cdot v_z - u_z \cdot v_x) \cdot (ki)_y \\ &+ \cos(\vec{i}, \vec{j}) \cdot w_y \cdot (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot (ij)_x + \cos(\vec{i}, \vec{j}) \cdot w_y \cdot (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) \cdot (jk)_x - \cos(\vec{i}, \vec{j}) \cdot w_y \cdot (u_x \cdot v_z - u_z \cdot v_x) \cdot (ki)_x \\ &+ \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot w_y \cdot (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot (ij)_z + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot w_y \cdot (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) \cdot (jk)_z - \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot w_y \cdot (u_x \cdot v_z - u_z \cdot v_x) \cdot (ki)_z \\ &+ \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot w_z \cdot (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot (ij)_y + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot w_z \cdot (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) \cdot (jk)_y - \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot w_z \cdot (u_x \cdot v_z - u_z \cdot v_x) \cdot (ki)_y \\ &+ \cos(\vec{k}, \vec{i}) \cdot w_z \cdot (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot (ij)_x + \cos(\vec{k}, \vec{i}) \cdot w_z \cdot (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) \cdot (jk)_x - \cos(\vec{k}, \vec{i}) \cdot w_z \cdot (u_x \cdot v_z - u_z \cdot v_x) \cdot (ki)_x \\ &+ \cos(\vec{k}, \vec{i}) \cdot w_x \cdot (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot (ij)_z + \cos(\vec{k}, \vec{i}) \cdot w_x \cdot (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) \cdot (jk)_z - \cos(\vec{k}, \vec{i}) \cdot w_x \cdot (u_x \cdot v_z - u_z \cdot v_x) \cdot (ki)_z \end{aligned}$$

Qui donne, arrangé autrement :

$$\begin{aligned} \vec{w} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v}) &= \\ &w_x \cdot (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) \cdot ((jk)_x + \cos(\vec{i}, \vec{j}) \cdot (jk)_y + \cos(\vec{k}, \vec{i}) \cdot (jk)_z) \\ &- w_y \cdot (u_x \cdot v_z - u_z \cdot v_x) \cdot ((ki)_y + \cos(\vec{i}, \vec{j}) \cdot (ki)_x + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (ki)_z) \\ &+ w_z \cdot (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot ((ij)_z + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (ij)_y + \cos(\vec{k}, \vec{i}) \cdot (ij)_x) \\ &+ w_x \cdot (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot ((ij)_x + \cos(\vec{i}, \vec{j}) \cdot (ij)_y + \cos(\vec{k}, \vec{i}) \cdot (ij)_z) \\ &+ w_y \cdot (u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z) \cdot ((ki)_x + \cos(\vec{i}, \vec{j}) \cdot (ki)_y + \cos(\vec{k}, \vec{i}) \cdot (ki)_z) \\ &+ w_y \cdot (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) \cdot ((ij)_y + \cos(\vec{i}, \vec{j}) \cdot (ij)_x + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (ij)_z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + w_y \cdot (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) \cdot ((jk)_y + \cos(\vec{l}, \vec{j}) \cdot (jk)_x + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (jk)_z) \\
& + w_z \cdot (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) \cdot ((jk)_z + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (jk)_y + \cos(\vec{k}, \vec{l}) \cdot (jk)_x) \\
& + w_z \cdot (u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z) \cdot ((ki)_z + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (ki)_y + \cos(\vec{k}, \vec{l}) \cdot (ki)_x)
\end{aligned}$$

L'outil informatique donna un résultat étonnant et stimulant, comme un cadeau, sur le rangement ci-dessus effectué dans un mélange de hasard, d'espoir et peut-être d'intuition :

```

jkx+cosij*jky+coski*jkz=0,6830127018922224653991180644
kiy+cosij*kix+cosjk*kiz=0,6830127018922209220782768616
ijz+cosjk*ijy+coski*ijx=0,6830127018922191036854990381
*****
ijx+cosij*ijy+coski*ijz=-0,0000000000000002360149067454
kix+cosij*kix+coski*kiz=0,0000000000000005071628365598
*****
ijy+cosij*ijx+cosjk*ijz=-0,000000000000000258134504820
jky+cosij*jky+cosjk*jkz=0,000000000000000000000000000000
*****
jkz+cosjk*jky+coski*jkx=-0,0000000000000004116964526628
kiz+cosjk*kix+coski*kix=0,00000000000000000000000000002

```

On a constaté ces équations dans toutes les simulations effectuées. On pouvait donc supposer :

$$\begin{aligned}
(jk)_x + \cos(\vec{l}, \vec{j}) \cdot (jk)_y + \cos(\vec{k}, \vec{l}) \cdot (jk)_z &= (ki)_y + \cos(\vec{l}, \vec{j}) \cdot (ki)_x + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (ki)_z \\
&= (ij)_z + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (ij)_y + \cos(\vec{k}, \vec{l}) \cdot (ij)_x
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
(ij)_x + \cos(\vec{l}, \vec{j}) \cdot (ij)_y + \cos(\vec{k}, \vec{l}) \cdot (ij)_z &= (ki)_x + \cos(\vec{l}, \vec{j}) \cdot (ki)_y + \cos(\vec{k}, \vec{l}) \cdot (ki)_z = 0 \\
(ij)_y + \cos(\vec{l}, \vec{j}) \cdot (ij)_x + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (ij)_z &= (jk)_y + \cos(\vec{l}, \vec{j}) \cdot (jk)_x + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (jk)_z = 0 \\
(jk)_z + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (jk)_y + \cos(\vec{k}, \vec{l}) \cdot (jk)_x &= (ki)_z + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (ki)_y + \cos(\vec{k}, \vec{l}) \cdot (ki)_x = 0
\end{aligned}$$

On pouvait donc ensuite essayer de démontrer ces équations. On donne ci-dessous le développé de $((ij)_z + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (ij)_y + \cos(\vec{k}, \vec{l}) \cdot (ij)_x)$ qui se simplifie, avec :

$$\cos(\vec{j}, \vec{k})_{\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{l}; \vec{j})_{2D}} = \cos \delta \cdot \cos(\vec{j}, \vec{OF}) ; \cos(\vec{k}, \vec{l})_{\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{l}; \vec{j})_{2D}} = \cos \delta \cdot \cos(\vec{l}, \vec{OF})$$

$$\cos(\vec{j}, \vec{k})_{\vec{k} \perp (O; \vec{l}; \vec{j})_{2D}} = 0 ; \cos(\vec{k}, \vec{l})_{\vec{k} \perp (O; \vec{l}; \vec{j})_{2D}} = 0$$

Soit, si $\vec{k} \perp (O; \vec{l}; \vec{j})_{2D}$:

$$((ij)_z + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (ij)_y + \cos(\vec{k}, \vec{l}) \cdot (ij)_x)_{\vec{k} \perp (O; \vec{l}; \vec{j})_{2D}} = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\sin(\vec{l}, \vec{j})|$$

Soit si $\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{l}; \vec{j})_{2D}$

$$((ij)_z + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (ij)_y + \cos(\vec{k}, \vec{l}) \cdot (ij)_x)_{\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{l}; \vec{j})_{2D}} =$$

$$\begin{aligned}
& \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{|\sin(\vec{l}, \vec{j})|}{|\sin \delta|} - \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{|\sin(\vec{l}, \vec{j})| \cdot \sin(\vec{l}, \vec{OF}) \cdot \cos \delta}{|\sin \delta| \cdot \sin(\vec{l}, \vec{j})} + \cos(\vec{k}, \vec{l}) \cdot \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{|\sin(\vec{l}, \vec{j})| \cdot \sin(\vec{j}, \vec{OF}) \cdot \cos \delta}{|\sin \delta| \cdot \sin(\vec{l}, \vec{j})} \\
&= \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \left[\frac{|\sin(\vec{l}, \vec{j})|}{|\sin \delta|} - \cos \delta \cdot \cos(\vec{j}, \vec{OF}) \cdot \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{|\sin(\vec{l}, \vec{j})| \cdot \sin(\vec{l}, \vec{OF}) \cdot \cos \delta}{|\sin \delta| \cdot \sin(\vec{l}, \vec{j})} + \cos \delta \cdot \cos(\vec{l}, \vec{OF}) \cdot \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{|\sin(\vec{l}, \vec{j})| \cdot \sin(\vec{j}, \vec{OF}) \cdot \cos \delta}{|\sin \delta| \cdot \sin(\vec{l}, \vec{j})} \right] \\
&= \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \left[\frac{|\sin(\vec{l}, \vec{j})|}{|\sin \delta|} - \frac{|\sin(\vec{l}, \vec{j})| \cdot \cos^2 \delta \cdot \cos(\vec{j}, \vec{OF}) \sin(\vec{l}, \vec{OF})}{|\sin \delta| \cdot \sin(\vec{l}, \vec{j})} + \frac{|\sin(\vec{l}, \vec{j})| \cdot \cos^2 \delta \cdot \cos(\vec{l}, \vec{OF}) \cdot \sin(\vec{j}, \vec{OF})}{|\sin \delta| \cdot \sin(\vec{l}, \vec{j})} \right] \\
&= \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \left[\frac{|\sin(\vec{l}, \vec{j})|}{|\sin \delta|} + \frac{|\sin(\vec{l}, \vec{j})| \cdot \cos^2 \delta \cdot (\sin(\vec{j}, \vec{OF}) \cdot \cos(\vec{l}, \vec{OF}) - \cos(\vec{j}, \vec{OF}) \sin(\vec{l}, \vec{OF}))}{|\sin \delta| \cdot \sin(\vec{l}, \vec{j})} \right] \\
&= \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \left[\frac{|\sin(\vec{l}, \vec{j})|}{|\sin \delta|} - \frac{|\sin(\vec{l}, \vec{j})| \cdot \cos^2 \delta \cdot \sin(\vec{l}, \vec{j})}{|\sin \delta| \cdot \sin(\vec{l}, \vec{j})} \right] = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\sin(\vec{l}, \vec{j})| \left[\frac{1}{|\sin \delta|} - \frac{\cos^2 \delta}{|\sin \delta|} \right] \\
&= \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\sin(\vec{l}, \vec{j})| \cdot |\sin \delta| \\
&\quad \vec{k}_{non\perp(O;\vec{l};\vec{j})2D}
\end{aligned}$$

De même pour $(ki)_y + \cos(\vec{l}, \vec{j}) \cdot (ki)_x + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (ki)_z$ en utilisant :

$$\begin{aligned}
\cos(\vec{j}, \vec{k}) &\stackrel{\vec{j} \perp_{non}(O;\vec{k};\vec{l})2D}{=} \cos \mu \cdot \cos(\vec{k}, \vec{OZ}) ; \cos(\vec{j}, \vec{k}) &\stackrel{\vec{j} \perp(O;\vec{k};\vec{l})2Dou1D}{=} 0 \\
\cos(\vec{l}, \vec{j}) &= \cos \mu \cdot \cos(\vec{l}, \vec{OZ}) ; \cos(\vec{l}, \vec{j}) &= 0 \\
&\quad \vec{j} \perp_{non}(O;\vec{k};\vec{l})2D &\quad \vec{j} \perp(O;\vec{k};\vec{l})2Dou1D
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
(ki)_y + \cos(\vec{l}, \vec{j}) \cdot (ki)_x + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (ki)_z &\stackrel{\vec{j} \perp_{non}(O;\vec{k};\vec{l})2D}{=} \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\sin(\vec{k}, \vec{l})| \cdot |\sin \mu| \\
(ki)_y + \cos(\vec{l}, \vec{j}) \cdot (ki)_x + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (ki)_z &\stackrel{\vec{j} \perp(O;\vec{k};\vec{l})2D}{=} \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\sin(\vec{k}, \vec{l})|
\end{aligned}$$

De même pour $(jk)_x + \cos(\vec{l}, \vec{j}) \cdot (jk)_y + \cos(\vec{k}, \vec{l}) \cdot (jk)_z$ en utilisant :

$$\begin{aligned}
\cos(\vec{l}, \vec{j}) &= \cos \gamma \cdot \cos(\vec{j}, \vec{OG}) ; \cos(\vec{l}, \vec{j}) &= 0 \\
&\quad \vec{l} \perp_{non}(O;\vec{j};\vec{k})2D &\quad \vec{l} \perp(O;\vec{j};\vec{k})2D \\
\cos(\vec{k}, \vec{l}) &= \cos \gamma \cdot \cos(\vec{k}, \vec{OG}) ; \cos(\vec{k}, \vec{l}) &= 0 \\
&\quad \vec{l} \perp_{non}(O;\vec{j};\vec{k})2D &\quad \vec{l} \perp(O;\vec{j};\vec{k})2D
\end{aligned}$$

On obtient :

$$(jk)_x + \cos(\vec{l}, \vec{j}) \cdot (jk)_y + \cos(\vec{k}, \vec{l}) \cdot (jk)_z = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\sin(\vec{j}, \vec{k})| \cdot |\sin \gamma|$$

$\vec{l} \perp_{non}(O;\vec{j};\vec{k})2D$

$$(jk)_x + \cos(\vec{l}, \vec{j}).(jk)_y + \cos(\vec{k}, \vec{l}).(jk)_z = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\sin(\vec{j}, \vec{k})|$$

$$\vec{l} \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2D}$$

Note : pour $\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{l}; \vec{j})_{2D}$ et $\vec{j} \text{ non } \perp (O; \vec{k}; \vec{l})_{2D}$ et $\vec{l} \text{ non } \perp (O; \vec{j}; \vec{k})_{2D}$ on a les égalités :

$$|\sin(\vec{l}, \vec{j}).\sin\delta| = |\sin(\vec{k}, \vec{l}).\sin\mu| = |\sin(\vec{j}, \vec{k}).\sin\gamma|$$

On donne maintenant la preuve des expressions nulles. On donne ci-dessous le développé de $((ij)_y + \cos(\vec{l}, \vec{j}).(ij)_x + \cos(\vec{j}, \vec{k}).(ij)_z)$ qui se simplifie, avec :

$$\cos(\vec{j}, \vec{k})_{\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{l}; \vec{j})_{2D}} = \cos\delta \cdot \cos(\vec{j}, \vec{OF}) ; \cos(\vec{j}, \vec{k})_{\vec{k} \perp (O; \vec{l}; \vec{j})_{2D}} = 0$$

$$(ij)_x_{\vec{k} \perp (O; \vec{l}; \vec{j})_{2D}} = 0 ; (ij)_y_{\vec{k} \perp (O; \vec{l}; \vec{j})_{2D}} = 0 ; (ij)_z_{\vec{k} \perp (O; \vec{l}; \vec{j})_{2D}} = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\sin(\vec{l}, \vec{j})|$$

Soit, si $\vec{k} \perp (O; \vec{l}; \vec{j})_{2D}$:

$$((ij)_y + \cos(\vec{l}, \vec{j}).(ij)_x + \cos(\vec{j}, \vec{k}).(ij)_z)_{\vec{k} \perp (O; \vec{l}; \vec{j})_{2D}} = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\sin(\vec{l}, \vec{j})| \cdot (0) = 0$$

Soit si $\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{l}; \vec{j})_{2D}$

$$\begin{aligned} & ((ij)_y + \cos(\vec{l}, \vec{j}).(ij)_x + \cos(\vec{j}, \vec{k}).(ij)_z)_{\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{l}; \vec{j})_{2D}} = \\ & -\psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{|\sin(\vec{l}, \vec{j})| \cdot \sin(\vec{l}, \vec{OF}) \cdot \cos\delta}{|\sin\delta| \cdot \sin(\vec{l}, \vec{j})} + \cos(\vec{l}, \vec{j}) \cdot \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{|\sin(\vec{l}, \vec{j})| \cdot \sin(\vec{j}, \vec{OF}) \cdot \cos\delta}{|\sin\delta| \cdot \sin(\vec{l}, \vec{j})} + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{|\sin(\vec{l}, \vec{j})|}{|\sin\delta|} \\ & = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \cos\delta \cdot \frac{|\sin(\vec{l}, \vec{j})|}{|\sin\delta|} \left[-\frac{\sin(\vec{l}, \vec{OF})}{\sin(\vec{l}, \vec{j})} + \cos(\vec{l}, \vec{j}) \cdot \frac{\sin(\vec{j}, \vec{OF})}{\sin(\vec{l}, \vec{j})} + \cos(\vec{j}, \vec{OF}) \right] \\ & = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \cos\delta \cdot \frac{|\sin(\vec{l}, \vec{j})|}{|\sin\delta|} \left[\frac{\sin(\vec{l}, \vec{j}) \cdot \cos(\vec{j}, \vec{OF}) + \cos(\vec{l}, \vec{j}) \cdot \sin(\vec{j}, \vec{OF}) - \sin(\vec{l}, \vec{OF})}{\sin(\vec{l}, \vec{j})} \right] \\ & = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \cos\delta \cdot \frac{|\sin(\vec{l}, \vec{j})|}{|\sin\delta|} \left[\frac{\sin(\vec{l}, \vec{OF}) - \sin(\vec{l}, \vec{OF})}{\sin(\vec{l}, \vec{j})} \right] = 0 \end{aligned}$$

De même pour $(ij)_x + \cos(\vec{l}, \vec{j}).(ij)_y + \cos(\vec{k}, \vec{l}).(ij)_z$, qui se simplifie avec

$$\cos(\vec{k}, \vec{l})_{\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{l}; \vec{j})_{2D}} = \cos\delta \cdot \cos(\vec{l}, \vec{OF}) ; \cos(\vec{k}, \vec{l})_{\vec{k} \perp (O; \vec{l}; \vec{j})_{2D}} = 0$$

$$(ij)_x_{\vec{k} \perp (O; \vec{l}; \vec{j})_{2D}} = 0 ; (ij)_y_{\vec{k} \perp (O; \vec{l}; \vec{j})_{2D}} = 0 ; (ij)_z_{\vec{k} \perp (O; \vec{l}; \vec{j})_{2D}} = \psi \cdot \xi \cdot |\sin(\vec{l}, \vec{j})|$$

Soit, si $\vec{k} \perp (O; \vec{l}; \vec{j})_{2D}$:

$$(ij)_x + \cos(\vec{i}, \vec{j}) \cdot (ij)_y + \cos(\vec{k}, \vec{i}) \cdot (ij)_z \stackrel{\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}}{=} \psi \cdot \xi \cdot |\sin(\vec{i}, \vec{j})| \cdot (0) = 0$$

Soit si $\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}$

$$\begin{aligned} & (ij)_x + \cos(\vec{i}, \vec{j}) \cdot (ij)_y + \cos(\vec{k}, \vec{i}) \cdot (ij)_z \stackrel{\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}}{=} \\ &= \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \left[\frac{|\sin(\vec{i}, \vec{j})| \cdot \sin(\vec{j}, \vec{OF}) \cdot \cos \delta}{|\sin \delta| \cdot \sin(\vec{i}, \vec{j})} - \cos(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \frac{|\sin(\vec{i}, \vec{j})| \cdot \sin(\vec{i}, \vec{OF}) \cdot \cos \delta}{|\sin \delta| \cdot \sin(\vec{i}, \vec{j})} + \cos \delta \cdot \cos(\vec{i}, \vec{OF}) \cdot \frac{|\sin(\vec{i}, \vec{j})|}{|\sin \delta|} \right] \\ &= \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \cos \delta \cdot \frac{|\sin(\vec{i}, \vec{j})|}{|\sin \delta|} \left[\frac{\sin(\vec{j}, \vec{OF})}{\sin(\vec{i}, \vec{j})} - \cos(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \frac{\sin(\vec{i}, \vec{OF})}{\sin(\vec{i}, \vec{j})} + \cos(\vec{i}, \vec{OF}) \right] \\ &= \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \cos \delta \cdot \frac{|\sin(\vec{i}, \vec{j})|}{|\sin \delta|} \left[\frac{\sin(\vec{j}, \vec{OF}) - \cos(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \sin(\vec{i}, \vec{OF}) + \cos(\vec{i}, \vec{OF}) \cdot \sin(\vec{i}, \vec{j})}{\sin(\vec{i}, \vec{j})} \right] \\ &= \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \cos \delta \cdot \frac{|\sin(\vec{i}, \vec{j})|}{|\sin \delta|} \left[\frac{\sin(\vec{j}, \vec{OF}) - \sin(\vec{j}, \vec{OF})}{\sin(\vec{i}, \vec{j})} \right] = 0 \end{aligned}$$

On démontre de la même façon que :

$$\begin{aligned} (jk)_y + \cos(\vec{i}, \vec{j}) \cdot (jk)_x + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (jk)_z &= 0 \\ (jk)_z + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (jk)_y + \cos(\vec{k}, \vec{i}) \cdot (jk)_x &= 0 \\ (ki)_x + \cos(\vec{i}, \vec{j}) \cdot (ki)_y + \cos(\vec{k}, \vec{i}) \cdot (ki)_z &= 0 \\ (ki)_z + \cos(\vec{j}, \vec{k}) \cdot (ki)_y + \cos(\vec{k}, \vec{i}) \cdot (ki)_x &= 0 \end{aligned}$$

On peut donc écrire en fonction des paramètres les formules générales :

$$\vec{w} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v}) \stackrel{(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}}{=} \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\sin(\vec{i}, \vec{j})| \cdot |\sin \delta| \cdot \begin{vmatrix} w_x & u_x & v_x \\ w_y & u_y & v_y \\ w_z & u_z & v_z \end{vmatrix} \stackrel{\vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{w} \neq \vec{0}}{\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}}$$

$$\vec{w} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v}) \stackrel{(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}}{=} \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\sin(\vec{i}, \vec{j})| \cdot \begin{vmatrix} w_x & u_x & v_x \\ w_y & u_y & v_y \\ w_z & u_z & v_z \end{vmatrix} \stackrel{\vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{w} \neq \vec{0}}{\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}}$$

La constante a est donc en première approche dans ce cas particulier d'un espace 3D :

$$a_{\vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}} = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\sin(\vec{i}, \vec{j})| \cdot |\sin \delta|$$

$$a_{\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}} = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\sin(\vec{i}, \vec{j})|$$

Note : il est nécessaire pour être cohérent avec ce qu'on a dit précédemment de les distinguer, car pour $\vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}$ l'angle δ n'est pas défini. Néanmoins il ne faut pas se rendre esclave des symboles. Quand on arrive à ces formulations, on peut tout à fait redéfinir δ en lui permettant d'être un angle droit.

Si $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D}$ est orthonormé direct et l'espace d'orientation directe, $a = 1$ et on retrouve l'égalité entre produit mixte et déterminant.

Le signe du déterminant $\begin{vmatrix} w_x & u_x & v_x \\ w_y & u_y & v_y \\ w_z & u_z & v_z \end{vmatrix}$ dit donc l'orientation relative de $\vec{w}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dans le cas particulier du repère orthonormé directoïde dans l'espace orienté de façon directe. Dans le cas général c'est le signe du produit mixte qui renseigne sur l'orientation relative de $\vec{w}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$. S'il est positif, $\vec{w}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ pointent dans un même demi-espace, car alors $\cos(\vec{w}, (\vec{u} \wedge \vec{v})) > 0$. S'il est négatif, $\vec{w}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ne pointent pas dans le même demi-espace, car $\cos(\vec{w}, (\vec{u} \wedge \vec{v})) < 0$. Si le produit mixte dans le repère 3D est nul, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires et $\vec{w}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sont à angle droit car alors $\cos(\vec{w}, (\vec{u} \wedge \vec{v})) = 0$.

On ne cherche pas pour le moment à mettre en évidence le déterminant 3x3 dans une formulation du produit mixte si $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{2D}$ est un plan ou si $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{1D}$ est une droite.

4.3 Passage à l'usage d'une notation synthétique appropriée

Par « synthétique », j'entends que la notation doit symboliser ni plus ni moins que ce qui est nécessaire pour exprimer la chose vue. Les lettres de l'alphabet ne sont pas en nombre suffisant pour décrire un espace vectoriel nD .

La notation nD signifie espace vectoriel de dimension n .

Un ensemble de n vecteurs unitaires formant une base de l'espace sera distingué par la lettre e et l'indice i :

$$\{\vec{e}_i\}_n = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_n\}; \quad 1 \leq i \leq n$$

Les indices chiffrés successifs de $\vec{e}_i$ ne signifiant aucun ordre privilégié de ces vecteurs. On sait cependant que du point de vue de l'orientation en 3D les permutations circulaires d'une énumération $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ des trois vecteurs de base définissent la même orientation d'un objet $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$. De même les énumérations $\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2$ des trois vecteurs de base définissent l'orientation contraire à la précédente du même objet $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_3; \vec{e}_2)$. Un même objet correspondant à la même disposition spatiale de tous ses vecteurs.

Les coordonnées d'un vecteur $\vec{e}_i$ d'un repère de $\{\vec{e}_i\}_n$ sont notées $e_{i|i}$:

$$\vec{e}_i = e_{i|i} \cdot \vec{e}_i + \vec{0} + \dots + \vec{0}; \quad e_{i|i} = 1$$

On distinguera deux vecteurs quelconques de $\{\vec{e}_i\}_n$ en les écrivant par exemple $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ ou encore $\vec{e}_p$ et $\vec{e}_{p'}$ avec $1 \leq p \leq n; 1 \leq p' \leq n$, si le contexte s'y prête. On utilise en effet p et p' plutôt que i et i' pour lire sans confusion chaque coordonnée en i d'un produit vectoriel de deux vecteurs unitaires appartenant à l'espace décrit par $\{\vec{e}_i\}_n$. Cette forme analytique de $\vec{e}_p \wedge \vec{e}_{p'}$ est définie en tout cas pour $n \geq 3$, puisque $\vec{e}_p$ et $\vec{e}_{p'}$ sont non nuls et non colinéaires car ils font partie d'une base :

$$\vec{e}_p \wedge \vec{e}_{p'} = (e_p e_{p'})_{|1} \cdot \vec{e}_1 + (e_p e_{p'})_{|2} \cdot \vec{e}_2 + (e_p e_{p'})_{|3} \cdot \vec{e}_3 + \dots + (e_p e_{p'})_{|n} \cdot \vec{e}_n$$

Note : la notation $(e_p e_{p'})_{|i}$ est par défaut celle de la coordonnée en i d'un produit vectoriel, mais elle conviendrait aussi pour la notation de la coordonnée en i d'une somme de vecteurs. Dans ce cas on noterait pour les distinguer :

$$(e_p e_{p'})_{\wedge|i}; \quad (e_p e_{p'})_{+|i}$$

Et dans le cas d'opérations successives :

$$\vec{e}_1 \wedge (\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3) = (e_1 e_2 e_3)_{\wedge|i}; \quad \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = (e_1 e_2 e_3)_{+|i}$$

Un ensemble de m vecteurs quelconques de l'espace sera distingué par la lettre v et l'indice j :

$$\{\vec{v}_j\}_m = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m\}; \quad 1 \leq j \leq m$$

Les coordonnées d'un vecteur $\vec{v}_j$ de $\{\vec{v}_j\}_m$ sont notées $v_{j|i}$:

$$\vec{v}_j = v_{j|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{j|2} \cdot \vec{e}_2 + \dots + v_{j|n} \cdot \vec{e}_n$$

L'ensemble des coordonnées $v_{j|i}$ est noté par la matrice $V_{m|n}$ ou par le déterminant $Det\{v_{j|i}\}_m$:

$$V_{m|n} \begin{pmatrix} v_{1|1} & v_{2|1} & \dots & v_{m|1} \\ v_{1|2} & v_{2|2} & \dots & v_{m|2} \\ v_{1|3} & v_{2|3} & \dots & v_{m|3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{1|n} & v_{2|n} & \dots & v_{m|n} \end{pmatrix}; \quad Det\{v_{j|i}\}_m = \begin{vmatrix} v_{1|1} & v_{2|1} & \dots & v_{m|1} \\ v_{1|2} & v_{2|2} & \dots & v_{m|2} \\ v_{1|3} & v_{2|3} & \dots & v_{m|3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{1|n} & v_{2|n} & \dots & v_{m|n} \end{vmatrix}$$

Note : $Det\{v_{j|i}\}_m$ a un sens seulement si la matrice est carrée (autant de lignes que de colonnes).

L'ensemble des coordonnées de m vecteurs de l'espace de dimension n est noté $\{\vec{v}_{j|i}\}_m|n$:

$$\{\vec{v}_{j|i}\}_m|n \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_m(v_{m|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{m|2} \cdot \vec{e}_2 + v_{m|3} \cdot \vec{e}_3 + \dots + v_{m|n} \cdot \vec{e}_n) \\ \dots \dots \dots \dots \\ \vec{v}_3(v_{3|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{3|2} \cdot \vec{e}_2 + v_{3|3} \cdot \vec{e}_3 + \dots + v_{3|n} \cdot \vec{e}_n) \\ \vec{v}_2(v_{2|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{2|2} \cdot \vec{e}_2 + v_{2|3} \cdot \vec{e}_3 + \dots + v_{2|n} \cdot \vec{e}_n) \\ \vec{v}_1(v_{1|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{1|2} \cdot \vec{e}_2 + v_{1|3} \cdot \vec{e}_3 + \dots + v_{1|n} \cdot \vec{e}_n) \end{array} \right\}$$

Avec

$$1 \leq j \leq m; \quad 1 \leq i \leq n$$

On distinguera deux vecteurs quelconques de $\{\vec{v}_j\}_m$ en les écrivant par exemple $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

Pour $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ non nuls appartenant à $\{\vec{v}_j\}_m$ de l'espace décrit par $\{\vec{e}_i\}_n$ on écrit $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ défini en tout cas dans $\{\vec{e}_i\}_n$; $n \geq 3$ tel que :

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 &=_{\substack{(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in \{\vec{e}_i\}_n \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0}}} (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2)_{|1} + (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2)_{|2} + (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2)_{|3} + \dots + (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2)_{|n} \\ &= (v_1 v_2)_{|1} \cdot \vec{e}_1 + (v_1 v_2)_{|2} \cdot \vec{e}_2 + (v_1 v_2)_{|3} \cdot \vec{e}_3 + \dots + (v_1 v_2)_{|n} \cdot \vec{e}_n \end{aligned}$$

On change désormais la notation des angles en en faisant des relations d'objets à objets :

On notera :

$$\begin{aligned} \delta &= ((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3), \text{ l'élévation du vecteur } \vec{e}_3 \text{ au-dessus de l'objet plan } (O; \vec{e}_1; \vec{e}_2) \\ (\vec{e}_1, \vec{e}_2) &= ((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2), \text{ l'élévation du vecteur } \vec{e}_2 \text{ au-dessus de l'objet droit } (O; \vec{e}_1) \\ \gamma &= ((O; \vec{e}_2; \vec{e}_3), \vec{e}_1), \text{ l'élévation du vecteur } \vec{e}_1 \text{ au-dessus de l'objet plan } (O; \vec{e}_2; \vec{e}_3) \\ (\vec{e}_2, \vec{e}_3) &= ((O; \vec{e}_2), \vec{e}_3), \text{ l'élévation du vecteur } \vec{e}_3 \text{ au-dessus de l'objet droit } (O; \vec{e}_2) \end{aligned}$$

$\mu = ((O; \vec{e}_1; \vec{e}_3), \vec{e}_2)$, l'élévation du vecteur $\vec{e}_2$ au-dessus de l'objet plan $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_3)$

$(\vec{e}_3, \vec{e}_1) = ((O; \vec{e}_3), \vec{e}_1)$, l'élévation du vecteur $\vec{e}_1$ au-dessus de l'objet droit $(O; \vec{e}_3)$

Et de manière générale :

$((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_m), \vec{e}_{m+1})$, l'élévation du vecteur $\vec{e}_{m+1}$ au-dessus de l'objet $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_m)$ (qui est mD) s'il est une base)

$(\vec{e}_p, \vec{e}_{p'}) = ((O; \vec{e}_p), \vec{e}_{p'})$, l'élévation du vecteur $\vec{e}_{p'}$ au-dessus de l'objet droit $(O; \vec{e}_p)$

4.3a Produit vectoriel en nD

Dans toutes les dimensions :

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \underset{\substack{(\vec{v}_1; \vec{v}_2) \in \{\vec{e}_i\}_n \\ \vec{v}_1 = \vec{0} \text{ et/ou } \vec{v}_2 = \vec{0}}}{=} \text{indéfini}$$

Pour deux vecteurs d'un espace vectoriel de dimension $n \geq 3$, le produit vectoriel est défini dans le même espace $n \geq 3$. On montre ci-dessous les développés jusqu'à $n = 5$ dans chaque base $\{\vec{e}_i\}_n$:

$n = 0$:

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \underset{(\vec{v}_1; \vec{v}_2) \in \{\vec{e}_i\}_0}{=} \vec{0} \wedge \vec{0} = \text{indéfini}$$

$n = 1$:

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \underset{\substack{(\vec{v}_1; \vec{v}_2) \in \{\vec{e}_i\}_1 \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0}}}{=} (v_{1|1} \cdot \vec{e}_1) \wedge (v_{2|1} \cdot \vec{e}_1) = \text{indéfini}$$

$n = 2$:

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \underset{\substack{(\vec{v}_1; \vec{v}_2) \in \{\vec{e}_i\}_2 \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0}}}{=} (v_{1|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{1|2} \cdot \vec{e}_2) \wedge (v_{2|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{2|2} \cdot \vec{e}_2)$$

$$= (v_{1|1} \cdot v_{2|2} - v_{1|2} \cdot v_{2|1}) \cdot \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$$

$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$ est indéfini en 2D car une base est une famille de vecteurs non liés, donc $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ ne sont pas colinéaires. Mais si $(v_{1|1} \cdot v_{2|2} - v_{1|2} \cdot v_{2|1}) = 0$, pour $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ non nuls et colinéaires, on pose qu'il y a assez de dimensions dans le plan pour définir un vecteur nul orthogonal à $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$. Donc :

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \underset{\substack{(\vec{v}_1; \vec{v}_2) \in \{\vec{e}_i\}_2 \\ \vec{v}_1 = \lambda \cdot \vec{v}_2 \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0}}}{=} \vec{0}$$

Note : c'est un « oukase » de ma part, le produit de « zéro » et de « indéfini » étant jugé défini !

Et si $(v_{1|1} \cdot v_{2|2} - v_{1|2} \cdot v_{2|1}) \neq 0$:

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \underset{\substack{(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in \{\vec{e}_i\}_2 \\ \vec{v}_1 \neq \lambda \cdot \vec{v}_2 \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0}}}{=} \text{indéfini}$$

$n = 3$:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 &\underset{\substack{(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in \{\vec{e}_i\}_3 \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0}}}{=} (v_{1|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{1|2} \cdot \vec{e}_2 + v_{1|3} \cdot \vec{e}_3) \wedge (v_{2|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{2|2} \cdot \vec{e}_2 + v_{2|3} \cdot \vec{e}_3) \\ &= (v_{1|1} \cdot v_{2|2} - v_{1|2} \cdot v_{2|1}) \cdot \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 + (v_{1|1} \cdot v_{2|3} - v_{1|3} \cdot v_{2|1}) \cdot \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 \\ &\quad + (v_{1|2} \cdot v_{2|3} - v_{1|3} \cdot v_{2|2}) \cdot \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 &= (e_1 e_2)_{|1} \cdot \vec{e}_1 + (e_1 e_2)_{|2} \cdot \vec{e}_2 + (e_1 e_2)_{|3} \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 &= (e_1 e_3)_{|1} \cdot \vec{e}_1 + (e_1 e_3)_{|2} \cdot \vec{e}_2 + (e_1 e_3)_{|3} \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 &= (e_2 e_3)_{|1} \cdot \vec{e}_1 + (e_2 e_3)_{|2} \cdot \vec{e}_2 + (e_2 e_3)_{|3} \cdot \vec{e}_3 \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} (v_1 v_2)_{|1} &= (v_{1|1} \cdot v_{2|2} - v_{1|2} \cdot v_{2|1}) \cdot (e_1 e_2)_{|1} + (v_{1|1} \cdot v_{2|3} - v_{1|3} \cdot v_{2|1}) \cdot (e_1 e_3)_{|1} + (v_{1|2} \cdot v_{2|3} - v_{1|3} \cdot v_{2|2}) \cdot (e_2 e_3)_{|1} \\ (v_1 v_2)_{|2} &= (v_{1|1} \cdot v_{2|2} - v_{1|2} \cdot v_{2|1}) \cdot (e_1 e_2)_{|2} + (v_{1|1} \cdot v_{2|3} - v_{1|3} \cdot v_{2|1}) \cdot (e_1 e_3)_{|2} + (v_{1|2} \cdot v_{2|3} - v_{1|3} \cdot v_{2|2}) \cdot (e_2 e_3)_{|2} \\ (v_1 v_2)_{|3} &= (v_{1|1} \cdot v_{2|2} - v_{1|2} \cdot v_{2|1}) \cdot (e_1 e_2)_{|3} + (v_{1|1} \cdot v_{2|3} - v_{1|3} \cdot v_{2|1}) \cdot (e_1 e_3)_{|3} + (v_{1|2} \cdot v_{2|3} - v_{1|3} \cdot v_{2|2}) \cdot (e_2 e_3)_{|3} \end{aligned}$$

On voit bien que $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \underset{\substack{(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in \{\vec{e}_i\}_3 \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0}}}{=}$ est une combinaison linéaire qui reste en 3D. Les valeurs des coordonnées

$(e_p e_{p'})_{|i}$ étant données par le tableau déjà étudié dans les chapitres précédents et qu'on donne ci-dessous réécrit avec la nouvelle notation :

$\vec{OF} = \lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{e}_2$; $\vec{OG} = \lambda_3 \cdot \vec{e}_2 + \lambda_4 \cdot \vec{e}_3$; $\vec{OZ} = \lambda_5 \cdot \vec{e}_3 + \lambda_6 \cdot \vec{e}_1$	
$(e_1 e_2)_{ 1} \underset{\sin(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cdot \sin(\vec{OF}, \vec{e}_3) \neq 0}{=} \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{ \sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2) \cdot \sin(\vec{e}_2, \vec{OF}) \cdot \cos((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3)}{ \sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3) \cdot \sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2)}$	$(e_1 e_2)_{ 1} \underset{\vec{e}_3 \perp (O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)_{2D}}{=} 0$
$(e_1 e_2)_{ 2} \underset{\sin(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cdot \sin(\vec{OF}, \vec{e}_3) \neq 0}{=} -\psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{ \sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2) \cdot \sin(\vec{e}_1, \vec{OF}) \cdot \cos((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3)}{ \sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3) \cdot \sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2)}$	$(e_1 e_2)_{ 2} \underset{\vec{e}_3 \perp (O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)_{2D}}{=} 0$
$(e_1 e_2)_{ 3} \underset{\sin(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cdot \sin(\vec{OF}, \vec{e}_3) \neq 0}{=} \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{ \sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2) }{ \sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3) }$	$(e_1 e_2)_{ 3} \underset{\vec{e}_3 \perp (O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)_{2D}}{=} \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2) $
$(e_2 e_3)_{ 1} \underset{\sin(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cdot \sin(\vec{OF}, \vec{e}_3) \neq 0}{=} \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{ \sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2) }{ \sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3) }$	$(e_2 e_3)_{ 1} \underset{\vec{e}_1 \perp (O; \vec{e}_2; \vec{e}_3)_{2D}}{=} \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \sin((O; \vec{e}_2), \vec{e}_3) $
	$(e_2 e_3)_{ 2} \underset{\vec{e}_1 \perp (O; \vec{e}_2; \vec{e}_3)_{2D}}{=} 0$

$(e_2 e_3)_{ 1} = \frac{\psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{ sin((O; \vec{e}_2), \vec{e}_3) }{ sin((O; \vec{e}_2; \vec{e}_3), \vec{e}_1) }}{sin(\vec{e}_2, \vec{e}_3) \cdot sin(\vec{OG}, \vec{e}_1) \neq 0}$	$(e_2 e_3)_{ 3} = \frac{0}{\vec{e}_1 \perp (O; \vec{e}_2; \vec{e}_3) 2D}$
$(e_2 e_3)_{ 2} = \frac{\psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{ sin((O; \vec{e}_2), \vec{e}_3) \cdot sin(\vec{e}_3, \vec{OG}) \cdot cos((O; \vec{e}_2; \vec{e}_3), \vec{e}_1)}{ sin((O; \vec{e}_2; \vec{e}_3), \vec{e}_1) \cdot sin(\vec{e}_2, \vec{e}_3)}}{sin(\vec{e}_2, \vec{e}_3) \cdot sin(\vec{OG}, \vec{e}_1) \neq 0}$	$(e_3 e_1)_{ 1} = \frac{0}{\vec{e}_2 \perp (O; \vec{e}_3; \vec{e}_1) 2D}$
$(e_2 e_3)_{ 3} = \frac{-\psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{ sin((O; \vec{e}_2), \vec{e}_3) \cdot sin(\vec{e}_2, \vec{OG}) \cdot cos((O; \vec{e}_2; \vec{e}_3), \vec{e}_1)}{ sin((O; \vec{e}_2; \vec{e}_3), \vec{e}_1) \cdot sin((O; \vec{e}_2), \vec{e}_3)}}{sin(\vec{e}_2, \vec{e}_3) \cdot sin(\vec{OG}, \vec{e}_1) \neq 0}$	$(e_3 e_1)_{ 2} = \frac{\psi_3 \cdot \xi_3 \cdot sin((O; \vec{e}_3), \vec{e}_1) }{\vec{e}_2 \perp (O; \vec{e}_3; \vec{e}_1) 2D}$
$(e_3 e_1)_{ 1} = \frac{-\psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{ sin((O; \vec{e}_3), \vec{e}_1) \cdot sin(\vec{e}_3, \vec{OZ}) \cdot cos((O; \vec{e}_1; \vec{e}_3), \vec{e}_2)}{ sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_3), \vec{e}_2) \cdot sin((O; \vec{e}_3), \vec{e}_1)}}{sin(\vec{e}_3, \vec{e}_1) \cdot sin(\vec{OZ}, \vec{e}_2) \neq 0}$	$(e_3 e_1)_{ 3} = \frac{0}{\vec{e}_2 \perp (O; \vec{e}_3; \vec{e}_1) 2D}$
$(e_3 e_1)_{ 2} = \frac{\psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{ sin((O; \vec{e}_3), \vec{e}_1) }{ sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_3), \vec{e}_2) }}{sin(\vec{e}_3, \vec{e}_1) \cdot sin(\vec{OZ}, \vec{e}_2) \neq 0}$	
$(e_3 e_1)_{ 3} = \frac{\psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{ sin((O; \vec{e}_3), \vec{e}_1) \cdot sin(\vec{e}_1, \vec{OZ}) \cdot cos((O; \vec{e}_1; \vec{e}_3), \vec{e}_2)}{ sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_3), \vec{e}_2) \cdot sin((O; \vec{e}_3), \vec{e}_1)}}{sin(\vec{e}_3, \vec{e}_1) \cdot sin(\vec{OZ}, \vec{e}_2) \neq 0}$	

n = 4 :

$$\begin{aligned}
 \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 &=_{\substack{(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in \{\vec{e}_i\}_4 \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0}}} (v_{1|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{1|2} \cdot \vec{e}_2 + v_{1|3} \cdot \vec{e}_3 + v_{1|4} \cdot \vec{e}_4) \wedge (v_{2|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{2|2} \cdot \vec{e}_2 + v_{2|3} \cdot \vec{e}_3 + v_{2|4} \cdot \vec{e}_4) \\
 &= (v_{1|1} \cdot v_{2|2} - v_{1|2} \cdot v_{2|1}) \cdot \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 + (v_{1|1} \cdot v_{2|3} - v_{1|3} \cdot v_{2|1}) \cdot \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 + (v_{1|1} \cdot v_{2|4} - v_{1|4} \cdot v_{2|1}) \cdot \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_4 \\
 &\quad + (v_{1|2} \cdot v_{2|3} - v_{1|3} \cdot v_{2|2}) \cdot \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 + (v_{1|2} \cdot v_{2|4} - v_{1|4} \cdot v_{2|2}) \cdot \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_4 \\
 &\quad + (v_{1|3} \cdot v_{2|4} - v_{1|4} \cdot v_{2|3}) \cdot \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_4
 \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 &= (e_1 e_2)_{|1} \cdot \vec{e}_1 + (e_1 e_2)_{|2} \cdot \vec{e}_2 + (e_1 e_2)_{|3} \cdot \vec{e}_3 + (e_1 e_2)_{|4} \cdot \vec{e}_4 \\
 \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 &= (e_1 e_3)_{|1} \cdot \vec{e}_1 + (e_1 e_3)_{|2} \cdot \vec{e}_2 + (e_1 e_3)_{|3} \cdot \vec{e}_3 + (e_1 e_3)_{|4} \cdot \vec{e}_4 \\
 \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 &= (e_2 e_3)_{|1} \cdot \vec{e}_1 + (e_2 e_3)_{|2} \cdot \vec{e}_2 + (e_2 e_3)_{|3} \cdot \vec{e}_3 + (e_2 e_3)_{|4} \cdot \vec{e}_4 \\
 \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_4 &= (e_1 e_4)_{|1} \cdot \vec{e}_1 + (e_1 e_4)_{|2} \cdot \vec{e}_2 + (e_1 e_4)_{|3} \cdot \vec{e}_3 + (e_1 e_4)_{|4} \cdot \vec{e}_4 \\
 \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_4 &= (e_2 e_4)_{|1} \cdot \vec{e}_1 + (e_2 e_4)_{|2} \cdot \vec{e}_2 + (e_2 e_4)_{|3} \cdot \vec{e}_3 + (e_2 e_4)_{|4} \cdot \vec{e}_4 \\
 \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_4 &= (e_3 e_4)_{|1} \cdot \vec{e}_1 + (e_3 e_4)_{|2} \cdot \vec{e}_2 + (e_3 e_4)_{|3} \cdot \vec{e}_3 + (e_3 e_4)_{|4} \cdot \vec{e}_4
 \end{aligned}$$

On a :

$$(v_1 v_2)_{|1} = (v_{1|1} \cdot v_{2|2} - v_{1|2} \cdot v_{2|1}) \cdot (e_1 e_2)_{|1} + (v_{1|1} \cdot v_{2|3} - v_{1|3} \cdot v_{2|1}) \cdot (e_1 e_3)_{|1} + (v_{1|2} \cdot v_{2|3} - v_{1|3} \cdot v_{2|2}) \cdot (e_2 e_3)_{|1} \\ + (v_{1|1} \cdot v_{2|4} - v_{1|4} \cdot v_{2|1}) \cdot (e_1 e_4)_{|1} + (v_{1|2} \cdot v_{2|4} - v_{1|4} \cdot v_{2|2}) \cdot (e_2 e_4)_{|1} + (v_{1|3} \cdot v_{2|4} - v_{1|4} \cdot v_{2|3}) \cdot (e_3 e_4)_{|1}$$

$$(v_1 v_2)_{|2} = (v_{1|1} \cdot v_{2|2} - v_{1|2} \cdot v_{2|1}) \cdot (e_1 e_2)_{|2} + (v_{1|1} \cdot v_{2|3} - v_{1|3} \cdot v_{2|1}) \cdot (e_1 e_3)_{|2} + (v_{1|2} \cdot v_{2|3} - v_{1|3} \cdot v_{2|2}) \cdot (e_2 e_3)_{|2} \\ + (v_{1|1} \cdot v_{2|4} - v_{1|4} \cdot v_{2|1}) \cdot (e_1 e_4)_{|2} + (v_{1|2} \cdot v_{2|4} - v_{1|4} \cdot v_{2|2}) \cdot (e_2 e_4)_{|2} + (v_{1|3} \cdot v_{2|4} - v_{1|4} \cdot v_{2|3}) \cdot (e_3 e_4)_{|2}$$

$$(v_1 v_2)_{|3} = (v_{1|1} \cdot v_{2|2} - v_{1|2} \cdot v_{2|1}) \cdot (e_1 e_2)_{|3} + (v_{1|1} \cdot v_{2|3} - v_{1|3} \cdot v_{2|1}) \cdot (e_1 e_3)_{|3} + (v_{1|2} \cdot v_{2|3} - v_{1|3} \cdot v_{2|2}) \cdot (e_2 e_3)_{|3} \\ + (v_{1|1} \cdot v_{2|4} - v_{1|4} \cdot v_{2|1}) \cdot (e_1 e_4)_{|3} + (v_{1|2} \cdot v_{2|4} - v_{1|4} \cdot v_{2|2}) \cdot (e_2 e_4)_{|3} + (v_{1|3} \cdot v_{2|4} - v_{1|4} \cdot v_{2|3}) \cdot (e_3 e_4)_{|3}$$

$$(v_1 v_2)_{|4} = (v_{1|1} \cdot v_{2|2} - v_{1|2} \cdot v_{2|1}) \cdot (e_1 e_2)_{|4} + (v_{1|1} \cdot v_{2|3} - v_{1|3} \cdot v_{2|1}) \cdot (e_1 e_3)_{|4} + (v_{1|2} \cdot v_{2|3} - v_{1|3} \cdot v_{2|2}) \cdot (e_2 e_3)_{|4} \\ + (v_{1|1} \cdot v_{2|4} - v_{1|4} \cdot v_{2|1}) \cdot (e_1 e_4)_{|4} + (v_{1|2} \cdot v_{2|4} - v_{1|4} \cdot v_{2|2}) \cdot (e_2 e_4)_{|4} + (v_{1|3} \cdot v_{2|4} - v_{1|4} \cdot v_{2|3}) \cdot (e_3 e_4)_{|4}$$

On voit bien que $\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}$ est une combinaison linéaire qui reste en 4D. Le problème qui se pose lors du calcul de cette combinaison dans l'espace 4D non perceptible aux sens est de caractériser les mesures des $(e_p e_{p'})_{|i}$. On peut laisser de côté ce problème et continuer d'avancer en attendant.

$n = 5$:

$$\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} \underset{\substack{(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) \in \{\overrightarrow{e_i}\}_5 \\ \overrightarrow{v_1} \neq \vec{0} \text{ et } \overrightarrow{v_2} \neq \vec{0}}}{=} (v_{1|1} \cdot \overrightarrow{e_1} + v_{1|2} \cdot \overrightarrow{e_2} + v_{1|3} \cdot \overrightarrow{e_3} + v_{1|4} \cdot \overrightarrow{e_4} + v_{1|5} \cdot \overrightarrow{e_5}) \wedge (v_{2|1} \cdot \overrightarrow{e_1} + v_{2|2} \cdot \overrightarrow{e_2} + v_{2|3} \cdot \overrightarrow{e_3} + v_{2|4} \cdot \overrightarrow{e_4} + v_{2|5} \cdot \overrightarrow{e_5}) \\ = (v_{1|1} \cdot v_{2|2} - v_{1|2} \cdot v_{2|1}) \cdot \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2} + (v_{1|1} \cdot v_{2|3} - v_{1|3} \cdot v_{2|1}) \cdot \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_3} + (v_{1|1} \cdot v_{2|4} - v_{1|4} \cdot v_{2|1}) \cdot \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_4} \\ + (v_{1|1} \cdot v_{2|5} - v_{1|5} \cdot v_{2|1}) \cdot \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_5} \\ + (v_{1|2} \cdot v_{2|3} - v_{1|3} \cdot v_{2|2}) \cdot \overrightarrow{e_2} \wedge \overrightarrow{e_3} + (v_{1|2} \cdot v_{2|4} - v_{1|4} \cdot v_{2|2}) \cdot \overrightarrow{e_2} \wedge \overrightarrow{e_4} + (v_{1|2} \cdot v_{2|5} - v_{1|5} \cdot v_{2|2}) \cdot \overrightarrow{e_2} \wedge \overrightarrow{e_5} \\ + (v_{1|3} \cdot v_{2|4} - v_{1|4} \cdot v_{2|3}) \cdot \overrightarrow{e_3} \wedge \overrightarrow{e_4} + (v_{1|3} \cdot v_{2|5} - v_{1|5} \cdot v_{2|3}) \cdot \overrightarrow{e_3} \wedge \overrightarrow{e_5} + (v_{1|4} \cdot v_{2|5} - v_{1|5} \cdot v_{2|4}) \cdot \overrightarrow{e_4} \wedge \overrightarrow{e_5}$$

n quelconque :

On voit alors se dégager l'écriture suivante de $\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}$, pour deux vecteurs non nuls quelconques $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$, le produit vectoriel étant toujours défini pour $n \geq 3$ et $n = 2$ sous conditions de colinéarité de $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$

Pour chaque valeur de i on a une somme faite de toutes les valeurs de k , et ensuite on effectue la somme de ces sommes partielles :

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \underset{\substack{(\vec{v}_1; \vec{v}_2) \in \{\vec{e}_i\} (n \geq 2) \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0}}}{=} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-i} \left(v_{1|i} \cdot v_{2|(i+k)} - v_{1|(i+k)} \cdot v_{2|i} \right) \cdot (\vec{e}_i \wedge \vec{e}_{(i+k)}) \right)$$

Pour chaque valeur de i on a une somme faite de toutes les valeurs de k , et ensuite on effectue la somme de ces sommes partielles. Le développé de cette écriture comporte $\frac{n!}{2!(n-2)!}$ déterminants 2×2 , chacun correspondant à un couple de deux vecteurs unitaires $\vec{e}_i \wedge \vec{e}_{(i+k)}$ pris dans la famille $\{\vec{e}_i\}_n$.

Note : l'esprit a cherché ici des motifs mentaux généraux analogiques aux cas particuliers. La justification d'une abstraction est en premier lieu à rebours : on teste une écriture synthétique pour voir si elle donne les mêmes développements que ceux faits sur des cas particuliers, car on ne sait pas clairement où l'on va, quoi faire, quoi penser quand on cherche (c'est même le sens du mot « chercher »). Ensuite seulement on présente l'hypothèse qui fonctionne comme cause première, occultant par là le tâtonnement et l'incertitude inhérents à la recherche.

Le calcul de chaque coordonnée $(v_1 v_2)_{|i}$ de $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ est donné par :

$$(v_1 v_2)_{|i} \underset{\substack{(\vec{v}_1; \vec{v}_2) \in \{\vec{e}_i\} (n \geq 2) \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0}}}{=} \sum_{p=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-p} \left(v_{1|p} \cdot v_{2|(p+k)} - v_{1|(p+k)} \cdot v_{2|p} \right) \cdot (e_p e_{(p+k)})_{|i} \right) \quad (a)$$

Note : $\{\vec{e}_i\}_{(n-1)}$ est l'unique sous-famille de vecteurs de $\{\vec{e}_i\}_n$, telle que $\{\vec{e}_i\}_{(n-1)} = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_{(n-1)}\}$.

Attention, si on utilise la relation de récurrence pour calculer les coordonnées $(v_1 v_2)_{|i}$ dans $\{\vec{e}_i\}_{(n \geq 2)}$, l'indice i dans $(v_1 v_2)_{|i}$ va de 1 à $(n-1)$ mais son calcul est fait sur $\{\vec{e}_i\}_{(n \geq 2)}$ avec la relation (a). Parce que cela prête à confusion on ne présentera pas les relations de récurrence pour les produits vectoriels, scalaires et mixtes dans le tableau récapitulatif des formules.

On a donc :

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \underset{\substack{(\vec{v}_1; \vec{v}_2) \in \{\vec{e}_i\} (n \geq 2) \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0}}}{=} & \sum_{p=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-p} \left(v_{1|p} \cdot v_{2|(p+k)} - v_{1|(p+k)} \cdot v_{2|p} \right) \cdot (e_p e_{(p+k)})_{|1} \right) \cdot \vec{e}_1 \\ & + \sum_{p=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-p} \left(v_{1|p} \cdot v_{2|(p+k)} - v_{1|(p+k)} \cdot v_{2|p} \right) \cdot (e_p e_{(p+k)})_{|2} \right) \cdot \vec{e}_2 \\ & + \dots + \sum_{p=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-p} \left(v_{1|p} \cdot v_{2|(p+k)} - v_{1|(p+k)} \cdot v_{2|p} \right) \cdot (e_p e_{(p+k)})_{|n} \right) \cdot \vec{e}_n \end{aligned}$$

4.3b Produit scalaire en nD

Dans toutes les dimensions :

$$\vec{v}_1 \boxtimes \vec{v}_2 \underset{\substack{(\vec{v}_1; \vec{v}_2) \in \{\vec{e}_i\}_n \\ \vec{v}_1 = \vec{0} \text{ et/ou } \vec{v}_2 = \vec{0}}}{=} \text{indéfini}$$

Pour deux vecteurs d'un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, permettant la définition des angles nul ou plat, le produit scalaire est défini dans l'espace de dimension $n = 1$ assimilable à celui des nombres réels. On montre ci-dessous les développés jusqu'à $n = 4$ dans chaque base $\{\vec{e}_i\}_n$:

$n = 0$:

$$\vec{v}_1 \boxtimes \vec{v}_2 \underset{(\vec{v}_1; \vec{v}_2) \in \{\vec{e}_i\}_0}{=} \vec{0} \boxtimes \vec{0} = \text{indéfini}$$

$n = 1$:

$$\vec{v}_1 \boxtimes \vec{v}_2 \underset{\substack{(\vec{v}_1; \vec{v}_2) \in \{\vec{e}_i\}_1 \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0}}}{=} (v_{1|1} \cdot \vec{e}_1) \boxtimes (v_{2|1} \cdot \vec{e}_1) = \vec{e}_1 \boxtimes \vec{e}_1 \cdot v_{1|1} \cdot v_{2|1}$$

Avec :

$$\vec{e}_1 \boxtimes \vec{e}_1 = 1.1 \cdot \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 1$$

On a :

$$\vec{v}_1 \boxtimes \vec{v}_2 \underset{\substack{(\vec{v}_1; \vec{v}_2) \in \{\vec{e}_i\}_1 \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0}}}{=} v_{1|1} \cdot v_{2|1}$$

$n = 2$:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \boxtimes \vec{v}_2 &\underset{\substack{(\vec{v}_1; \vec{v}_2) \in \{\vec{e}_i\}_2 \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0}}}{=} (v_{1|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{1|2} \cdot \vec{e}_2) \boxtimes (v_{2|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{2|2} \cdot \vec{e}_2) \\ &= v_{1|1} \cdot v_{2|1} \cdot \vec{e}_1 \boxtimes \vec{e}_1 + v_{1|2} \cdot v_{2|2} \cdot \vec{e}_2 \boxtimes \vec{e}_2 + \vec{e}_1 \boxtimes \vec{e}_2 \cdot (v_{1|1} \cdot v_{2|2} + v_{1|2} \cdot v_{2|1}) \end{aligned}$$

Avec :

$$\vec{e}_1 \boxtimes \vec{e}_1 = \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) ; \vec{e}_1 \boxtimes \vec{e}_2 = \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$$

On a :

$$\vec{v}_1 \boxtimes \vec{v}_2 \underset{\substack{(\vec{v}_1; \vec{v}_2) \in \{\vec{e}_i\}_2 \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0}}}{=} v_{1|1} \cdot v_{2|1} + v_{1|2} \cdot v_{2|2} + \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cdot (v_{1|1} \cdot v_{2|2} + v_{1|2} \cdot v_{2|1})$$

$n = 3$:

$$\vec{v}_1 \boxtimes \vec{v}_2 \underset{\substack{(\vec{v}_1; \vec{v}_2) \in \{\vec{e}_i\}_3 \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0}}}{=} (v_{1|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{1|2} \cdot \vec{e}_2 + v_{1|3} \cdot \vec{e}_3) \boxtimes (v_{2|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{2|2} \cdot \vec{e}_2 + v_{2|3} \cdot \vec{e}_3)$$

$$= v_{1|1} \cdot v_{2|1} \cdot \vec{e}_1 \boxtimes \vec{e}_1 + v_{1|2} \cdot v_{2|2} \cdot \vec{e}_2 \boxtimes \vec{e}_2 + v_{1|3} \cdot v_{2|3} \cdot \vec{e}_3 \boxtimes \vec{e}_3 \\ + \vec{e}_1 \boxtimes \vec{e}_2 \cdot (v_{1|1} \cdot v_{2|2} + v_{1|2} \cdot v_{2|1}) + \vec{e}_1 \boxtimes \vec{e}_3 \cdot (v_{1|1} \cdot v_{2|3} + v_{1|3} \cdot v_{2|1}) + \vec{e}_2 \boxtimes \vec{e}_3 \cdot (v_{1|2} \cdot v_{2|3} + v_{1|3} \cdot v_{2|2})$$

Avec :

$$\vec{e}_1 \boxtimes \vec{e}_1 = \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) ; \quad \vec{e}_2 \boxtimes \vec{e}_2 = \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_2) ; \quad \vec{e}_3 \boxtimes \vec{e}_3 = \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_3) \\ \vec{e}_1 \boxtimes \vec{e}_2 = \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) ; \quad \vec{e}_1 \boxtimes \vec{e}_3 = \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_3) ; \quad \vec{e}_2 \boxtimes \vec{e}_3 = \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

On a :

$$\vec{v}_1 \boxtimes \vec{v}_2 \stackrel{=}{(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in \{\vec{e}_i\}_3} \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0}$$

$$\cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \cdot v_{1|1} \cdot v_{2|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \cdot v_{1|2} \cdot v_{2|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_3) \cdot v_{1|3} \cdot v_{2|3} + \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cdot (v_{1|1} \cdot v_{2|2} + v_{1|2} \cdot v_{2|1}) \\ + \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_3) \cdot (v_{1|1} \cdot v_{2|3} + v_{1|3} \cdot v_{2|1}) + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3) \cdot (v_{1|2} \cdot v_{2|3} + v_{1|3} \cdot v_{2|2})$$

n = 4 :

$$\vec{v}_1 \boxtimes \vec{v}_2 \stackrel{=}{(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in \{\vec{e}_i\}_4} \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0} (v_{1|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{1|2} \cdot \vec{e}_2 + v_{1|3} \cdot \vec{e}_3 + v_{1|4} \cdot \vec{e}_4) \boxtimes (v_{2|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{2|2} \cdot \vec{e}_2 + v_{2|3} \cdot \vec{e}_3 + v_{2|4} \cdot \vec{e}_4)$$

$$= v_{1|1} \cdot v_{2|1} \cdot \vec{e}_1 \boxtimes \vec{e}_1 + v_{1|2} \cdot v_{2|2} \cdot \vec{e}_2 \boxtimes \vec{e}_2 + v_{1|3} \cdot v_{2|3} \cdot \vec{e}_3 \boxtimes \vec{e}_3 + v_{1|4} \cdot v_{2|4} \cdot \vec{e}_4 \boxtimes \vec{e}_4 \\ + \vec{e}_1 \boxtimes \vec{e}_2 \cdot (v_{1|1} \cdot v_{2|2} + v_{1|2} \cdot v_{2|1}) + \vec{e}_1 \boxtimes \vec{e}_3 \cdot (v_{1|1} \cdot v_{2|3} + v_{1|3} \cdot v_{2|1}) \\ + \vec{e}_1 \boxtimes \vec{e}_4 \cdot (v_{1|1} \cdot v_{2|4} + v_{1|4} \cdot v_{2|1}) + \vec{e}_2 \boxtimes \vec{e}_3 \cdot (v_{1|2} \cdot v_{2|3} + v_{1|3} \cdot v_{2|2}) \\ + \vec{e}_2 \boxtimes \vec{e}_4 \cdot (v_{1|2} \cdot v_{2|4} + v_{1|4} \cdot v_{2|2}) + \vec{e}_3 \boxtimes \vec{e}_4 \cdot (v_{1|3} \cdot v_{2|4} + v_{1|4} \cdot v_{2|3})$$

Avec :

$$\vec{e}_1 \boxtimes \vec{e}_1 = \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) ; \quad \vec{e}_2 \boxtimes \vec{e}_2 = \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_2) ; \quad \vec{e}_3 \boxtimes \vec{e}_3 = \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_3) ; \quad \vec{e}_4 \boxtimes \vec{e}_4 = \cos(\vec{e}_4, \vec{e}_4) \\ \vec{e}_1 \boxtimes \vec{e}_2 = \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) ; \quad \vec{e}_1 \boxtimes \vec{e}_3 = 1.1. \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_3) ; \quad \vec{e}_1 \boxtimes \vec{e}_4 = \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_4) \\ \vec{e}_2 \boxtimes \vec{e}_3 = \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3) ; \quad \vec{e}_2 \boxtimes \vec{e}_4 = \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_4) ; \quad \vec{e}_3 \boxtimes \vec{e}_4 = \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_4)$$

On a :

$$\vec{v}_1 \boxtimes \vec{v}_2 \stackrel{=}{(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in \{\vec{e}_i\}_4} \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0}$$

$$= \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \cdot v_{1|1} \cdot v_{2|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \cdot v_{1|2} \cdot v_{2|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_3) \cdot v_{1|3} \cdot v_{2|3} + \cos(\vec{e}_4, \vec{e}_4) \cdot v_{1|4} \cdot v_{2|4} \\ + \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cdot (v_{1|1} \cdot v_{2|2} + v_{1|2} \cdot v_{2|1}) + \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_3) \cdot (v_{1|1} \cdot v_{2|3} + v_{1|3} \cdot v_{2|1}) \\ + \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_4) \cdot (v_{1|1} \cdot v_{2|4} + v_{1|4} \cdot v_{2|1}) + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3) \cdot (v_{1|2} \cdot v_{2|3} + v_{1|3} \cdot v_{2|2}) \\ + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_4) \cdot (v_{1|2} \cdot v_{2|4} + v_{1|4} \cdot v_{2|2}) + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_4) \cdot (v_{1|3} \cdot v_{2|4} + v_{1|4} \cdot v_{2|3})$$

On voit bien que $\vec{v}_1 \boxtimes \vec{v}_2$ est une combinaison linéaire qui reste en 1D, l'espace des nombres réels. Le
 $(\vec{v}_1; \vec{v}_2) \in \{\vec{e}_i\}_4$
 $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ et $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$

problème qui se pose lors du calcul de cette combinaison dans l'espace 4D non perceptible aux sens est de caractériser les mesures des $\cos(e_p, e_{p'})$. On peut laisser de côté ce problème et continuer d'avancer en attendant.

***n* quelconque :**

On voit alors se dégager l'écriture suivante pour deux vecteurs non nuls quelconques $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$, le produit scalaire étant alors toujours défini pour $n \geq 1$:

$$\vec{v}_1 \boxtimes \vec{v}_2 \underset{\substack{(\vec{v}_1; \vec{v}_2) \in \{\vec{e}_i\}_{(n \geq 2)} \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0}}}{=} \sum_{i=1}^n v_{1|i} \cdot v_{2|i} + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^j (v_{1|i} \cdot v_{2|i+n-j} + v_{1|i+n-j} \cdot v_{2|i}) \cdot \cos(\vec{e}_i, \vec{e}_{i+n-j}) \right)$$

4.3c Norme d'un vecteur en nD

$$\vec{v}_1 \boxtimes \vec{v}_1 \underset{\substack{(\vec{v}_1; \vec{v}_1) \in \{\vec{e}_i\}_{(n \geq 2)} \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0}}}{=} (||\vec{v}_1|| \cdot ||\vec{v}_1|| \cdot \cos(\vec{v}_1, \vec{v}_1))^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n (v_{1|i})^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^j (v_{1|i} \cdot v_{1|i+n-j} + v_{1|i+n-j} \cdot v_{1|i}) \cdot \cos(\vec{e}_i, \vec{e}_{i+n-j}) \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

4.3d Produit mixte en nD

Son domaine de définition est restreint par celui du produit vectoriel à $n \geq 3$ et $n = 2$ sous conditions de colinéarité de $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$. On a donc de façon générale, en se servant des formules précédentes :

$$\vec{v}_1 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3) \underset{\substack{(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3) \in \{\vec{e}_i\}_{(n \geq 2)} \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_3 \neq \vec{0}}}{=} \sum_{i=1}^n v_{1|i} \cdot (v_2 v_3)_{|i} + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^j (v_{1|i} \cdot v_2 v_3|_{i+n-j} + v_{1|i+n-j} \cdot v_2 v_3|_i) \cdot \cos(\vec{e}_i, \vec{e}_{i+n-j}) \right)$$

Le calcul de chaque coordonnée $(v_2 v_3)_{|i}$ de $\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3$ est donné par :

$$(v_2 v_3)_{|i} \underset{\substack{(\vec{v}_2; \vec{v}_3) \in \{\vec{e}_i\}_{(n \geq 2)} \\ \vec{v}_3 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0}}}{=} \sum_{p=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-p} (v_{2|p} \cdot v_{3|(p+k)} - v_{2|(p+k)} \cdot v_{3|p}) \cdot (e_p e_{(p+k)})_{|i} \right)$$

4.3e Développements dans l'espace euclidien du produit mixte avec l'écriture synthétique

$n = 0$:

$$\begin{array}{c} \vec{v}_1 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3) \\ \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3\} \in \{\vec{e}_i\}_0 \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_3 \neq \vec{0} \end{array} = \text{indéfini}$$

Dans tous les cas l'espace 0D n'admet pas assez de dimension pour définir une orthogonalité même nulle à deux vecteurs (nécessairement nuls comme combinaison de vecteurs unitaires nuls) en produit vectoriel. La forme géométrique de leur produit vectoriel est indéfinie comme la forme analytique censée décrire le même objet doit l'être aussi. Donc par suite $\vec{v}_1 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3)$ est indéfini dans ce cas.

$n = 1$:

$$\begin{array}{c} \vec{v}_1 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3) \\ \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3\} \in \{\vec{e}_i\}_1 \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_3 \neq \vec{0} \end{array} = \text{indéfini}$$

Dans tous les cas l'espace 1D n'admet pas assez de dimension pour définir une orthogonalité à deux vecteurs en produit vectoriel. La forme géométrique de leur produit vectoriel est indéfinie comme la forme analytique censée décrire le même objet doit l'être aussi. Donc par suite $\vec{v}_1 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3)$ est indéfini dans ce cas.

$n = 2$:

$$\begin{array}{c} \vec{v}_1 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3) \\ \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3\} \in \{\vec{e}_i\}_2 \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_3 \neq \vec{0} \end{array} =$$

$$= v_{1|1} \cdot (v_2 v_3)_{|1} + v_{1|2} \cdot (v_2 v_3)_{|2} + \left(v_{1|1} \cdot (v_2 v_3)_{|2} + v_{1|2} \cdot (v_2 v_3)_{|1} \right) \cdot \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_1)$$

Avec :

$$(v_2 v_3)_{|i} \underset{\substack{\{\vec{v}_2; \vec{v}_3\} \in \{\vec{e}_i\}_2 \\ \vec{v}_2 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_3 \neq \vec{0}}}}{=} \sum_{p=1}^{2-1} \left(\sum_{k=1}^{2-p} (v_{2|p} \cdot v_{3|(p+k)} - v_{2|(p+k)} \cdot v_{3|p}) \cdot (e_p e_{(p+k)})_{|i} \right)$$

Qui donne :

$$(v_2 v_3)_{|1} = (v_{2|1} \cdot v_{3|2} - v_{2|2} \cdot v_{3|1}) \cdot (e_1 e_2)_{|1}$$

$$(v_2 v_3)_{|2} = (v_{2|1} \cdot v_{3|2} - v_{2|2} \cdot v_{3|1}) \cdot (e_1 e_2)_{|2}$$

On le développe complètement :

$$\begin{array}{c} \vec{v}_1 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3) \\ \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3\} \in \{\vec{e}_i\}_2 \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_3 \neq \vec{0} \end{array} =$$

$$\begin{aligned} & v_{1|1} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{3|2} - v_{2|2} \cdot v_{3|1}) \cdot (e_1 e_2)_{|1} + v_{1|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{3|2} - v_{2|2} \cdot v_{3|1}) \cdot (e_1 e_2)_{|2} \\ & + \left(v_{1|1} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{3|2} - v_{2|2} \cdot v_{3|1}) \cdot (e_1 e_2)_{|2} + v_{1|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{3|2} - v_{2|2} \cdot v_{3|1}) \cdot (e_1 e_2)_{|1} \right) \cdot \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_1) \end{aligned}$$

$$= v_{1|1} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{3|2} - v_{2|2} \cdot v_{3|1}) \cdot (\cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \cdot (e_1 e_2)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_1) \cdot (e_1 e_2)_{|2}) \\ + v_{1|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{3|2} - v_{2|2} \cdot v_{3|1}) \cdot (\cos(\vec{e}_2, \vec{e}_1) \cdot (e_1 e_2)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \cdot (e_1 e_2)_{|2})$$

Il n'y a pas assez de dimensions dans l'espace 2D pour que $\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3$ soit défini si $\vec{v}_2; \vec{v}_3$ famille libre ($\vec{v}_2$ non colinéaire à $\vec{v}_3$) dans ce cas :

$$\frac{\vec{v}_1 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3)}{\substack{\{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3\} \in \{\vec{e}_i\}^2 \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_3 \neq \vec{0} \\ \vec{v}_2 \neq \lambda \vec{v}_3}} = \text{indéfini}$$

Dans tous les cas $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$ formé sur la base $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$ est indéfini

$$(e_1 e_2)_{|1} = (e_1 e_2)_{|2} = (e_1 e_2)_{|3} = \text{indéfini}$$

Il y a assez de dimensions dans l'espace 2D pour que $\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3$ soit défini si $\vec{v}_2; \vec{v}_3$ famille liée ($\vec{v}_2$ colinéaire à $\vec{v}_3$) dans ce cas :

$$\frac{\vec{v}_1 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3)}{\substack{(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3) \in \{\vec{e}_i\}^2 \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_3 \neq \vec{0} \\ \vec{v}_2 = \lambda \vec{v}_3}} = \vec{0}$$

Là aussi $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$ formé sur la base $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$ est indéfini

$$(e_1 e_2)_{|1} = (e_1 e_2)_{|2} = (e_1 e_2)_{|3} = \text{indéfini}$$

Note : il y a paradoxe avec $\vec{v}_1 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3)$ qui est cependant défini, on tentera de le résoudre au prochain chapitre.

n = 3 :

On a :

$$\frac{\vec{v}_1 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3)}{\substack{\{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3\} \in \{\vec{e}_i\}^3 \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_3 \neq \vec{0}}} = \\ = v_{1|1} \cdot (v_2 v_3)_{|1} + v_{1|2} \cdot (v_2 v_3)_{|2} + v_{1|3} \cdot (v_2 v_3)_{|3} + (v_{1|1} \cdot (v_2 v_3)_{|2} + v_{1|2} \cdot (v_2 v_3)_{|1}) \cdot \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_1) \\ + (v_{1|1} \cdot (v_2 v_3)_{|3} + v_{1|3} \cdot (v_2 v_3)_{|1}) \cdot \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_1) + (v_{1|2} \cdot (v_2 v_3)_{|3} + v_{1|3} \cdot (v_2 v_3)_{|2}) \cdot \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_2)$$

Avec :

$$(v_2 v_3)_{|i} \substack{= \\ (\vec{v}_2; \vec{v}_3) \in \{\vec{e}_i\}^2 \\ \vec{v}_2 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_3 \neq \vec{0}} \sum_{p=1}^{3-1} \left(\sum_{k=1}^{3-p} (v_{2|p} \cdot v_{3|(p+k)} - v_{2|(p+k)} \cdot v_{3|p}) \cdot (e_p e_{(p+k)})_{|i} \right)$$

Qui donne :

$$(v_2 v_3)_{|1} = (v_{2|1} \cdot v_{3|2} - v_{2|2} \cdot v_{3|1}) \cdot (e_1 e_2)_{|1} + (v_{2|1} \cdot v_{3|3} - v_{2|3} \cdot v_{3|1}) \cdot (e_1 e_3)_{|1} + (v_{2|2} \cdot v_{3|3} - v_{2|3} \cdot v_{3|2}) \cdot (e_2 e_3)_{|1} \\ (v_2 v_3)_{|2} = (v_{2|1} \cdot v_{3|2} - v_{2|2} \cdot v_{3|1}) \cdot (e_1 e_2)_{|2} + (v_{2|1} \cdot v_{3|3} - v_{2|3} \cdot v_{3|1}) \cdot (e_1 e_3)_{|2} + (v_{2|2} \cdot v_{3|3} - v_{2|3} \cdot v_{3|2}) \cdot (e_2 e_3)_{|2}$$

$$(v_2 v_3)_{|3} = \left(v_{2|1} \cdot v_{3|2} - v_{2|2} \cdot v_{3|1} \right) \cdot (e_1 e_2)_{|3} + \left(v_{2|1} \cdot v_{3|3} - v_{2|3} \cdot v_{3|1} \right) \cdot (e_1 e_3)_{|3} + \left(v_{2|2} \cdot v_{3|3} - v_{2|3} \cdot v_{3|2} \right) \cdot (e_2 e_3)_{|3}$$

On le développe complètement :

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{v_1} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_3}) \stackrel{=}{=} \{ \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3} \} \in \{ \overrightarrow{e_i} \}_3 \\ & \overrightarrow{v_1} \neq \vec{0} \text{ et } \overrightarrow{v_2} \neq \vec{0} \text{ et } \overrightarrow{v_3} \neq \vec{0} \\ & v_{1|1} \cdot \left(v_{2|1} \cdot v_{3|2} - v_{2|2} \cdot v_{3|1} \right) \cdot (e_1 e_2)_{|1} + v_{1|1} \cdot \left(v_{2|1} \cdot v_{3|3} - v_{2|3} \cdot v_{3|1} \right) \cdot (e_1 e_3)_{|1} + v_{1|1} \cdot \left(v_{2|2} \cdot v_{3|3} - v_{2|3} \cdot v_{3|2} \right) \cdot (e_2 e_3)_{|1} \\ & + v_{1|2} \cdot \left(v_{2|1} \cdot v_{3|2} - v_{2|2} \cdot v_{3|1} \right) \cdot (e_1 e_2)_{|2} + v_{1|2} \cdot \left(v_{2|1} \cdot v_{3|3} - v_{2|3} \cdot v_{3|1} \right) \cdot (e_1 e_3)_{|2} + v_{1|2} \cdot \left(v_{2|2} \cdot v_{3|3} - v_{2|3} \cdot v_{3|2} \right) \cdot (e_2 e_3)_{|2} \\ & + v_{1|3} \cdot \left(v_{2|1} \cdot v_{3|2} - v_{2|2} \cdot v_{3|1} \right) \cdot (e_1 e_2)_{|3} + v_{1|3} \cdot \left(v_{2|1} \cdot v_{3|3} - v_{2|3} \cdot v_{3|1} \right) \cdot (e_1 e_3)_{|3} + v_{1|3} \cdot \left(v_{2|2} \cdot v_{3|3} - v_{2|3} \cdot v_{3|2} \right) \cdot (e_2 e_3)_{|3} \\ & + \cos(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) \cdot v_{1|1} \cdot \left(v_{2|1} \cdot v_{3|2} - v_{2|2} \cdot v_{3|1} \right) \cdot (e_1 e_2)_{|2} \\ & + \cos(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) \cdot v_{1|1} \cdot \left(v_{2|1} \cdot v_{3|3} - v_{2|3} \cdot v_{3|1} \right) \cdot (e_1 e_3)_{|2} \\ & + \cos(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) \cdot v_{1|1} \cdot \left(v_{2|2} \cdot v_{3|3} - v_{2|3} \cdot v_{3|2} \right) \cdot (e_2 e_3)_{|2} \\ & + \cos(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) \cdot v_{1|2} \cdot \left(v_{2|1} \cdot v_{3|2} - v_{2|2} \cdot v_{3|1} \right) \cdot (e_1 e_2)_{|1} \\ & + \cos(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) \cdot v_{1|2} \cdot \left(v_{2|1} \cdot v_{3|3} - v_{2|3} \cdot v_{3|1} \right) \cdot (e_1 e_3)_{|1} \\ & + \cos(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) \cdot v_{1|2} \cdot \left(v_{2|2} \cdot v_{3|3} - v_{2|3} \cdot v_{3|2} \right) \cdot (e_2 e_3)_{|1} \\ & + \cos(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}) \cdot v_{1|1} \cdot \left(v_{2|1} \cdot v_{3|2} - v_{2|2} \cdot v_{3|1} \right) \cdot (e_1 e_2)_{|3} \\ & + \cos(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}) \cdot v_{1|1} \cdot \left(v_{2|1} \cdot v_{3|3} - v_{2|3} \cdot v_{3|1} \right) \cdot (e_1 e_3)_{|3} \\ & + \cos(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}) \cdot v_{1|1} \cdot \left(v_{2|2} \cdot v_{3|3} - v_{2|3} \cdot v_{3|2} \right) \cdot (e_2 e_3)_{|3} \\ & + \cos(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}) \cdot v_{1|3} \cdot \left(v_{2|1} \cdot v_{3|2} - v_{2|2} \cdot v_{3|1} \right) \cdot (e_1 e_2)_{|1} \\ & + \cos(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}) \cdot v_{1|3} \cdot \left(v_{2|1} \cdot v_{3|3} - v_{2|3} \cdot v_{3|1} \right) \cdot (e_1 e_3)_{|1} \\ & + \cos(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}) \cdot v_{1|3} \cdot \left(v_{2|2} \cdot v_{3|3} - v_{2|3} \cdot v_{3|2} \right) \cdot (e_2 e_3)_{|1} \\ & + \cos(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) \cdot v_{1|2} \cdot \left(v_{2|1} \cdot v_{3|2} - v_{2|2} \cdot v_{3|1} \right) \cdot (e_1 e_2)_{|3} \\ & + \cos(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) \cdot v_{1|2} \cdot \left(v_{2|1} \cdot v_{3|3} - v_{2|3} \cdot v_{3|1} \right) \cdot (e_1 e_3)_{|3} \\ & + \cos(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) \cdot v_{1|2} \cdot \left(v_{2|2} \cdot v_{3|3} - v_{2|3} \cdot v_{3|2} \right) \cdot (e_2 e_3)_{|3} \\ & + \cos(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) \cdot v_{1|3} \cdot \left(v_{2|1} \cdot v_{3|2} - v_{2|2} \cdot v_{3|1} \right) \cdot (e_1 e_2)_{|2} \\ & + \cos(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) \cdot v_{1|3} \cdot \left(v_{2|1} \cdot v_{3|3} - v_{2|3} \cdot v_{3|1} \right) \cdot (e_1 e_3)_{|2} \\ & + \cos(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) \cdot v_{1|3} \cdot \left(v_{2|2} \cdot v_{3|3} - v_{2|3} \cdot v_{3|2} \right) \cdot (e_2 e_3)_{|2} \end{aligned}$$

En se servant de la propriété $(e_p e_{p'})_{|i} = -(e_{p'} e_p)_{|i}$ déduite de $\overrightarrow{e_p} \wedge \overrightarrow{e_{p'}} = -(\overrightarrow{e_{p'}} \wedge \overrightarrow{e_p})$, on trouve que l'écriture ci-dessus est la même que celle du produit mixte que l'on a écrit au paragraphe 4.2, et qu'on réécrit ci-dessous avec la notation synthétique avec $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v_1}$; $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v_2}$; $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_3}$:

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{v_1} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_3}) \stackrel{=}{=} \{ \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3} \} \in \{ \overrightarrow{e_i} \}_3 \\ & \overrightarrow{v_1} \neq \vec{0} \text{ et } \overrightarrow{v_2} \neq \vec{0} \text{ et } \overrightarrow{v_3} \neq \vec{0} \\ & v_{1|1} \cdot \left(v_{2|2} \cdot v_{3|3} - v_{2|3} \cdot v_{3|2} \right) \left(\cos(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) \cdot (e_2 e_3)_{|1} + \cos(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) \cdot (e_2 e_3)_{|2} + \cos(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}) \cdot (e_2 e_3)_{|3} \right) \\ & - v_{1|2} \cdot \left(v_{2|1} \cdot v_{3|3} - v_{2|3} \cdot v_{3|1} \right) \cdot \left(\cos(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_1}) \cdot (e_3 e_1)_{|1} + \cos(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}) \cdot (e_3 e_1)_{|2} + \cos(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) \cdot (e_3 e_1)_{|3} \right) \\ & + v_{1|3} \cdot \left(v_{2|1} \cdot v_{3|2} - v_{2|2} \cdot v_{3|1} \right) \cdot \left(\cos(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1}) \cdot (e_1 e_2)_{|1} + \cos(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_2}) \cdot (e_1 e_2)_{|2} + \cos(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_3}) \cdot (e_1 e_2)_{|3} \right) \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{aligned}
& +v_{1|1} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{3|2} - v_{2|2} \cdot v_{3|1}) \cdot (\cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \cdot (e_1 e_2)_{|1} + \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cdot (e_1 e_2)_{|2} + \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_3) \cdot (e_1 e_2)_{|3}) \\
& +v_{1|1} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{3|1} - v_{2|1} \cdot v_{3|3}) \cdot (\cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \cdot (e_3 e_1)_{|1} + \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cdot (e_3 e_1)_{|2} + \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_3) \cdot (e_3 e_1)_{|3}) \quad (b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +v_{1|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{3|2} - v_{2|2} \cdot v_{3|1}) \cdot (\cos(\vec{e}_2, \vec{e}_1) \cdot (e_1 e_2)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \cdot (e_1 e_2)_{|2} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3) \cdot (e_1 e_2)_{|3}) \\
& +v_{1|2} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{3|2} - v_{2|2} \cdot v_{3|3}) \cdot (\cos(\vec{e}_2, \vec{e}_1) \cdot (e_3 e_2)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \cdot (e_3 e_2)_{|2} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3) \cdot (e_3 e_2)_{|3}) \quad (c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +v_{1|3} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{3|3} - v_{2|3} \cdot v_{3|2}) \cdot (\cos(\vec{e}_3, \vec{e}_1) \cdot (e_2 e_3)_{|1} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_2) \cdot (e_2 e_3)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_3) \cdot (e_2 e_3)_{|3}) \\
& +v_{1|3} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{3|1} - v_{2|1} \cdot v_{3|3}) \cdot (\cos(\vec{e}_3, \vec{e}_1) \cdot (e_3 e_1)_{|1} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_2) \cdot (e_3 e_1)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_3) \cdot (e_3 e_1)_{|3}) \quad (d)
\end{aligned}$$

Or on a démontré au paragraphe 4.2 que $(b) = (c) = (d) = 0$ et que dans (a) :

$$\begin{aligned}
& \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \cdot (e_2 e_3)_{|1} + \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cdot (e_2 e_3)_{|2} + \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_3) \cdot (e_2 e_3)_{|3} = \\
& \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_1) \cdot (e_3 e_1)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \cdot (e_3 e_1)_{|2} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3) \cdot (e_3 e_1)_{|3} = \\
& \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_1) \cdot (e_1 e_2)_{|1} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_2) \cdot (e_1 e_2)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_3) \cdot (e_1 e_2)_{|3}
\end{aligned}$$

On peut choisir indifféremment une des trois combinaisons. Le produit mixte se simplifie alors, du moins dans l'espace euclidien $n = 3$:

$$\vec{v}_1 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3) \underset{\substack{\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} \in \{\vec{e}_i\}^3 \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_3 \neq \vec{0}}}]{=} \left(\sum_{i=1}^3 \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_i) \cdot (e_1 e_2)_{|i} \right) \cdot \text{Det}(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)$$

On a vu qu'on pouvait encore simplifier l'expression avec la connaissance des angles $(\vec{e}_1, \vec{e}_i)$ et des $(e_p e_{p'})_{|i}$ et en notant désormais :

$\delta = ((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3)$, l'élévation du vecteur $\vec{e}_3$ au-dessus de l'objet plan $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = ((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2)$, l'élévation du vecteur $\vec{e}_2$ au-dessus de l'objet droit $(O; \vec{e}_1)$

On écrit le produit mixte qui mesure donc un volume en 3D en utilisant un repère cartésien quelconque.

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3) & \underset{\substack{\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} \in \{\vec{e}_i\}^3 \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_3 \neq \vec{0} \\ \vec{e}_3 \text{ non } \perp (O; \vec{e}_1; \vec{e}_2) \text{ 2D}}]{=} \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3)| \cdot \text{Det}(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3) \\
\vec{v}_1 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3) & \underset{\substack{\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} \in \{\vec{e}_i\}^3 \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_3 \neq \vec{0} \\ \vec{e}_3 \perp (O; \vec{e}_1; \vec{e}_2) \text{ 2D}}]{=} \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2)| \cdot \text{Det}(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)
\end{aligned}$$

Qu'on peut réunir en une seule formule simplifiée de mesure de volume avec une formation géométrique de $\{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3\}$ sur les vecteurs de $\{\vec{e}_i\}^3$ famille de vecteurs quelconque :

$$\vec{v}_1 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3) \underset{\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} \in \{\vec{e}_i\}^3}{=} \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3)| \cdot \text{Det}(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)$$

$\vec{e}_3$ prenant alors toutes les valeurs au-dessus du plan $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)$. On pose que si au moins un des vecteurs de $\{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3\}$ est nul $\vec{v}_1 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3)$ est quand même défini égal à zéro car $\text{Det}(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3) = 0$. Si

$\{\vec{e}_i\}_3$ est de dimension inférieure ou égale à 3. $\{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3\}$ peuvent être géométriquement liés et dans ce cas $\vec{v}_1 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3) = 0$.

4.4 Conclusion sur les jeux d'écritures

Le produit mixte, par exemple, est défini et mesurable dans l'espace de dimension 3, et c'est alors un volume parce que nous comprenons organiquement l'espace 3D. Toutes les écritures en dimensions supérieures attendent d'être mises en perspective géométrique dans la pensée qui s'élève.

4.5 Tableau récapitulatif des jeux d'écritures dans l'espace nD

Mesure de volume avec la notation non synthétique d'un parallélépipède formé sur trois vecteurs :

$$\vec{w} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{w} \neq \vec{0} \\ \vec{k} \text{ non } \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}}}{=} \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\sin(\vec{i}, \vec{j})| \cdot |\sin \delta| \cdot \begin{vmatrix} w_x & u_x & v_x \\ w_y & u_y & v_y \\ w_z & u_z & v_z \end{vmatrix} ; \quad \vec{w} \boxtimes (\vec{u} \wedge \vec{v}) \underset{\substack{(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \in (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})_{3D} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{w} \neq \vec{0} \\ \vec{k} \perp (O; \vec{i}; \vec{j})_{2D}}}{=} \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\sin(\vec{i}, \vec{j})| \cdot \begin{vmatrix} w_x & u_x & v_x \\ w_y & u_y & v_y \\ w_z & u_z & v_z \end{vmatrix}$$

Mesure de volume simplifiée avec une formation géométrique de $\{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3\}$ sur les vecteurs de $\{\vec{e}_i\}_3$ famille de vecteurs quelconque

$$\vec{v}_1 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3) \underset{\{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3\} \in \{\vec{e}_i\}_3}{=} \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3)| \cdot \text{Det}(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)$$

Valeurs des coordonnées $(e_p e_{p'})_{|i}$ en 3D :

$\delta = ((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3)$, l'élévation du vecteur $\vec{e}_3$ au-dessus de l'objet plan $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$
 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = ((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2)$, l'élévation du vecteur $\vec{e}_2$ au-dessus de l'objet droit $(O; \vec{e}_1)$
 $\gamma = ((O; \vec{e}_2; \vec{e}_3), \vec{e}_1)$, l'élévation du vecteur $\vec{e}_1$ au-dessus de l'objet plan $(O; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$
 $(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = ((O; \vec{e}_2), \vec{e}_3)$, l'élévation du vecteur $\vec{e}_3$ au-dessus de l'objet droit $(O; \vec{e}_2)$
 $\mu = ((O; \vec{e}_1; \vec{e}_3), \vec{e}_2)$, l'élévation du vecteur $\vec{e}_2$ au-dessus de l'objet plan $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_3)$
 $(\vec{e}_3, \vec{e}_1) = ((O; \vec{e}_3), \vec{e}_1)$, l'élévation du vecteur $\vec{e}_1$ au-dessus de l'objet droit $(O; \vec{e}_3)$

$$\vec{OF} = \lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{e}_2 ; \quad \vec{OG} = \lambda_3 \cdot \vec{e}_2 + \lambda_4 \cdot \vec{e}_3 ; \quad \vec{OZ} = \lambda_5 \cdot \vec{e}_3 + \lambda_6 \cdot \vec{e}_1$$

$$(e_1 e_2)_{|1} \underset{\sin(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cdot \sin(\vec{OF}, \vec{e}_3) \neq 0}{=} \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{|\sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2)| \cdot \sin(\vec{e}_2, \vec{OF}) \cdot \cos((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3)}{|\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3)| \cdot \sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2)}$$

$$(e_1 e_2)_{|1} \underset{\vec{e}_3 \perp (O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)_{2D}}{=} 0$$

$$(e_1 e_2)_{|2} \underset{\sin(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cdot \sin(\vec{OF}, \vec{e}_3) \neq 0}{=} -\psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{|\sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2)| \cdot \sin(\vec{e}_1, \vec{OF}) \cdot \cos((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3)}{|\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3)| \cdot \sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2)}$$

$$(e_1 e_2)_{|2} \underset{\vec{e}_3 \perp (O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)_{2D}}{=} 0$$

$$(e_1 e_2)_{|3} \underset{\vec{e}_3 \perp (O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)_{2D}}{=} \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2)|$$

$$(e_1 e_2)_{|3} = \frac{\psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{|\sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2)|}{|\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3)|}}{\sin(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cdot \sin(\vec{OF}, \vec{e}_3) \neq 0}$$

$$(e_2 e_3)_{|1} = \frac{\psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{|\sin((O; \vec{e}_2), \vec{e}_3)|}{|\sin((O; \vec{e}_2; \vec{e}_3), \vec{e}_1)|}}{\sin(\vec{e}_2, \vec{e}_3) \cdot \sin(\vec{OG}, \vec{e}_1) \neq 0}$$

$$(e_2 e_3)_{|2} = \frac{\psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{|\sin((O; \vec{e}_2), \vec{e}_3)| \cdot \sin(\vec{e}_3, \vec{OG}) \cdot \cos((O; \vec{e}_2; \vec{e}_3), \vec{e}_1)}{|\sin((O; \vec{e}_2; \vec{e}_3), \vec{e}_1)| \cdot \sin(\vec{e}_2, \vec{e}_3)}}{\sin(\vec{e}_2, \vec{e}_3) \cdot \sin(\vec{OG}, \vec{e}_1) \neq 0}$$

$$(e_2 e_3)_{|3} = \frac{-\psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{|\sin((O; \vec{e}_2), \vec{e}_3)| \cdot \sin(\vec{e}_2, \vec{OG}) \cdot \cos((O; \vec{e}_2; \vec{e}_3), \vec{e}_1)}{|\sin((O; \vec{e}_2; \vec{e}_3), \vec{e}_1)| \cdot \sin((O; \vec{e}_2), \vec{e}_3)}}{\sin(\vec{e}_2, \vec{e}_3) \cdot \sin(\vec{OG}, \vec{e}_1) \neq 0}$$

$$(e_3 e_1)_{|1} = \frac{-\psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{|\sin((O; \vec{e}_3), \vec{e}_1)| \cdot \sin(\vec{e}_3, \vec{OZ}) \cdot \cos((O; \vec{e}_1; \vec{e}_3), \vec{e}_2)}{|\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_3), \vec{e}_2)| \cdot \sin((O; \vec{e}_3), \vec{e}_1)}}{\sin(\vec{e}_3, \vec{e}_1) \cdot \sin(\vec{OZ}, \vec{e}_2) \neq 0}$$

$$(e_3 e_1)_{|2} = \frac{\psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{|\sin((O; \vec{e}_3), \vec{e}_1)|}{|\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_3), \vec{e}_2)|}}{\sin(\vec{e}_3, \vec{e}_1) \cdot \sin(\vec{OZ}, \vec{e}_2) \neq 0}$$

$$(e_3 e_1)_{|3} = \frac{\psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \frac{|\sin((O; \vec{e}_3), \vec{e}_1)| \cdot \sin(\vec{e}_1, \vec{OZ}) \cdot \cos((O; \vec{e}_1; \vec{e}_3), \vec{e}_2)}{|\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_3), \vec{e}_2)| \cdot \sin((O; \vec{e}_3), \vec{e}_1)}}{\sin(\vec{e}_3, \vec{e}_1) \cdot \sin(\vec{OZ}, \vec{e}_2) \neq 0}$$

$$(e_2 e_3)_{|1} = \frac{\psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\sin((O; \vec{e}_2), \vec{e}_3)|}{\vec{e}_1 \perp (O; \vec{e}_2; \vec{e}_3)_{2D}}$$

$$(e_2 e_3)_{|2} = \frac{0}{\vec{e}_1 \perp (O; \vec{e}_2; \vec{e}_3)_{2D}}$$

$$(e_2 e_3)_{|3} = \frac{0}{\vec{e}_1 \perp (O; \vec{e}_2; \vec{e}_3)_{2D}}$$

$$(e_3 e_1)_{|1} = \frac{0}{\vec{e}_2 \perp (O; \vec{e}_3; \vec{e}_1)_{2D}}$$

$$(e_3 e_1)_{|2} = \frac{\psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\sin((O; \vec{e}_3), \vec{e}_1)|}{\vec{e}_2 \perp (O; \vec{e}_3; \vec{e}_1)_{2D}}$$

$$(e_3 e_1)_{|3} = \frac{0}{\vec{e}_2 \perp (O; \vec{e}_3; \vec{e}_1)_{2D}}$$

Produit vectoriel en nD

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \underset{\substack{(\vec{v}_1; \vec{v}_2) \in \{\vec{e}_i\}_n \\ \vec{v}_1 = \vec{0} \text{ et/ou } \vec{v}_2 = \vec{0}}}{=} \text{indéfini}$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{0} : \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \underset{(\vec{v}_1; \vec{v}_2) \in \{\vec{e}_i\}_0}{=} (0 \cdot \vec{0}) \wedge (0 \cdot \vec{0}) = \text{indéfini}$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{1} : \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \underset{\substack{(\vec{v}_1; \vec{v}_2) \in \{\vec{e}_i\}_1 \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0}}}{=} (v_{1|1} \cdot \vec{e}_1) \wedge (v_{2|1} \cdot \vec{e}_1) = \text{indéfini}$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{2} : \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \underset{\substack{(\vec{v}_1; \vec{v}_2) \in \{\vec{e}_i\}_2 \\ \vec{v}_1 = \lambda \cdot \vec{v}_2 \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0}}}{=} \vec{0} ; \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \underset{\substack{(\vec{v}_1; \vec{v}_2) \in \{\vec{e}_i\}_2 \\ \vec{v}_1 \neq \lambda \cdot \vec{v}_2 \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0}}}{=} \text{indéfini}$$

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \underset{\substack{(\vec{v}_1; \vec{v}_2) \in \{\vec{e}_i\}_{(n \geq 2)} \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0}}}{=} \sum_{p=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-p} (v_{1|p} \cdot v_{2|(p+k)} - v_{1|(p+k)} \cdot v_{2|p}) \cdot (e_p e_{(p+k)})_{|1} \right) \cdot \vec{e}_1$$

$$+ \sum_{p=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-p} (v_{1|p} \cdot v_{2|(p+k)} - v_{1|(p+k)} \cdot v_{2|p}) \cdot (e_p e_{(p+k)})_{|2} \right) \cdot \vec{e}_2 + \cdots + \sum_{p=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-p} (v_{1|p} \cdot v_{2|(p+k)} - v_{1|(p+k)} \cdot v_{2|p}) \cdot (e_p e_{(p+k)})_{|n} \right) \cdot \vec{e}_n$$

Produit scalaire en nD

$$\vec{v}_1 \boxtimes \vec{v}_2 \underset{\substack{(\vec{v}_1; \vec{v}_2) \in \{\vec{e}_i\}_n \\ \vec{v}_1 = \vec{0} \text{ et/ou } \vec{v}_2 = \vec{0}}}{=} \text{indéfini}$$

$$n = 0 : \vec{v}_1 \boxtimes \vec{v}_2 \underset{(\vec{v}_1; \vec{v}_2) \in \{\vec{e}_i\}_0}{=} \vec{0} \boxtimes \vec{0} = \text{indéfini}$$

$$\vec{v}_1 \boxtimes \vec{v}_2 \underset{\substack{(\vec{v}_1; \vec{v}_2) \in \{\vec{e}_i\}_{(n \geq 2)} \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0}}}{=} \sum_{i=1}^n v_{1|i} \cdot v_{2|i} + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^j (v_{1|i} \cdot v_{2|i+n-j} + v_{1|i+n-j} \cdot v_{2|i}) \cdot \cos(\vec{e}_i, \vec{e}_{i+n-j}) \right)$$

Norme d'un vecteur en nD

$$||\vec{v}_1|| = \left(\sum_{i=1}^n (v_{1|i})^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^j (v_{1|i} \cdot v_{1|i+n-j} + v_{1|i+n-j} \cdot v_{1|i}) \cdot \cos(\vec{e}_i, \vec{e}_{i+n-j}) \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Produit mixte en nD

$$\vec{v}_1 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3) \stackrel{(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3) \in \{\vec{e}_i\}_n}{=} \text{indéfini} \\ \vec{v}_1 = \vec{0} \text{ ou } \vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{0} : \vec{v}_1 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3) \stackrel{(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3) \in \{\vec{e}_i\}_0}{=} \vec{0} \wedge \vec{0} = \text{indéfini} \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_3 \neq \vec{0}$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{1} : \vec{v}_1 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3) \stackrel{(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3) \in \{\vec{e}_i\}_1}{=} \vec{v}_1 \boxtimes \vec{0} = \text{indéfini} \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_3 \neq \vec{0}$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{2} : \vec{v}_1 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3) \stackrel{(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3) \in \{\vec{e}_i\}_2}{=} \vec{0} ; \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \stackrel{(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3) \in \{\vec{e}_i\}_2}{=} \text{indéfini} \\ \vec{v}_2 = \lambda \cdot \vec{v}_3 \quad \vec{v}_2 \neq \lambda \cdot \vec{v}_3 \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0} \quad \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0}$$

$$\vec{v}_1 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3) \stackrel{(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3) \in \{\vec{e}_i\}_{(n \geq 2)}}{=} \\ \vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_3 \neq \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^n v_{1|i} \cdot (v_2 v_3)_{|i} + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^j (v_{1|i} \cdot v_2 v_{3|i+n-j} + v_{1|i+n-j} \cdot v_2 v_{3|i}) \cdot \cos(\vec{e}_i, \vec{e}_{i+n-j}) \right)$$

Avec :

$$(v_2 v_3)_{|i} \stackrel{(\vec{v}_2; \vec{v}_3) \in \{\vec{e}_i\}_{(n \geq 2)}}{=} \sum_{p=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-p} (v_{2|p} \cdot v_{3|(p+k)} - v_{2|(p+k)} \cdot v_{3|p}) \cdot (e_p e_{(p+k)})_{|i} \right) \\ \vec{v}_3 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0}$$

Chapitre 5

LE POLY MIXTE ENVOÛTEUR

5.1 Généralités

Espaces et objets

On part du postulat que nos espaces ici étudiés sont construits sur des vecteurs, objets unidimensionnels orientés. Les directions qui les portent sont toutes rectilignes et ont deux sens. L'identification de l'objet à l'espace construit sur des vecteurs en fait un objet qualifié d'uniforme (sous entendu : avec cet espace).

Une ligne droite fini ou infini est un objet uniforme avec un espace 1D infini.

Si cette ligne est courbée et/ou pliée on dira que cet objet 1D n'est plus uniforme et appartient à un espace au minimum 2D. Dans chacun de ces espaces $mD \geq 2$, c'est alors un objet 1D conceptuellement distinct de l'espace qui le contient et dont la forme est prise par un ensemble de directions et de sens dans l'espace $mD \geq 2$. Si l'objet 1D non uniforme se referme sur lui-même, sa longueur est 1D et la surface qu'il contient est 2D. Cette surface est alors occupée par tout ou partie de l'ensemble des vecteurs de l'espace $mD \geq 2$; il est construit sur tous les vecteurs de base de l'espace $mD \geq 2$.

Exemple :

Un cercle dans un espace 2D (un plan) a une surface 2D contenant tout l'ensemble des vecteurs du plan. Le même cercle dont le plan est situé de façon aléatoire dans un espace 3D a une surface 2D contenant une partie de l'ensemble des vecteurs de l'espace 3D.

Note : il n'existe pas dans notre langue de mot pour qualifier un espace 3D par rapport à un espace 4D qui le contient, comme on peut le faire en qualifiant de « plan » un espace 2D contenu dans un espace 3D. On restera donc sur l'appellation « espace 3D ».

Note : toute ligne 1D refermée dans un espace 2D n'est pas toujours un objet 1D contenant tout l'ensemble des vecteurs de l'espace 2D, c'est le cas d'un carré.

Un plan fini ou infini est un objet uniforme avec un espace 2D infini.

Si ce plan est courbée et/ou pliée on dira que cet objet 2D n'est plus uniforme et appartient à un espace au minimum 3D : dans chacun de ces espaces $mD \geq 3$, c'est alors un objet 2D conceptuellement distinct de l'espace qui le contient et dont la forme est prise par un ensemble de directions et de sens dans l'espace $mD \geq 3$. Si l'objet 2D non uniforme se referme sur lui-même, sa surface est 2D et le volume qu'il contient est 3D. Ce volume est alors occupé par tout ou partie de l'ensemble des vecteurs de l'espace $mD \geq 3$; il est construit sur tous les vecteurs de base de l'espace $mD \geq 3$.

Exemple :

Une sphère dans un espace 3D a un volume 3D contenant tout l'ensemble des vecteurs de l'espace 3D. La même sphère dont l'espace 3D est situé de façon aléatoire dans un espace 4D a un volume 3D contenant une partie de l'ensemble des vecteurs de l'espace 4D.

Note : toute surface 2D refermée dans un espace 3D n'est pas toujours un objet 2D contenant tout l'ensemble des vecteurs de l'espace 3D, c'est le cas d'un cube.

Un objet 3D fini ou infini est un objet uniforme avec un espace 3D infini.

Si cet objet 3D est courbé et/ou plié on dira que cet objet 3D n'est plus uniforme et appartient à un espace au minimum 4D : dans chacun de ces espaces $mD \geq 4$, c'est alors un objet 3D conceptuellement distinct de l'espace qui le contient et dont la forme est prise par un ensemble de directions et de sens dans l'espace $mD \geq 4$. Si l'objet 3D non uniforme se referme sur lui-même, son volume est 3D et l'hyper volume qu'il contient est 4D. Cet hyper volume est alors occupé par tout ou partie de l'ensemble des vecteurs de l'espace $mD \geq 4$; il est construit sur tous les vecteurs de base de l'espace $mD \geq 4$.

Exemple :

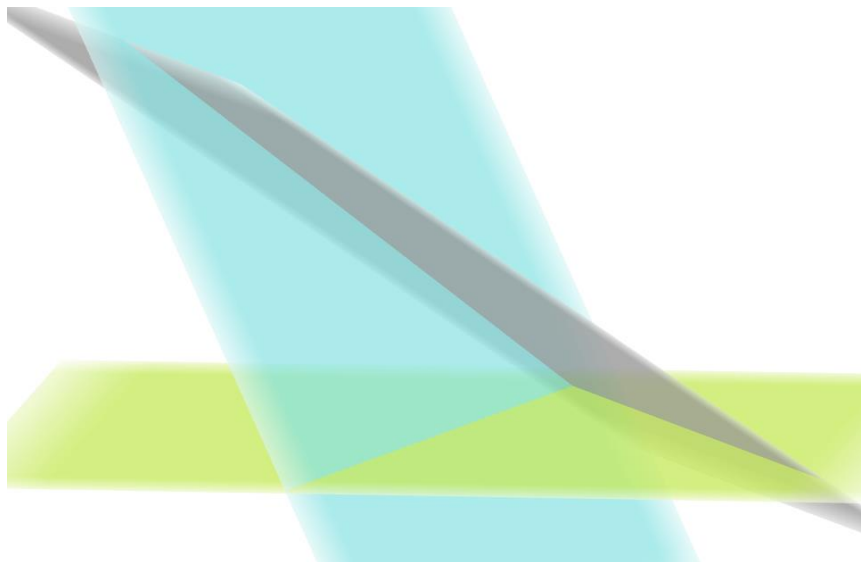
Une hyper-sphère dans un espace 4D a un hyper volume 4D contenant tout l'ensemble des vecteurs de l'espace 4D. La même hyper sphère dont l'espace 4D est situé de façon aléatoire dans un espace 5D a un hyper volume 4D contenant une partie de l'ensemble des vecteurs de l'espace 5D.

Note : tout objet 3D refermé dans un espace 4D n'est pas toujours un objet 3D contenant tout l'ensemble des vecteurs de l'espace 4D, c'est le cas d'un hyper cube.

On peut poursuivre indéfiniment ce type de raisonnement, en remarquant toutefois que sa validité repose sur l'analogie. Ce n'est pas une erreur, la vérité mathématique est de tenir un discours cohérent avec des postulats divers, elle ne repose pas sur des certitudes immuables mais sur des vérités relatives. Cependant si les postulats sont faux le discours aura une cohérence restreinte, il ne pourra pas grandir en complexité. Remarquer les conditions de validités d'un énoncé et les exposer est nécessaire et peut se nommer « faire une palinodie ».

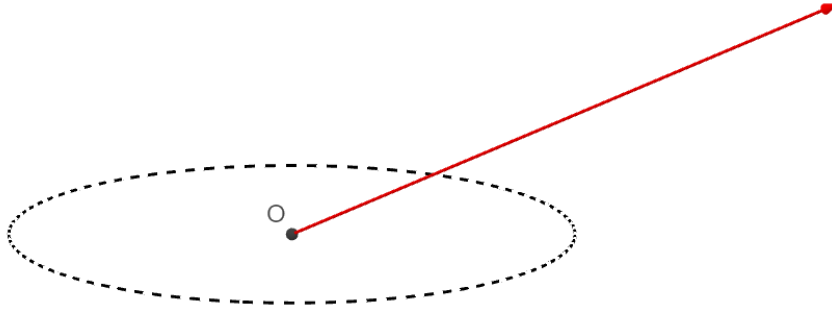
Note : j'aime bien ce mot.

On montre ci-dessous des plans sécants entre eux, dont les équations sont formulées dans un espace 3D, alors qu'ils ne sont eux-mêmes que des espaces 2D :



Dans ou hors des espaces ou des objets

On montre ci-dessous un vecteur $\vec{v}$ s'élevant au-dessus de ce qu'on a figuré par un cercle pointillé, mais qui représente soit un objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m)mD$, soit un espace mD construit sur toutes les combinaisons linéaires de ces vecteurs, ou encore le même espace mD combinaison linéaire des vecteurs de base $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_m\}$ de l'espace mD , dans lequel on voit la géométrie de l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m)mD$:



Dans les deux cas si $\vec{v}$ est combinaison linéaire des vecteurs de base $\{\vec{e}_i\}_m = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_m\}$ de l'espace mD sur lequel on construit l'équation de l'objet, alors il est lié à cet espace mD ou cet objet mD et on écrit :

$$\vec{v} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + \dots + a_m \cdot \vec{e}_m$$

On a alors aussi, avec l'ensemble infini des vecteurs non nuls $\{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_{inf}\}$ dont chacun est combinaison linéaire des vecteurs de base $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_m\}$, la certitude de pouvoir écrire :

$$\vec{v} = b_1 \cdot \vec{v}_1 + b_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + b_m \cdot \vec{v}_{inf}$$

Cependant l'ensemble des vecteurs $\{\vec{v}_j\}$ formant un objet dans un espace est un sous-ensemble de tous les vecteurs de cet espace. Donc si le vecteur $\vec{v}$ est dans l'espace de l'objet, on est certain qu'il est dans l'espace contenant l'objet.

si $\vec{v}$ n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de base $\{\vec{e}_i\}_m$ de l'espace mD sur lequel on construit l'équation de l'objet, alors il est hors de cet espace mD ou cet objet mD et on écrit :

$$\vec{v} \neq a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + \dots + a_m \cdot \vec{e}_m$$

On a alors aussi, avec l'ensemble infini des vecteurs non nuls $\{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_{inf}\}$ dont chacun est combinaison linéaire des vecteurs de base $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_m\}$, la certitude de pouvoir écrire :

$$\vec{v} \neq b_1 \cdot \vec{v}_1 + b_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + b_m \cdot \vec{v}_{inf}$$

Cependant l'ensemble des vecteurs $\{\vec{v}_j\}$ formant un objet dans un espace est un sous-ensemble de tous les vecteurs de cet espace. Donc si le vecteur $\vec{v}$ est hors de l'espace de l'objet, on ne peut pas décider s'il est dans ou hors de l'espace contenant l'objet.

Note : soit deux vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ formés par combinaisons linéaires sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_m\}$. Le vecteur « produit vectoriel » $\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1$ n'est pas formé par combinaison linéaire sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_m\}$. En particulier il peut être dans ou hors de l'espace mD formé sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_m\}$, selon la parité de m (dans cette théorie des polymixtes).

Si $\vec{v}$ forme un angle plat avec une combinaison linéaire des m vecteurs de l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m)mD$ ou tout simplement si $\vec{v}$ est combinaison linéaire des m vecteurs de l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m)mD$, alors $\vec{v}$ est dans l'espace de cet objet qui contient une portion des directions formable sur $\{\vec{e}_i\}_m$.

L'espace de cet objet est au plus de la dimension de $\{\vec{e}_i\}_m$. Le vecteur $\vec{v}$ peut alors occuper au plus toutes les directions de l'espace $\{\vec{e}_i\}_m = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_m\}$.

Si $\vec{v}$ ne forme pas un angle plat avec une combinaison linéaire des m vecteurs de l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m)mD$ ou tout simplement si $\vec{v}$ n'est pas combinaison linéaire des m vecteurs de l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m)mD$, alors $\vec{v}$ est hors de l'espace de cet objet qui contient une portion des directions formable sur $\{\vec{e}_i\}_m$.

L'espace de cet objet est au plus de la dimension de $\{\vec{e}_i\}_m$. Le vecteur $\vec{v}$ peut alors occuper toutes les directions d'un espace $\{\vec{e}_i\}_{(m+1)} = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_m; \vec{e}_{m+1}\}$.

5.2 Les objets polymixiaux et leurs descriptions en vecteurs polymixtes envoûteurs

Nous avons cherché dans cette étude à donner des mesures des objets construits sur des vecteurs. De tels objets ne sont pas courbes et/ou pliés, ce sont des objets construits sur m vecteurs libres entre eux qui possèdent :

m groupes non identiques de 2^{m-1} arêtes parallèles entre elles

On précise que ces groupes sont « non identiques » pour signifier que toutes les arêtes parallèles d'un groupe sont sécantes avec chacune de celles des autres groupes. On qualifiera d'objet polymixiaux de tels objets, dont la définition les distingue des autres types d'objets à facettes. On ne confondra pas l'objet polymixial, qui est cette forme géométrique, avec le vecteur polymixte envoûteur, qui est l'outil de mesure de cette forme géométrique.

Note : de la même façon on ne confond pas le parallélogramme avec sa surface mesurée par un produit vectoriel.

Le nombre total d'arêtes A contenues dans l'objet polymixial $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m)mD$ est :

$$A = m \cdot 2^{m-1}$$

La seule démonstration que je puisse donner est une démonstration par récurrence, c'est-à-dire un raisonnement fondé sur l'analogie qui repose sur le postulat qu'un objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m)mD$ et un vecteur $\vec{v}_{m+1}$ libre avec cet objet forme un nouvel objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_{m+1})(m+1)D$ qui possède $2 \cdot \frac{(m+1)}{m}$ plus d'arêtes :

$$\frac{A_{(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_{m+1})}}{A_{(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m)}} = \frac{(m+1) \cdot 2^m}{m \cdot 2^{m-1}} = 2 \cdot \frac{(m+1)}{m}$$

Et c'est vrai pour $m = 1; 2$, donc c'est toujours vrai...mathématiquement. Mais les mathématiques ne sont pas nécessairement la réalité physique. En effet le raisonnement est cohérent avec un postulat. Mais si je trouve plusieurs postulats différents qui théorise quelque chose d'abstrait d'analogiquement vrai avec ce que je peux mesurer, j'aurai plusieurs vraies équations donnant des mesures différentes d'une réalité quelle qu'elle soit (stable ou changeante, etc... là n'est pas la question). Dans ce cas, pour que la démonstration par récurrence soit, sinon absolument vrai par rapport à une réalité mais du moins admissible pour le raisonnement (là est la question), il faut :

Que la démonstration s'applique à prouver le postulat qui décrive le plus grand nombre de cas de figures mesurables.

Note : ce qu'à première vue je n'ai pas réussi à obtenir en raisonnant sur les faces des objets polymixiaux.

Exemple

 $(O; \overrightarrow{v_1})$ 1D :

1 groupe de 1 arête

 $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2})$ 2D :

2 groupes non identiques de 2 arêtes parallèles entre elles

 $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3})$ 3D :

3 groupes non identiques de 4 arêtes parallèles entre elles

 $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4})$ 4D :

4 groupes non identiques de 8 arêtes parallèles entre elles

 $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \dots; \overrightarrow{v_m})$ mD : m groupes non identiques de 2^{m-1} arêtes parallèles entre elles

Un objet polymixial est alors vu comme une quantité vectorisée : le vecteur polymixte envoûteur. Le vecteur unitaire d'un polymixte envoûteur décrivant un objet mD est défini non nul dans tous les espaces impairs. Il est noté :

$$\overline{env}_{R^{n \text{ impair} \geq m}}$$

$$\left\| \overline{env}_{R^{n \text{ impair} \geq m}} \right\|$$

Un tel vecteur unitaire n'est pas défini dans les espaces pairs, ou on ne rencontre que des polymixtes ordinaires indéfinis par manque de dimensions, ou bien nuls, et qui sont impropres à mesurer des objets mD .

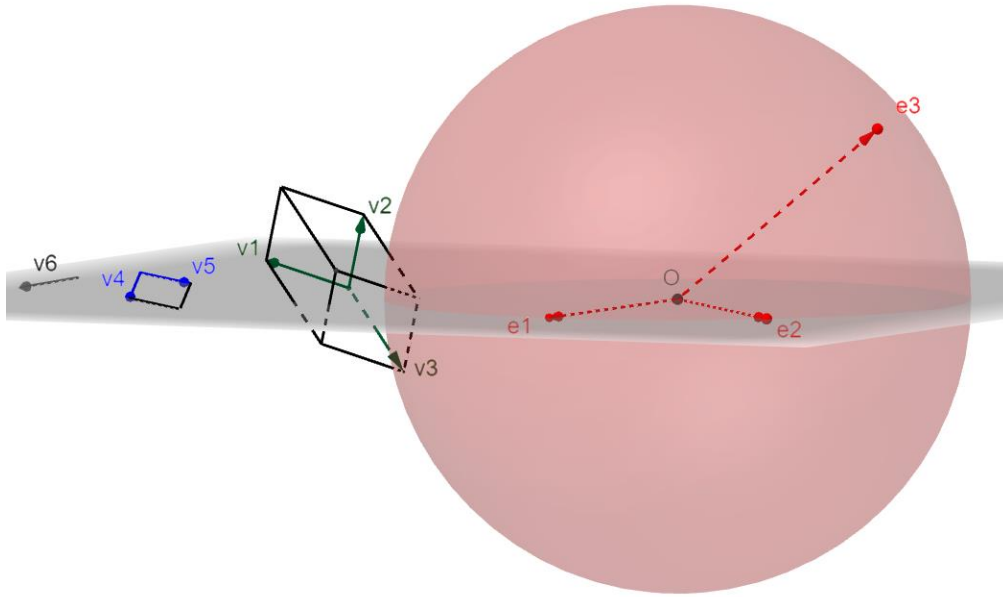
Le vecteur unitaire envoûteur est un vecteur qui peut changer d'aspect dans un espace quand il se compose avec un vecteur ordinaire de la base générant cet espace. Il peut se distribuer sur les composantes vectorielles d'un vecteur ordinaire en plusieurs vecteurs envoûteurs ayant cette propriété. Un même envoûteur peut donc prendre un aspect particulier dans $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \dots; \overrightarrow{e_n}\}$ quand il se compose avec $\overrightarrow{e_1}$, puis un autre aspect particulier dans $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \dots; \overrightarrow{e_n}\}$ quand il se compose avec $\overrightarrow{e_2}$, etc.

Un vecteur envoûteur occupe virtuellement toutes les directions possible dans $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \dots; \overrightarrow{e_{n \text{ impair}}}\}$, chaque direction ayant deux sens.

On montre dans la figure ci-dessous trois différents objets polymixiaux de l'espace euclidien, décrit dans un repère $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3})$. La sphère a un rayon de norme 1.

Dans $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3})$, le vecteur envoûteur occupe toutes les directions de la sphère pour mesurer dans un espace 3D le volume du parallélépipède, du parallélogramme, du segment.

Dans $(O; \overrightarrow{e_1})$, Le vecteur envoûteur occupent l'unique direction de la droite portant $\overrightarrow{e_1}$, qui est parallèle au segment portant $\overrightarrow{v_6}$ pour mesurer dans un espace 1D la longueur de ce segment :



5.3 Cas général des objets polymixiaux $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m)$ yD

De tels objets ne sont donc pas nécessairement construits sur m vecteurs libres entre eux, et leurs dimensions est $y \leq m$.

Pour les mesurer, on décrit un vecteur $\vec{pm}_{m/n} \in \text{vect} \{ \{ \vec{e}_i \}_m \cup \{ \vec{e}'_p \}_{(n-m)} \}$, dit « polymixte », construit dans un espace de dimension $z = (x + n - m)$ comme une composition non associative et non commutative de produits vectoriels formant des vecteurs ordinaires et de produits scalaires formant des vecteurs envoûteurs. Cette composition porte sur m vecteurs $\vec{v}_j$. Dans le cas général des polymixtes indéfinis, nuls et non nuls, les m vecteurs $\vec{v}_j$ sont famille libre ou liée, chacun d'eux étant construit sur une famille libre ou liée de m vecteurs unitaires $\{ \vec{e}_i \}_m$ et sur une famille toujours libre de $(n - m)$ vecteurs unitaires $\{ \vec{e}'_p \}_{(n-m)}$ ayant la particularité que chaque vecteur $\vec{e}'_p$ est orthogonal à tous les vecteurs combinaisons linéaires dans la réunion des familles $\{ \vec{e}_i \}_m \cup \{ \vec{e}'_p \}_{(n-m)}$.

Ces vecteurs sont alors ordinaires, discriminés verbalement d'avec les vecteurs envoûteurs.

Comme on la déjà précisé, un produit vectoriel de vecteurs ordinaires est un vecteur ordinaire non construit par combinaison linéaire sur $\{ \vec{e}_i \}_m \cup \{ \vec{e}'_p \}_{(n-m)}$. Un vecteur $\vec{e}'_p$ ne lui est donc pas nécessairement orthogonal.

Si n est le nombre total de vecteurs de $\{ \vec{e}_i \}_m \cup \{ \vec{e}'_p \}_{(n-m)}$. On a toujours l'inégalité suivante :

$$1 \leq x \leq m \leq n$$

Il n'est donc pas possible que $n < m$ ou que $m < x$ ou que $n < x$

Dans le cas particulier $n = m$, on a $\vec{pm}_{m/n=m} \in \text{vect} \{ \vec{e}_i \}_m$
 $R^z = x$

Dans notre étude, on précise z comme la dimension $z = x + n - m$ de l'espace R^z engendré par $\{ \vec{e}_i \}_m \cup \{ \vec{e}'_p \}_{(n-m)}$.

$$\begin{array}{c} \overrightarrow{pm} \\ m//n \\ RZ=x+n-m \end{array} = \overrightarrow{e'_n} [\wedge \boxtimes]^n (\dots (\overrightarrow{e'_{(m+1)}} [\wedge \boxtimes]^{m+1} (\overrightarrow{v_m} [\wedge \boxtimes]^m (\dots (\overrightarrow{v_4} \wedge (\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})) \dots)) \dots))))$$

Avec :

$$[\wedge \boxtimes]^m \text{ pair} = \wedge ; [\wedge \boxtimes]^m \text{ impair} = \boxtimes$$

$$[\wedge \boxtimes]^n \text{ pair} = \wedge ; [\wedge \boxtimes]^n \text{ impair} = \boxtimes$$

La flèche figurée en rouge est présente si m impair.

La flèche figurée en vert est présente si $m + 1$ impair.

La flèche figurée en bleue est présente si n impair.

L'ordre des parenthèses dans lesquelles les opérations sont effectuées signifie que le polymixte n'est pas une composition associative. Il n'est pas non plus une composition commutative car on ne peut pas interchanger un vecteur $\overrightarrow{e'_p}$ et un vecteur $\overrightarrow{e'_i}$ sans contredire sa définition.

5.4 Egalité de la norme du vecteur polymixte envoûteur avec les mesures locales dans la géométrie de l'objet polymixial $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \dots; \overrightarrow{v_m})yD$

Note : je l'écris chronologiquement après avoir théorisé mon polymixte, ce qui me fait voir cette équation comme pertinente. Il y a un processus de récapitulation des idées de façon toujours plus nettes que j'accomplis, au travers de mes jours et de mes nuits. C'est-à-dire dans le temps où l'inspiration vient se superposer à tout mes états d'âme.

L'objet polymixial $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \dots; \overrightarrow{v_m})yD$ est le même que tout autre objet dans lequel les mêmes vecteurs sont énumérés différemment, par exemple $(O; \overrightarrow{v_m}; \overrightarrow{v_2}; \dots; \overrightarrow{v_1})$. On a l'invariance de la mesure si on ne souhaite voir que la réalité géométrique de l'objet. On écrit, en extrapolant les notions euclidiennes, autant d'égalités que les $m!$ permutations possibles des indices des vecteurs de $\{\overrightarrow{v_j}\}_m$:

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{array}{c} \overrightarrow{pm} \\ (m \geq 2) // n \\ R^n \text{ impair} \geq m \end{array} \right\| \begin{array}{c} = \\ (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \dots; \overrightarrow{v_m})yD \\ (\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \dots; \overrightarrow{v_m}) \text{conf} \{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \dots; \overrightarrow{e_m} \} \end{array} \\ & \left| |\overrightarrow{v_1}| \cdot |\overrightarrow{v_2}| \cdot |\overrightarrow{v_3}| \cdot \dots \cdot |\overrightarrow{v_m}| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{v_1}), \overrightarrow{v_2})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}), \overrightarrow{v_3})| \dots |\sin((O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \dots; \overrightarrow{v_{m-1}}), \overrightarrow{v_m})| \right| \\ & = \dots \\ & \begin{array}{c} = \\ (O; \overrightarrow{v_m}; \overrightarrow{v_2}; \dots; \overrightarrow{v_1})yD \\ (\overrightarrow{v_m}; \overrightarrow{v_2}; \dots; \overrightarrow{v_1}) \text{conf} \{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \dots; \overrightarrow{e_m} \} \end{array} \\ & \left| |\overrightarrow{v_m}| \cdot |\overrightarrow{v_2}| \cdot |\overrightarrow{v_3}| \cdot \dots \cdot |\overrightarrow{v_1}| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{v_m}), \overrightarrow{v_2})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{v_m}; \overrightarrow{v_2}), \overrightarrow{v_3})| \dots |\sin((O; \overrightarrow{v_m}; \overrightarrow{v_2}; \dots; \overrightarrow{v_{789}}), \overrightarrow{v_1})| \right| \end{aligned}$$

Où tout vecteur $\overrightarrow{v_j}$ s'élève ou non au-dessus de l'espace de l'objet $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \dots; \overrightarrow{v_{j-1}})$ en n'étant ou n'étant pas combinaison linéaire des $(j - 1)$ vecteurs de cet objet.

Exemple

Si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)3D$ et $\sin((O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3), \vec{v}_4) = 0$, alors $\vec{v}_4$ est dans l'espace 3D de $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)3D$, il est combinaison linéaire des vecteurs de cet objet.

Si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)3D$ et $\sin((O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3), \vec{v}_4) \neq 0$, alors $\vec{v}_4$ est hors de l'espace 3D de $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)3D$, il n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de cet objet.

On précise que $\{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m\}$ sont tous des vecteurs d'un espace mD car confinés à une base $\{\vec{e}_i\}_m$, mais que les espaces contenus qu'ils définissent sont formés sur une partie des directions d'espace possibles dans $\{\vec{e}_i\}_m$ correspondantes à un jeu de coordonnées fixés dans $\{\vec{e}_i\}_m$. Donc pas à tous les jeux de coordonnées possibles au même moment dans $\{\vec{e}_i\}_m$, sinon on ne pourrait pas distinguer le contenu du contenant. Par exemple, tous les plans de l'espace euclidien ne sont pas un objet 2D dans l'espace 3D, mais sont l'espace 3D lui-même.

Il saute aux yeux que si $y < m$, au moins un vecteur de $\{\vec{v}_j\}_m$ est lié aux autres (il est dans le même espace que l'objet avec lequel il fait angle) et donc au moins une valeur absolue de sinus est nulle. Dans ce cas la mesure de l'objet est une mesure nulle.

Si on souhaite mesurer cet objet par des coordonnées, et entrer dans davantage de raffinements conceptuels...

Note : pour les avant-gouts des réceptions ou émissions de voyages instantanés

... on utilise la norme d'un vecteur. Le polymixte construit sur une énumération différente donnera alors la même mesure d'objet, mais son signe pourra être différent. Dans tous les cas il sera construit sur le même modèle, une alternance dans un rythme 1 sur 2 des opérations $\wedge$ et $\boxtimes$.

Exemple

$$\overrightarrow{pm'}_{\substack{m/n \\ R^Z=x+n-m}} = \overrightarrow{e'_3}[\wedge \boxtimes]^3(\dots (\overrightarrow{e'_{(m+1)}}[\wedge \boxtimes]^{m+1}(\overrightarrow{v_1}[\wedge \boxtimes]^1(\dots (\overrightarrow{v_3} \wedge (\overrightarrow{v_m} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_4}))) \dots)) \dots))$$

Par suite on ne pourra pas relier l'indice du vecteur à la parité du polymixte, d'où des difficultés à raisonner. Ceci d'indispensable ayant été vu, ces difficultés étant alors pour le moment superfétatoires (inutiles à l'obtention du but recherché, inutilité comme archétype du « faux problème »), et la combinatoire mentale déjà suffisamment active, on les évitera avec légèreté.

Définition des séquences

Une séquence de de k vecteurs dans $\{\vec{e}_i\}_m \cup \{\vec{e}'_p\}(n-m)$ représente k vecteurs dans l'alternance de produits scalaires et vectoriels du schéma du polymixte. Elle commence à droite sur un vecteur ordinaire, se termine à gauche avec un vecteur ordinaire $\vec{e}'_p$ ou $\vec{v}_j$. L'opérateur précédant ce dernier vecteur est soit $\wedge$, soit $\boxtimes$.

A « l'intérieur » d'un polymixte on peut donc identifier des séquences de compositions entre vecteurs. Ces séquences ne sont pas elles-mêmes des polymixtes, car tout polymixte est défini par une unique valeur m .

Toute séquence dont le dernier terme de composition (situé le plus à gauche), est un produit scalaire, est un vecteur envoûteur. Ce peut alors être un polymixte envoûteur ou une séquence de vecteurs formant un vecteur envoûteur.

Toute séquence dont le dernier terme de composition (situé le plus à gauche), est un produit vectoriel, est un vecteur ordinaire. Ce peut alors être un polymixte ordinaire ou une séquence de vecteurs formant un vecteur ordinaire.

5.5 Forme analytique du vecteur envoûteur

Par forme analytique on entend « description de l'objet dans un repère ».

Soit une séquence de k *impair* vecteurs dans $\{\vec{e}_i\}_m \cup \{\vec{e}'_p\}_{(n-m)}$ et un objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_k)_{kD}$ confiné à une famille nécessairement libre $\{\vec{e}_i\}_m$.

On définit le vecteur unitaire $\frac{\overrightarrow{env}}{\left\| \overrightarrow{env} \right\|_{R^k \text{ impair}}}$ d'un vecteur envoûteur $\vec{e}_{R^k \text{ impair}}$, polymixte ou séquence, dont les vecteurs sont tous libres entre eux comme :

$$\vec{e}_{R^k \text{ impair}} = \pm \left\| \vec{e}_{R^k} \right\| \cdot \frac{\overrightarrow{en\vec{v}}_{R^k \text{ impair}}}{\left\| \overrightarrow{en\vec{v}}_{R^k \text{ impair}} \right\|}$$

$\pm \left\| \vec{e}_{R^k} \right\|$ étant la coordonnée de la norme du vecteur envoûteur dans un repère $(O; \frac{\vec{en\vec{v}}}{\left\| \vec{en\vec{v}} \right\|_{R^k \text{ impair}}})$ unidimensionnel occupant virtuellement tout $R^{k \text{ impair}}$ avec une norme 1.

Example

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{v_1} \text{ a pour coordonnée } \pm \left| \overrightarrow{v_1} \right| = v_{1|1} \text{ dans } (O; \overrightarrow{\frac{env}{R^1}}) \\ & \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) \text{ a pour coordonnée } \pm \left| \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) \right| \text{ dans } (O; \overrightarrow{\frac{env}{R^3}}) \\ & \overrightarrow{v_5} \boxtimes (\overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})) \text{ a pour coordonnée } \pm \left| \overrightarrow{v_5} \boxtimes (\overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})) \right| \text{ dans } (O; \overrightarrow{\frac{env}{R^5}}) \end{aligned}$$

On distingue alors deux occurrences précisant la notion d'envoûteur dans ses relations avec le repère :

Si m impair $\geq k$, ces k vecteurs forment un objet polymixial $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \dots \overrightarrow{v_k}) kD$ contenu dans $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \dots \overrightarrow{v_k}; \overrightarrow{v_{k+1}}; \dots; \overrightarrow{v_m}) mD$. Les $\overrightarrow{v_i}$ étant libres, il est mesuré par une séquence construite sur la

famille $\{\vec{v}_j\}_m$ dont les vecteurs sont confinés à $\{\vec{e}_i\}_{m \text{ impair}}$ (les vecteurs $\vec{v}_j$ prennent donc leurs coordonnées variables dans une base de dimension plus grande que k). L'objet polymixial est kD , et sa mesure est donnée par une séquence construite sur la famille $R^{m \text{ impair} \geq k} = \{\vec{e}_i\}_m = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_m\}$. Son vecteur unitaire est :

$$\frac{\overrightarrow{env}}{R^{m \text{ impair} \geq k}} = \frac{\overrightarrow{env}}{\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_m\}}$$

$$\left\| \frac{\overrightarrow{env}}{R^{m \text{ impair} \geq k}} \right\| = \left\| \frac{\overrightarrow{env}}{\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_m\}} \right\|$$

Le vecteur unitaire de la séquence formant vecteur envoûteur mesurant $(0; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_k) kD$ occupe virtuellement tout $R^{m \text{ impair} \geq k}$ avec une norme 1. Il occupe donc un espace à $m \text{ impair}$ directions, chaque direction ayant 2 sens.

Le vecteur envoûteur occupe virtuellement tout $R^{m \text{ impair} \geq k}$ avec une norme $\|\overrightarrow{v_k} \boxtimes \dots (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)\|$. Sa coordonnée est la mesure orientée d'un objet polymixial $(0; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_k) kD$ dans le repère

$(0; \frac{\overrightarrow{env}}{\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_m\}})$ unidimensionnel occupant virtuellement toutes les directions dans $R^{m \text{ impair} \geq k}$ avec une norme 1.

En valeur absolue, cette mesure n'est pas égale à celle de l'objet polymixial $(0; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_k; \vec{v}_{k+1}; \dots; \vec{v}_m) mD$.

L'objet mD et l'objet kD circonscrivent la même portion d'espace à $m \text{ impair}$ directions, chaque direction ayant 2 sens.

Note : on montrera que $\left\| \frac{\overrightarrow{pm}}{k//m} \right\| = |a. \text{Det}_k(\vec{v}_k; \dots; \vec{v}_2; \vec{v}_1)|$ dépend de $k \leq m \text{ impair}$

Si $k \text{ impair} > m$, ces k vecteurs forment un objet polymixial $(0; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m; \vec{e}'_{m+1}; \vec{e}'_{m+2}; \dots; \vec{e}'_k)$. Compte tenu des propriétés des $\vec{e}'_p$, sa dimension est k . L'objet polymixial est kD , et sa mesure est donnée par un polymixte envoûteur construit sur la famille $R^{k \text{ impair} > m} = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_m; \vec{e}'_{m+1}; \dots; \vec{e}'_k\}$. Son vecteur unitaire est :

$$\frac{\overrightarrow{env}}{R^{k \text{ impair} > m}} = \frac{\overrightarrow{env}}{\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_m; \vec{e}'_{m+1}; \dots; \vec{e}'_k\}}$$

$$\left\| \frac{\overrightarrow{env}}{R^{k \text{ impair} > m}} \right\| = \left\| \frac{\overrightarrow{env}}{\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_m; \vec{e}'_{m+1}; \dots; \vec{e}'_k\}} \right\|$$

Le vecteur unitaire du polymixte envoûteur mesurant $(0; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m; \vec{e}'_{m+1}; \vec{e}'_{m+2}; \dots; \vec{e}'_k)$ occupe virtuellement tout $R^{k \text{ impair} > m}$ avec une norme 1. Il occupe donc un espace à $k \text{ impair}$ directions, chaque direction ayant 2 sens.

Le polymixte envoûteur $\frac{\overrightarrow{pm}}{m//k}$ occupe virtuellement tout $R^{k \text{ impair} > m}$ avec une norme $\left\| \frac{\overrightarrow{pm}}{m//k} \right\|$.

Sa coordonnée est la mesure orientée d'un objet polymixial $(0; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m) mD$ dans le repère

$(O; \frac{\overrightarrow{env}}{\left\| \frac{\overrightarrow{env}}{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \dots; \overrightarrow{e_m}; \overrightarrow{e'_{m+1}}; \dots; \overrightarrow{e'_k}\}} \right\|})$ unidimensionnel occupant virtuellement toutes les directions dans $R^{k \text{ impair} > m}$ avec une norme 1.

En valeur absolue, cette mesure est égale à celle de l'objet polymixial $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \dots; \overrightarrow{v_m}; \overrightarrow{e'_{m+1}}; \overrightarrow{e'_{m+2}}; \dots; \overrightarrow{e'_k})kD$.

L'objet mD et l'objet kD circonscrivent la même portion d'espace à $k \text{ impair}$ directions, chaque direction ayant 2 sens.

Note : on montrera que $\left\| \frac{\overrightarrow{pm}}{m//k} \right\| = |a. Det_m(\overrightarrow{v_m}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})|$ ne dépend pas de $k \text{ impair} > m$

Exemple extrait des 5 premières croissances des polymixtes

Note : c'est un exemple qui déborde dans un contenu théorique plus riche que ce qui a été expliqué jusqu'à maintenant

Séquence :

$$\overrightarrow{e'_6} \wedge \overrightarrow{e'_5} \boxtimes (\overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}))$$

Si l'objet $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{e'_5}; \overrightarrow{e'_6})$ est 6D alors l'objet $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{e'_5}; \overrightarrow{e'_6}; \overrightarrow{e'_7})$ est 7D. On a conclu en $m = 4$; $n = 6$ que la séquence $\overrightarrow{e'_6} \wedge \overrightarrow{e'_5} \boxtimes (\overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}))$ est alors indéfinie par manque de dimensions. Cependant il y a assez de dimensions dans R^7 pour pouvoir définir $\overrightarrow{e'_6} \wedge \overrightarrow{e'_5} \boxtimes (\overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}))$ orthogonal à $\overrightarrow{e'_6}$ et à $\overrightarrow{e'_5} \boxtimes (\overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}))$ envoûteur de $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e'_5}\}$. La séquence $\overrightarrow{e'_6} \wedge \overrightarrow{e'_5} \boxtimes (\overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}))$ ne peut donc être que confinée à $\overrightarrow{e'_7}$, la dimension supplémentaire d'espace orthogonale à tous les vecteurs de $R^6 = \{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e'_5}; \overrightarrow{e'_6}\}$:

Et ensuite on donne le polymixte $\frac{\overrightarrow{pm}}{4//7}$ qui est donc un envoûteur d'un objet 4D formé sur $R^7 = \{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e'_5}; \overrightarrow{e'_6}; \overrightarrow{e'_7}\}$, il occupe toutes les directions de R^7 , chaque direction ayant 2 sens, et est borné à une norme :

$$\begin{aligned} \frac{\overrightarrow{pm}}{4//7} &= \frac{\overrightarrow{e'_7} \boxtimes (\overrightarrow{e'_6} \wedge \overrightarrow{e'_5} \boxtimes (\overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})))}{\left(\frac{\overrightarrow{pm}}{R^7} \right)} \\ &= \frac{\overrightarrow{e'_7} \boxtimes (\overrightarrow{e'_6} \wedge \overrightarrow{e'_5} \boxtimes (\overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})))}{\left(\frac{\overrightarrow{pm}}{R^7} \right)} \\ &= \frac{\overrightarrow{e'_7} \boxtimes (\overrightarrow{e'_6} \wedge \overrightarrow{e'_5} \boxtimes (\overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})))}{\left(\frac{\overrightarrow{pm}}{R^7} \right)} \\ &= \frac{\overrightarrow{e'_7} \boxtimes (\overrightarrow{e'_6} \wedge \overrightarrow{e'_5} \boxtimes (\overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})))}{\left(\frac{\overrightarrow{pm}}{R^7} \right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{pm}_{4//7} &= \overrightarrow{pm}_{R^7} = a \cdot \text{Det}_{4 \times 4}(\overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e'_5}; \overrightarrow{e'_6}; \overrightarrow{e'_7}\}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e'_5}; \overrightarrow{e'_6}; \overrightarrow{e'_7}\}} \right\|} \\ &\quad (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{e'_5}; \overrightarrow{e'_6}; \overrightarrow{e'_7})_{7D} \\ &\quad (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{e'_5}; \overrightarrow{e'_6})_{6D} \end{aligned}$$

$$a \text{ réduit} = \psi_7 \cdot \xi_7 \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_2})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_3})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}), \overrightarrow{e_4})|$$

$$\begin{aligned} a \text{ complet} &= \psi_7 \cdot \xi_7 \cdot |\cos((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_1})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_2})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_3})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}), \overrightarrow{e_4})| \\ &\cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}), \overrightarrow{e'_5})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e'_5}), \overrightarrow{e'_6})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e'_5}; \overrightarrow{e'_6}), \overrightarrow{e'_7})| \end{aligned}$$

Sa coordonnée dans le repère $(O; \frac{\overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e'_5}; \overrightarrow{e'_6}; \overrightarrow{e'_7}\}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e'_5}; \overrightarrow{e'_6}; \overrightarrow{e'_7}\}} \right\|})$ unidimensionnel occupant virtuellement tout R^7 avec

une norme 1 est la mesure orientée d'un objet 4D dans R^7 . Le polymixte envoûteur $\overrightarrow{pm}_{4//7, R^7}$ occupe virtuellement tout R^7 avec une norme $\|\overrightarrow{pm}_{4//7, R^7}\| = |a \cdot \text{Det}_{3 \times 3}(\overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})|$.

5.5a Théorème de nullité ou d'indéfinition du polymixte ordinaire ou envoûteur

Si l'approche géométrique ne laisse pas de place à l'indéfinition de la mesure, l'approche analytique en laisse une si on s'accroche au postulat qu'un angle avec un vecteur nul est un angle indéfini. Par suite :

Soit un vecteur $\overrightarrow{v_k} \in \{\overrightarrow{v_j}\}_m$ construite sur une base libre $\{\overrightarrow{e_i}\}_m$.

Si $\overrightarrow{v_k}$ est combinaison linéaire des vecteurs de l'objet $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \dots; \overrightarrow{v_{k-1}})$, on a

- soit $\overrightarrow{v_k} \wedge (\overrightarrow{v_{k-1}} \boxtimes \dots (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}))$ qui est vecteur ordinaire nul et par suite tous les polymixtes (ordinaires et envoûteur) construits sur cette séquence sont indéfinis car on ne définit pas d'angle avec le vecteur nul
- soit $\overrightarrow{v_k} \boxtimes \dots (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$ qui est vecteur envoûteur nul par suite tous les polymixtes (ordinaires et envoûteur) construits sur cette séquence sont indéfinis car on ne définit pas d'angle avec le vecteur nul

5.5b Théorème de non-définition du polymixte ordinaire dans l'espace de dimension paire égale à celle de l'objet

Si $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \dots; \overrightarrow{v_m})_{mD}$, alors $\overrightarrow{v_m}$ ne peut être combinaison linéaire des vecteurs de l'objet $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \dots; \overrightarrow{v_{m-1}})$, alors il n'y a pas assez de dimensions dans $R^{n=m \text{ pair}}$ pour définir un produit vectoriel qui serait simultanément orthogonal à $\overrightarrow{v_m}$ et à tous les vecteurs de l'objet $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \dots; \overrightarrow{v_{m-1}})$.

$$\overrightarrow{pm}_{m//m, R^{n=m \text{ pair}}} = \overrightarrow{v_m} \wedge (\overrightarrow{v_{m-1}} \boxtimes \dots (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})) = \text{indéfini}$$

$\{\overrightarrow{v_j}\}_m \text{ conf } \{\overrightarrow{e_i}\}_m$
 $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \dots; \overrightarrow{v_m})_{mD}$

$\overrightarrow{v_m}$ étant hors de l'espace de l'envoûteur $\overrightarrow{v_{m-1}} \boxtimes \dots (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$ on juge alors que le vecteur ordinaire $\overrightarrow{v_m}$ et l'envoûteur $\overrightarrow{v_{m-1}} \boxtimes \dots (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$ sont libres entre eux. Dans ce cas le polymixte ordinaire est indéfini.

On ne peut pas donner d'autre démonstration que celle reposant sur une analogie avec ce que l'on perçoit dans R^2 :

Si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)2D$, $\vec{v}_2$ forme un angle non nul avec l'objet $(O; \vec{v}_1)$ réduit au vecteur $\vec{v}_1$, parce qu'il n'est pas combinaison linéaire de $\vec{v}_1$. Il n'y a pas assez de dimensions dans R^2 pour définir un produit vectoriel de vecteurs non colinéaires qui serait simultanément orthogonal à $\vec{v}_1$ et à $\vec{v}_2$. Le polymixte ordinaire est donc indéfini :

$$\underset{R^2}{\overrightarrow{pm}}_{2//2} = \vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1 \underset{(O;\vec{v}_1; \vec{v}_2)2D}{\overrightarrow{\{\vec{v}_2, \vec{v}_1\}conf\{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}}} = \text{indéfini}$$

5.5c Théorème de définition nulle du polymixte ordinaire dans l'espace de dimension paire immédiatement supérieure à celle de l'objet

Si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m)(m-1)D$, parce que $\vec{v}_m$ est combinaison linéaire des vecteurs de l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_{m-1})$ alors il y a assez de dimensions dans $R^{n=m \text{ pair}}$ pour définir un produit vectoriel de vecteurs liés qui serait simultanément orthogonal à $\vec{v}_m$ et à tous les vecteurs de l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_{m-1})$.

$$\underset{R^{n=m \text{ pair}}}{\overrightarrow{pm}}_{m//m} = \vec{v}_m \wedge \left(\overrightarrow{\vec{v}_{m-1} \boxtimes \dots (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)} \right) \underset{(O;\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m)(m-1)D}{\overrightarrow{\{\vec{v}_j\}_m conf\{\vec{e}_i\}_m}} = \vec{0}$$

$\vec{v}_m$ étant dans l'espace de l'envoûteur $\overrightarrow{\vec{v}_{m-1} \boxtimes \dots (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ on juge alors que le vecteur ordinaire $\vec{v}_m$ et l'envoûteur $\overrightarrow{\vec{v}_{m-1} \boxtimes \dots (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ sont dans une « sorte » de colinéarité. Dans ce cas le polymixte ordinaire est défini, et l'est comme vecteur nul.

Note : on met en évidence ces cas dans les exemples de croissances des polymixtes, plus bas présentés, qui détaillent pas à pas les 5 premières croissances $\underset{R^n}{\overrightarrow{pm}}_{1//n}$, $\underset{R^n}{\overrightarrow{pm}}_{2//n}$, $\underset{R^n}{\overrightarrow{pm}}_{3//n}$, $\underset{R^n}{\overrightarrow{pm}}_{4//n}$, $\underset{R^n}{\overrightarrow{pm}}_{5//n}$

Application aux séquences de vecteurs

On peut appliquer les précédents théorèmes aux séquences composant les polymixtes. Si une séquence est indéfinie, tous les polymixtes qui la contient sont indéfinis. Si une séquence est définie comme vecteur nul, tous les polymixtes qui la contient sont indéfinis car on ne sait pas définir d'angle avec un vecteur nul

5.5d Théorème de définition non nul des polymixtes envoûteurs

Le pré requis est que l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m)$ soit mD , quelle que soit la parité de m .

Si $\vec{v}_m; \dots; \vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1$ sont libres et que m est pair, il y a suffisamment de dimensions dans $R^{m+1 \text{ impair}}$ pour définir le vecteur $\vec{v}_{m \text{ pair}} \wedge \left(\overrightarrow{\vec{v}_{m-1} \boxtimes \dots (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)} \right)$ comme confiné au vecteur $\vec{e}'_{m+1}$ d'un espace de dimension impaire supérieure à m pair, puisque $\vec{e}'_{m+1}$ est par définition orthogonal à tous les vecteurs de R^m .

Dès lors l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m)(m \text{ pair})D$ est mesuré non nul par tous les polymixtes envoûteurs contenant la séquence $\vec{v}_m \wedge \left(\overrightarrow{\vec{v}_{m-1} \boxtimes \dots (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)} \right)$

Exemple

$$\overrightarrow{pm}_{m//m+1}^{R^{m+1} \text{ impair}} = \overrightarrow{e'_{m+1} \boxtimes (\overrightarrow{v_m} \wedge (\overrightarrow{v_{m-1}} \boxtimes \dots (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})))}_{\{\overrightarrow{v_j}\}_m \text{ conf } \{\overrightarrow{e_i}\}_m (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \dots; \overrightarrow{v_m}) (m \text{ pair}) D}$$

Note : Cependant n'importe quel vecteur $\overrightarrow{e'_{(m+1) \leq p \leq n}}$ est aussi par définition orthogonal à tous les vecteurs de R^m . Donc on a la liberté de choisir les confinements que l'on veut à n'importe quel vecteur $\overrightarrow{e'_p}$ pour $\overrightarrow{v_m \text{ pair}} \wedge (\dots (\overrightarrow{v_4} \wedge (\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}))) \dots)$.

Si $\overrightarrow{v_m}; \dots; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}$ sont libres et que m est impair, il y a suffisamment de dimensions dans $R^{m \text{ impair}}$ pour définir le vecteur $\overrightarrow{v_m \text{ impair}} \boxtimes \dots (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$ comme porté par l'envoûteur $\left\| \overrightarrow{env}_{R^{m \text{ impair}}} \right\|$.

Dès lors l'objet $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \dots; \overrightarrow{v_m}) (m \text{ impair}) D$ est mesuré non nul par tous les polymixtes envoûteurs contenant la séquence $\overrightarrow{v_m \text{ impair}} \boxtimes \dots (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$

Exemple

$$\overrightarrow{pm}_{m//m}^{R^{m \text{ impair}}} = \overrightarrow{e'_{m+1} \boxtimes (\overrightarrow{e'_m} \wedge (\overrightarrow{v_m} \boxtimes \dots (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})))}_{\{\overrightarrow{v_j}\}_m \text{ conf } \{\overrightarrow{e_i}\}_m (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \dots; \overrightarrow{v_m}) (m \text{ impair}) D}$$

5.6 Cas des objets polymixiaux $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \dots; \overrightarrow{v_m}) mD$

On a alors $\text{Dim}\{\overrightarrow{v_j}\}_m = \text{Dim}\{\overrightarrow{e_i}\}_m = R^m$. Toute famille libre $\{\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \dots; \overrightarrow{v_m}\}$ correspond à un objet polymixial $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \dots; \overrightarrow{v_m}) mD$ de dimension égale à m . C'est un polymixte envoûteur non nul qui donnera sa mesure.

$\overrightarrow{pm}_{m \text{ pair} // n \text{ impair} > m}^{R^n}$ ou $\overrightarrow{pm}_{m \text{ impair} // n \text{ impair} \geq m}^{R^n}$

5.6a Distributivité de l'envoûteur et formations de lignes polymixiales

Ce chapitre vise à justifier la norme du polymixte envoûteur, tel que :

$$\left\| \overrightarrow{pm}_{m//n}^{R^{n \text{ impair} \geq m}} \right\| = |a. \text{Det}_{m \times m}(\overrightarrow{v_m}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})|.$$

Note : j'aurai du mal à dire ce qui est le plus intéressant : la prise de conscience des libertés prises pour donner une mesure à un objet mD , ou l'élaboration de la formule elle-même...

La coordonnée d'un envoûteur dans un repère unidimensionnel $(O; \overrightarrow{\overbrace{en\vec{v}}^{R^n \text{ impair} \geq m}})$ se formule par la

distribution de son vecteur unitaire $\overrightarrow{\overbrace{en\vec{v}}^{R^n \text{ impair} \geq m}}$ sur l'ensemble des déterminants $\underset{R^n \text{ impair} \geq m}{\text{Det}}_{m \times m} (\overrightarrow{v_m}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})$

de m colonnes et m lignes que l'on peut former dans la matrice $\underset{m \times n}{M} (\overrightarrow{v_m}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})$ des coordonnées de $\overrightarrow{v_m}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}$ dans $R^n \text{ impair} \geq m$, le tout multiplié par une constante a dépendant de la configuration spatiale du repère $(O; \overrightarrow{e_1}; \dots; \overrightarrow{e_m}; \overrightarrow{e'_{m+1}}; \dots; \overrightarrow{e'_n})$ dans lequel on donne les coordonnées de l'objet $\{\overrightarrow{v_m}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}\}$.

Note : précisons en anticipant les formes de a , qui sont définies non nuls pour n impair.

Forme réduite construite sur la base dans laquelle est confiné l'objet $\{\overrightarrow{v_m}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}\}$:

$$a \text{ réduit} = \psi_n \cdot \xi_n \cdot |\cos((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_1})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_2})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_3})| \dots |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \dots; \overrightarrow{e_{(m-1)}}), \overrightarrow{e_m})|$$

Forme complète construite sur R^n :

$$a = (a \text{ réduit}) \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \dots; \overrightarrow{e_m}), \overrightarrow{e'_{m+1}})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \dots; \overrightarrow{e_m}, \overrightarrow{e'_{m+1}}), \overrightarrow{e'_{m+2}})| \dots |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \dots; \overrightarrow{e_m}; \overrightarrow{e'_{m+1}}; \overrightarrow{e'_{m+2}}; \dots; \overrightarrow{e'_{n-1}}), \overrightarrow{e'_n})|$$

On a toujours $a = a \text{ réduit}$ car chaque vecteur $\overrightarrow{e'_p}$ est orthogonal à tous les autres

Les opérateurs ψ_n et ξ_n caractérisent l'espace et la configuration spatiale du repère de la base dans lesquels on mesure des objets formés sur des vecteurs quelconques.

$\psi_n = \pm 1$ (lire $\psi_n = 1$ ou $\psi_n = -1$) caractérise l'orientation directe ou indirecte du produit vectoriel dans l'espace R^n

$\xi_n = \pm 1$ (lire $\xi_n = 1$ ou $\xi_n = -1$) caractérise relativement à un choix pour ψ_n l'orientation directoïde ou indirectoïde du repère de base $(O; \overrightarrow{e_1}; \dots; \overrightarrow{e_m}; \overrightarrow{e'_{m+1}}; \dots; \overrightarrow{e'_n})$

On distribue $\overrightarrow{\overbrace{en\vec{v}}^{R^n \text{ impair} \geq m}}$ en une combinaison de $\frac{n!}{(n-m)!m!}$ vecteurs envoûteurs $\overrightarrow{E_{1 \leq p \leq \frac{n!}{(n-m)!m!}}}$ sur les

$\frac{n!}{(n-m)!m!}$ déterminants $\underset{R^n \text{ impair} \geq m}{\text{Det}}_{m \times m} (\overrightarrow{v_m}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})$ de m colonnes et m lignes que l'on peut former dans la matrice $\underset{m \times n}{M} (\overrightarrow{v_m}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})$ définie dans $R^n \text{ impair} \geq m$ (en supprimant chaque fois une ou plusieurs lignes de coordonnées).

Chaque vecteur $\overrightarrow{E_p}$ est alors lui aussi un vecteur envoûteur formé de la combinaison linéaire que l'on veut dans $\{\overrightarrow{e_i}\}_m \cup \{\overrightarrow{e'_p}\}_{(n-m)}$ lorsqu'il se compose avec un des vecteurs de $\{\overrightarrow{e_i}\}_m \cup \{\overrightarrow{e'_p}\}_{(n-m)}$.

Ces $\frac{n!}{(n-m)!m!}$ vecteurs $\overrightarrow{E_p}$ peuvent se composer en produits scalaires et vectoriels avec d'autres vecteurs de $\{\overrightarrow{e'_i}\}_m \cup \{\overrightarrow{e'_p}\}_{(n-m)}$ en prenant des aspects choisis pour former une nouvelle matrice $M_{n \times n}((\overrightarrow{v_n} \text{ ou } \overrightarrow{e'_n}); \dots; \overrightarrow{v_m}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})$.

En particulier si $n = m + 1$ on obtient $\frac{(m+1)!}{(m+1-m)!m!} = m + 1$ déterminants $Det_{m \times m}(\overrightarrow{v_m}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})$ dans une matrice $M_{(m+1) \times (m+1)}(\overrightarrow{v_{m+1}}; \overrightarrow{v_m}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})$.

Les valeurs des compositions des $\overrightarrow{E_p}$ avec les vecteurs de bases de ces autres vecteurs de $\{\overrightarrow{e'_i}\}_m \cup \{\overrightarrow{e'_p}\}_{(n-m)}$ forment ce qu'on appelle des « lignes polymixiales ».

Exemples

1 déterminant $Det_{3 \times 3}(\overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})$ dans la matrice des coordonnées de $\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}$ confinés à $R^{n=3}$:

$$\pm \left| \left| \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) \right| \right| \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{R^3}}{\left| \left| \overrightarrow{env}_{R^3} \right| \right|} = a \cdot Det_{3 \times 3}(\overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \cdot \overrightarrow{E_1}$$

4 déterminants $Det_{3 \times 3}(\overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})$ de 3 lignes et 3 colonnes dans la matrice des coordonnées de $\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}$ confinés à $R^{n=4}$

$$\pm \left| \left| \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) \right| \right| \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{R^4}}{\left| \left| \overrightarrow{env}_{R^4} \right| \right|} = a \cdot (Det_{3 \times 3}(\overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \cdot \overrightarrow{E_1} + Det_{3 \times 3}(\overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \cdot \overrightarrow{E_2} + Det_{3 \times 3}(\overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \cdot \overrightarrow{E_3} + Det_{3 \times 3}(\overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \cdot \overrightarrow{E_4})$$

Un $\overrightarrow{E_p}$ étant envoûteur de $R^{n \text{ impair}}$, l'aspect qu'il prend (la combinaison linéaire dans $\{\overrightarrow{e'_i}\}_m \cup \{\overrightarrow{e'_p}\}_{(n-m)}$) en se composant avec un vecteur ordinaire de $\{\overrightarrow{e'_i}\}_m \cup \{\overrightarrow{e'_p}\}_{(n-m)}$ ne le force pas à conserver cet aspect quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire de $\{\overrightarrow{e'_i}\}_m \cup \{\overrightarrow{e'_p}\}_{(n-m)}$.

Exemple

$$\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{E_1} = \overrightarrow{e'_5}$$

$$\overrightarrow{e_2} \wedge \overrightarrow{E_1} = \overrightarrow{0}$$

On cherche alors à préciser les valeurs des compositions des $\overrightarrow{E_p}$ avec les $\overrightarrow{e'_i}$, qu'on appelle « lignes polymixiales », en tenant compte de la constante a caractéristique de la configuration spatiale du repère dans lequel on donne les coordonnées de $\{\overrightarrow{v_m}; \dots; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}\}$.

Exemple

Se reporter à l'étude de croissance des polymixtes, dans laquelle on a étudié les cas de $\overrightarrow{pm}_{3//3}^{R^3}$; $\overrightarrow{pm}_{4//5}^{R^5}$; $\overrightarrow{pm}_{5//5}^{R^5}$

5.6b Palinodie de la formule

Il est honorable de préciser le contexte de la formule obtenue. Ici il s'agit de la grande liberté prise dans les choix des valeurs des lignes polymixiales, de façon à obtenir la formule souhaitée. Tout a été fait pour obtenir cette formule... cela peut sembler contraire à la recherche de la vérité, mais à bien y réfléchir cela l'est seulement si on peut démontrer par des mesures que les résultats obtenus sont faux. Si on ne peut pas le démontrer, refuser de prendre cette liberté peut aussi bien être considéré non pas comme de la prudence mais comme un manque de créativité. Le point central est l'auteur qui écrit, c'est son discernement et son honnêteté intellectuelle qui sont mis en cause : jusqu'où peut-il s'illusionner et illusionner les autres ? S'il voit clairement son erreur, il doit abandonner ou faire évoluer son discours. Mais en général il a du mal à abandonner ce qu'il a construit, c'est pourquoi sa formule doit s'accompagner d'une sorte de palinodie, où il explique les libertés qu'il a prises. C'est le moins qu'il puisse faire s'il a tort. Il restera toujours l'éventuelle beauté interne de sa théorie comme une totalité ayant une cohérence, bien que non concernée par les verdicts des mesures. De même tout ce qui relève de l'art n'est ni faux ni vrai mais montre une totalité ayant une cohérence.

5.6c Décomposition d'un déterminant en somme de produits de coordonnées

On cherche à montrer grâce aux propriétés des envoûteurs qu'il existe suffisamment de lignes polymixiales dans un polymixte pour reconstituer un déterminant $\underset{R^n=m}{\overset{m \times m}{\text{Det}}}(\overrightarrow{v_m}; \dots; \overrightarrow{v_j}; \dots \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})$.

Tout d'abord remarquons que dans toute matrice carrée $\underset{m \times m}{M}(\overrightarrow{v_m}; \dots; \overrightarrow{v_j}; \dots \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})$ on compte :

$$\frac{m!}{m!} = 1 \text{ déterminant } \underset{1}{\overset{m \times m}{\text{Det}}}(\overrightarrow{v_m}; \dots; \overrightarrow{v_j}; \dots \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})$$

On compte aussi :

$$\frac{m!}{(m-1)!} = m \text{ sous-déterminants } \underset{1 \leq k \leq m}{\overset{(m-1) \times (m-1)}{\text{Det}}}(\overrightarrow{v_{m-1}}; \dots; \overrightarrow{v_j}; \dots \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})$$

Soit une somme de m produits de une coordonnée avec chaque sous-déterminant. Chaque produit est affecté d'un signe positif ou signe négatif (sans qu'on précise lesquelles pour le moment). Ces m produits permettent de reconstituer :

$$\begin{aligned} & \underset{R^n=m}{\overset{m \times m}{\text{Det}}}(\overrightarrow{v_m}; \dots; \overrightarrow{v_j}; \dots \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) = \\ & \pm v_{m|i_j=1} \cdot \underset{1}{\overset{(m-1) \times (m-1)}{\text{Det}}}(\overrightarrow{v_{m-1}}; \dots; \overrightarrow{v_j}; \dots \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \pm v_{m|i_j=2} \cdot \underset{2}{\overset{(m-1) \times (m-1)}{\text{Det}}}(\overrightarrow{v_{m-1}}; \dots; \overrightarrow{v_j}; \dots \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \\ & \dots \pm v_{m|i_j=k} \cdot \underset{k}{\overset{(m-1) \times (m-1)}{\text{Det}}}(\overrightarrow{v_{m-1}}; \dots; \overrightarrow{v_j}; \dots \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \pm \dots \pm v_{m|i_j=m} \cdot \underset{m}{\overset{(m-1) \times (m-1)}{\text{Det}}}(\overrightarrow{v_{m-1}}; \dots; \overrightarrow{v_j}; \dots \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \end{aligned}$$

Avec $1 \leq k \leq m$

On compte ensuite dans $\underset{R^n=m}{\overset{m \times m}{Det}}(\overrightarrow{v_m}; \dots; \overrightarrow{v_j}; \dots \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})$:

$$\frac{m!}{(m-2)!} \text{ sous-déterminants } \underset{1 \leq k \leq \frac{m!}{(m-2)!}}{\overset{(m-2) \times (m-2)}{Det}}(\overrightarrow{v_{m-2}}; \dots; \overrightarrow{v_j}; \dots \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})$$

Dont chacun est multiplié avec une coordonnée et affecté d'un signe.

... ..

$$\frac{m!}{3!} \text{ sous-déterminants } \underset{1 \leq k \leq \frac{m!}{3!}}{\overset{3 \times 3}{Det}}(\overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})$$

Dont chacun est multiplié avec une coordonnée et affecté d'un signe.

$$\frac{m!}{2!} \text{ sous-déterminants } \underset{1 \leq k \leq \frac{m!}{2!}}{\overset{2 \times 2}{Det}}(\overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})$$

Dont chacun est multiplié avec une coordonnée et affecté d'un signe.

$$m! \text{ sous-déterminants } \underset{1 \leq k \leq m!}{\overset{1 \times 1}{Det}}(\overrightarrow{v_1})$$

Dont chacun est multiplié avec une coordonnée et affecté d'un signe. $\underset{1 \times 1}{Det}(\overrightarrow{v_1})$ est une des coordonnées de $\overrightarrow{v_1}$, et on les compte au nombre de $m!$ dans $\underset{R^m}{\overset{m \times m}{Det}}(\overrightarrow{v_m}; \dots; \overrightarrow{v_j}; \dots \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})$, donc en plusieurs exemplaires de chaque et en nombres de chaque inégaux.

5.6d Lignes polymixiales des polymixtes envoûteurs

Un point de départ peut être l'envoûteur $\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$ comme séquence d'un polymixte $\underset{R^{m+1}}{\overrightarrow{pm}}$. On

aurait pu choisir une autre séquence, mais il faut en choisir une pour montrer le processus de raisonnement avec les prises d'aspects des envoûteurs. Les vecteurs $\overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}$ sont libres entre eux et confinés à $R^m = \{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \dots; \overrightarrow{e_m}\}$. La coordonnée de $\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$ dans $(O; \underset{R^m}{\overrightarrow{env}})$ est égale à la distribution de $\underset{R^m}{\overrightarrow{env}}$ sur $\left\| \underset{R^m}{\overrightarrow{env}} \right\|$

l'ensemble des $\frac{m!}{(m-3)!3!}$ sous-déterminants 3 colonnes et 3 lignes que l'on peut former dans la matrice $\underset{3 \times m}{M}(\overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})$ des coordonnées de $\overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}$ dans R^m , le tout multiplié par une constante a dépendant de la configuration spatiale du repère $(O; \overrightarrow{e_m}; \dots; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_1})$ dans lequel on donne les coordonnées de $\{\overrightarrow{v_m}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}\}$:

$$\pm \left\| \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) \right\| \cdot \frac{\underset{R^m}{\overrightarrow{env}}}{\left\| \underset{R^m}{\overrightarrow{env}} \right\|} =$$

$$a. \underset{1}{\overset{3 \times 3}{\text{Det}}}(\vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1) \cdot \vec{E}_1 + a. \underset{2}{\overset{3 \times 3}{\text{Det}}}(\vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1) \cdot \vec{E}_2 + \dots + a. \underset{m!}{\overset{3 \times 3}{\text{Det}}}(\vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1) \cdot \vec{E}_{\frac{m!}{(m-3)!3!}}$$

5.6e Construction du Polymixte envoûteur m pair dans R^{m+1} par lignes polymixiales

Considérons maintenant un polymixte défini dans R^{m+1} pour m pair. Son vecteur envoûteur est $\frac{\vec{e}n\vec{v}}{\left\| \frac{\vec{e}n\vec{v}}{R^{(m+1)}} \right\|}$

qui occupe virtuellement tout l'espace $\{\vec{e}_i\}_m \cup \vec{e}'_{(m+1)}$. Le vecteur $\vec{e}'_{(m+1)}$ est orthogonal à tous les vecteurs de $\{\vec{e}_i\}_m$. Le module de la séquence $\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)$ est le même dans $\{\vec{e}_i\}_m \cup \vec{e}'_{(m+1)}$ et dans $\{\vec{e}_i\}_m$, puisque les coordonnées de $\vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1$ portées par la dimension $\vec{e}'_{(m+1)}$ sont nulles, ces trois vecteurs étant confinés à $\{\vec{e}_i\}_m$.

$$\begin{aligned} \vec{p\vec{m}}_{\substack{m \text{ pair}/m+1 \\ R^{m+1}}} &= \overrightarrow{e'_{(m+1)} \boxtimes (\vec{v}_m \wedge (\dots (\vec{v}_4 \wedge (\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1))) \dots))} \\ &= \overrightarrow{e'_{(m+1)} \boxtimes (\vec{v}_m \wedge (\dots (\vec{v}_4 \wedge (\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1))) \dots))} \cdot \frac{\vec{e}n\vec{v}}{\left\| \frac{\vec{e}n\vec{v}}{R^{(m+1)}} \right\|} \end{aligned}$$

On décompose le polymixte envoûteur en lignes de produits de coordonnées aboutissant chacune à un vecteur $\vec{E}_{1 \leq p \leq \frac{m!}{(m-3)!3!}}$. L'idée est de montrer qu'il existe suffisamment de lignes polymixiales pour

reconstituer $a. \underset{R^m \text{ pair}}{\overset{m \times m}{\text{Det}}}(\vec{v}_m; \dots; \vec{v}_2; \vec{v}_1) \cdot \frac{\vec{e}n\vec{v}}{\left\| \frac{\vec{e}n\vec{v}}{R^{(m+1)}} \right\|}$

$$\begin{aligned} \vec{p\vec{m}}_{\substack{m \text{ pair}/m+1 \\ R^{m+1}}} &= \\ a. \overrightarrow{e'_{(m+1)} \boxtimes (v_{m|i_m} \cdot \vec{e}_{i_m} \wedge (v_{(m-1)|i_{(m-1)}} \cdot \vec{e}_{i_{(m-1)}} \boxtimes (\dots \boxtimes (v_{4|i_4} \cdot \vec{e}_{i_4} \wedge \underset{1}{\overset{3 \times 3}{\text{Det}}}(\vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1) \cdot \vec{E}_1) \dots)))} \\ &\quad + \\ a. \overrightarrow{e'_{(m+1)} \boxtimes (v_{m|i_m} \cdot \vec{e}_{i_m} \wedge (v_{(m-1)|i_{(m-1)}} \cdot \vec{e}_{i_{(m-1)}} \boxtimes (\dots \boxtimes (v_{4|i_4} \cdot \vec{e}_{i_4} \wedge \underset{2}{\overset{3 \times 3}{\text{Det}}}(\vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1) \cdot \vec{E}_2) \dots)))} \\ &\quad + \dots + \\ a. \overrightarrow{e'_{(m+1)} \boxtimes (v_{m|i_m} \cdot \vec{e}_{i_m} \wedge (v_{(m-1)|i_{(m-1)}} \cdot \vec{e}_{i_{(m-1)}} \boxtimes (\dots \boxtimes (v_{4|i_4} \cdot \vec{e}_{i_4} \wedge \underset{(m-3)!3!}{\overset{3 \times 3}{\text{Det}}}(\vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1) \cdot \vec{E}_{\frac{m!}{(m-3)!3!}}) \dots)))} \end{aligned}$$

$\vec{e}'_{(m+1)} = 1 \cdot \vec{e}'_{(m+1)}$ étant orthogonal à tous les vecteurs $\{\vec{e}_i\}_m$ n'a pas d'indice variable

On réécrit :

$$\vec{p\vec{m}}_{\substack{m \text{ pair}/m+1 \\ R^{m+1}}} =$$

Ces $\frac{m!}{(m-3)!3!}$ lignes peuvent reconstituer $a. \underset{m \times m}{Det}(\overrightarrow{v_m}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}). \frac{\overline{env}}{R^{(m+1)}} \cdot \frac{\overline{env}}{\left\| R^{(m+1)} \right\|}.$

Dans le déterminant ordinaire il n'y a que $m! \leq m^m$ lignes polymixiales et les i_j ne sont pas chacun libre de prendre toutes les valeurs $\{0; 1; \dots; m\}$, comme on le verra par la suite.

Chacune peut alors selon le choix du penseur prendre la valeur $0. \frac{\overline{env}}{R^{(m+1)}}$ ou $1. \frac{\overline{env}}{R^{(m+1)}}$ ou $-1. \frac{\overline{env}}{R^{(m+1)}}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{e'_{(m+1)}} \boxtimes \left(\overrightarrow{e_{l_m}} \wedge \left(\overrightarrow{e_{l_{(m-1)}}} \boxtimes (\dots \boxtimes (\overrightarrow{e_{l_4}} \wedge \overrightarrow{E_1}) \dots) \right) \right) &= (0 \text{ ou } 1 \text{ ou } -1) \cdot \frac{\overrightarrow{en\vec{v}}_{R(m+1)}}{\left\| \overrightarrow{en\vec{v}}_{R(m+1)} \right\|} \\ \overrightarrow{e'_{(m+1)}} \boxtimes \left(\overrightarrow{e_{l_m}} \wedge \left(\overrightarrow{e_{l_{(m-1)}}} \boxtimes (\dots \boxtimes (\overrightarrow{e_{l_4}} \wedge \overrightarrow{E_2}) \dots) \right) \right) &= (0 \text{ ou } 1 \text{ ou } -1) \cdot \frac{\overrightarrow{en\vec{v}}_{R(m+1)}}{\left\| \overrightarrow{en\vec{v}}_{R(m+1)} \right\|} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \\ \overrightarrow{e'_{(m+1)}} \boxtimes \left(\overrightarrow{e_{l_m}} \wedge \left(\overrightarrow{e_{l_{(m-1)}}} \boxtimes \left(\dots \boxtimes \left(\overrightarrow{e_{l_4}} \wedge \overrightarrow{E_{\frac{m!}{(m-3)!3!}}} \right) \dots \right) \right) \right) &= (0 \text{ ou } 1 \text{ ou } -1) \cdot \frac{\overrightarrow{en\vec{v}}_{R(m+1)}}{\left\| \overrightarrow{en\vec{v}}_{R(m+1)} \right\|} \end{aligned}$$

Finalemment on retrouvera :

$$\begin{aligned} & \frac{\overrightarrow{pm}}{R^{m+1}} \frac{\overline{(\overrightarrow{v_m}, \dots, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1})} mD}{(\overrightarrow{v_m}, \dots, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}) conf \{ \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_m} \}} \\ & \psi_{m+1} \cdot \xi_{m+1} \cdot |cos((O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1})| \cdot |sin((O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})| \cdot |sin((O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_3})| \\ & \dots |sin((O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}; \dots; \overrightarrow{e_{m-1}}, \overrightarrow{e_m})|. \frac{Det(\overrightarrow{v_m}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})}{m \times m \atop R^{m+1}} \frac{\overrightarrow{env}}{R^{(m+1)}} \left| \frac{\overrightarrow{env}}{R^{(m+1)}} \right| \end{aligned}$$

$\psi_{m+1} = \pm 1$ caractérise l'orientation directe ou indirecte du produit vectoriel dans l'espace $R^{(m+1)impair}$

$\xi_{m+1} = \pm 1$ caractérise relativement à un choix pour ψ_{m+1} l'orientation du repère $(O; \vec{e}_1; \dots; \vec{e}_m; \vec{e}'_{m+1})$

On a l'unique déterminant $Det_{m \times m}^{R^{m+1}}(\vec{v}_m; \dots; \vec{v}_2; \vec{v}_1) = Det_{m \times m}^{R^m}(\vec{v}_m; \dots; \vec{v}_2; \vec{v}_1)$ car $(\vec{v}_m; \dots; \vec{v}_2; \vec{v}_1)$ sont confinés à $R^m = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_m\}$.

5.6f Construction du Polymixte envoûteur m impair dans R^m par lignes polymixiales

Et maintenant un polymixte défini dans R^m pour m impair, en conservant l'exemple de la distribution de

$\frac{\overrightarrow{env}}{R^m}$ sur l'ensemble des déterminants 3 colonnes et 3 lignes que l'on peut former dans la matrice $\left\| \frac{\overrightarrow{env}}{R^m} \right\|$

$M_{3 \times m}(\vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1)$ des coordonnées de $\vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1$ dans R^m . L'idée est de montrer qu'il existe suffisamment de

lignes polymixiales pour reconstituer $a. Det_{m \times m}^{R^{m \text{ impair}}}(\vec{v}_m; \dots; \vec{v}_2; \vec{v}_1) \cdot \frac{\overrightarrow{env}}{\left\| \frac{\overrightarrow{env}}{R^m} \right\|}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{pm}_{m \text{ impair}/m}^{R^m} &= \overrightarrow{v_m} \boxtimes (\dots (\overrightarrow{v_4} \wedge (\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}))) \dots) \\ &= (\overrightarrow{v_m} \boxtimes (\dots (\overrightarrow{v_4} \wedge (\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}))) \dots)) \cdot \frac{\overrightarrow{env}}{\left\| \frac{\overrightarrow{env}}{R^m} \right\|} \end{aligned}$$

On décompose le polymixte en lignes de produits de coordonnées aboutissant chacune à un vecteur

$$\overrightarrow{E}_{1 \leq p \leq \frac{m!}{(m-3)!3!}} :$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{pm}_{m \text{ impair}/m}^{R^m} &= \\ a. v_{m|i_m} \cdot \overrightarrow{e_{i_m}} \boxtimes (v_{(m-1)|i_{(m-1)}} \cdot \overrightarrow{e_{i_{(m-1)}}} \wedge (\dots \boxtimes (v_{4|i_4} \cdot \overrightarrow{e_{i_4}} \wedge Det_{3 \times 3}(\vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1) \cdot \overrightarrow{E_1}) \dots)) \\ &\quad + \\ a. v_{m|i_m} \cdot \overrightarrow{e_{i_m}} \boxtimes (v_{(m-1)|i_{(m-1)}} \cdot \overrightarrow{e_{i_{(m-1)}}} \wedge (\dots \boxtimes (v_{4|i_4} \cdot \overrightarrow{e_{i_4}} \wedge Det_{3 \times 3}(\vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1) \cdot \overrightarrow{E_2}) \dots)) \\ &\quad + \dots + \\ a. v_{m|i_m} \cdot \overrightarrow{e_{i_m}} \boxtimes (v_{(m-1)|i_{(m-1)}} \cdot \overrightarrow{e_{i_{(m-1)}}} \wedge (\dots \boxtimes (v_{4|i_4} \cdot \overrightarrow{e_{i_4}} \wedge Det_{3 \times 3}(\vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1) \cdot \overrightarrow{E_{\frac{m!}{(m-3)!3!}}}) \dots)) \end{aligned}$$

Qu'on réécrit :

$$\overrightarrow{pm}_{m \text{ pair}/(m+1)}^{R^{m+1}} =$$

$$\begin{aligned}
& a. (v_m|_{i_m} \cdot v_{(m-1)|i_{(m-1)}} \dots v_4|_{i_4}). \underset{1}{\underset{3 \times 3}{\text{Det}}}(\vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1). \vec{e}_{i_m} \boxtimes \left(\overrightarrow{e_{i_{(m-1)}}} \wedge (\dots \boxtimes (\vec{e}_{i_4} \wedge \vec{E}_1) \dots) \right) \\
& + \\
& a. (v_m|_{i_m} \cdot v_{(m-1)|i_{(m-1)}} \dots v_4|_{i_4}). \underset{2}{\underset{3 \times 3}{\text{Det}}}(\vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1). \vec{e}_{i_m} \boxtimes \left(\overrightarrow{e_{i_{(m-1)}}} \wedge (\dots \boxtimes (\vec{e}_{i_4} \wedge \vec{E}_2) \dots) \right) \\
& + \dots + \\
& a. (v_m|_{i_m} \cdot v_{(m-1)|i_{(m-1)}} \dots v_4|_{i_4}). \underset{\frac{m!}{(m-3)!3!}}{\underset{3 \times 3}{\text{Det}}}(\vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1). \vec{e}_{i_m} \boxtimes \left(\overrightarrow{e_{i_{(m-1)}}} \wedge \left(\dots \boxtimes \left(\vec{e}_{i_4} \wedge \overrightarrow{E_{\frac{m!}{(m-3)!3!}}} \right) \dots \right) \right)
\end{aligned}$$

Ces $\frac{m!}{(m-3)!3!}$ lignes peuvent reconstituer $a. \underset{R^m \text{ impair}}{\underset{m \times m}{\text{Det}}}(\vec{v}_m; \dots; \vec{v}_2; \vec{v}_1). \frac{\overrightarrow{en\vec{v}}_{R^m}}{\left\| \overrightarrow{en\vec{v}}_{R^m} \right\|}$.

En effet, et c'est l'argument de la démonstration : elles ne sont qu'un sous-ensemble des m^m lignes « polymixiales » que l'on peut construire si les indices i_j sont chacun libre de prendre toutes les valeurs $\{0; 1; \dots; m\}$, y compris avec répétitions.

Dans le déterminant ordinaire il n'y a que $m! \leq m^m$ lignes polymixiales et les i_j ne sont pas chacun libre de prendre toutes les valeurs $\{0; 1; \dots; m\}$, comme on le verra par la suite.

Chacune peut alors selon le choix du penseur prendre la valeur $0. \frac{\overrightarrow{en\vec{v}}_{R^m}}{\left\| \overrightarrow{en\vec{v}}_{R^m} \right\|}$ ou $1. \frac{\overrightarrow{en\vec{v}}_{R^m}}{\left\| \overrightarrow{en\vec{v}}_{R^m} \right\|}$ ou $-1. \frac{\overrightarrow{en\vec{v}}_{R^m}}{\left\| \overrightarrow{en\vec{v}}_{R^m} \right\|}$:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_{i_m} \boxtimes \left(\overrightarrow{e_{i_{(m-1)}}} \wedge (\dots \boxtimes (\vec{e}_{i_4} \wedge \vec{E}_1) \dots) \right) &= (0 \text{ ou } 1 \text{ ou } -1). \frac{\overrightarrow{en\vec{v}}_{R^m}}{\left\| \overrightarrow{en\vec{v}}_{R^m} \right\|} \\
\vec{e}_{i_m} \boxtimes \left(\overrightarrow{e_{i_{(m-1)}}} \wedge (\dots \boxtimes (\vec{e}_{i_4} \wedge \vec{E}_2) \dots) \right) &= (0 \text{ ou } 1 \text{ ou } -1). \frac{\overrightarrow{en\vec{v}}_{R^m}}{\left\| \overrightarrow{en\vec{v}}_{R^m} \right\|} \\
\vec{e}_{i_m} \boxtimes \left(\overrightarrow{e_{i_{(m-1)}}} \wedge \left(\dots \boxtimes \left(\vec{e}_{i_4} \wedge \overrightarrow{E_{\frac{m!}{(m-3)!3!}}} \right) \dots \right) \right) &= (0 \text{ ou } 1 \text{ ou } -1). \frac{\overrightarrow{en\vec{v}}_{R^m}}{\left\| \overrightarrow{en\vec{v}}_{R^m} \right\|}
\end{aligned}$$

Finalement on retrouvera :

$$\begin{aligned}
& \underset{R^m}{\overrightarrow{pm}}_{m \text{ impair} // m} \underset{(\vec{v}_m; \dots; \vec{v}_2; \vec{v}_1) \text{ conf} \{ \vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_m \}}{\overset{(\vec{v}_m; \dots; \vec{v}_2; \vec{v}_1) m D}{=}} \\
& \psi_m \cdot \xi_m \cdot \left| \cos((O; \vec{e}_1), \vec{e}_1) \right| \cdot \left| \sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2) \right| \cdot \left| \sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3) \right| \\
& \dots \left| \sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_{m-1}), \vec{e}_m) \right| \cdot \underset{R^m}{\underset{m \times m}{\text{Det}}}(\vec{v}_m; \dots; \vec{v}_2; \vec{v}_1) \frac{\overrightarrow{en\vec{v}}_{R^m}}{\left\| \overrightarrow{en\vec{v}}_{R^m} \right\|}
\end{aligned}$$

$\psi_m = \pm 1$ caractérise l'orientation directe ou indirecte du produit vectoriel dans l'espace $R^m \text{ impair}$

$\xi_m = \pm 1$ caractérise relativement à un choix pour ψ_m l'orientation du repère $(O; \vec{e}_1; \dots; \vec{e}_m)$
C'est la même formule que pour m pair.

5.6g formule générale du polymixte envoûteur $\overrightarrow{pm}_{m//n}^{R^n \text{ impair}}$

On montre ensuite que les lignes polymixiales restent en même nombre dans $\{\overrightarrow{e_i}\}_m \cup \{\overrightarrow{e'_p}\}_{(n-m)}$, parce chaque vecteur de $\{\overrightarrow{e'_p}\}_{(n-m)}$ est orthogonal à chacun des autres vecteurs de $\{\overrightarrow{e_i}\}_m \cup \{\overrightarrow{e'_p}\}_{(n-m)}$.

Ce qui fait qu'on a une formule générale du polymixte envoûteur $\overrightarrow{pm}_{m//n}^{R^n \text{ impair}}$ qui est défini dans un espace de dimension impaire, et qui est non nul pour mesurer un objet mD :

$$\overrightarrow{pm}_{m//n \geq m}^{R^n \text{ impair}} = \frac{(\overrightarrow{v_m}, \dots, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1})_{mD}}{(\overrightarrow{v_m}, \dots, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1})_{\text{conf}\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_m}\}}} \cdot a \cdot \frac{\text{Det}_{m \times m}^{R^n}(\overrightarrow{v_m}, \dots, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}) \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{R^n \text{ impair}}}{\left\| \frac{\overrightarrow{env}}{R^n \text{ impair}} \right\|}}$$

Avec :

$$\begin{aligned} a \text{ réduit} &= \psi_n \cdot \xi_n \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_3})| \dots |\sin((O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_{m-1}}, \overrightarrow{e_m})| \\ a \text{ complet} &= \psi_n \cdot \xi_n \cdot |\cos((O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_3})| \dots |\sin((O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_{m-1}}, \overrightarrow{e_m})| \\ &\cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_m}), \overrightarrow{e'_{m+1}})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_m}, \overrightarrow{e'_{m+1}}), \overrightarrow{e'_{m+2}})| \dots |\sin((O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_m}, \overrightarrow{e'_{m+1}}, \dots, \overrightarrow{e'_{n-1}}, \overrightarrow{e'_n})| \end{aligned}$$

$\psi_n = 1$ ou -1 caractérise l'orientation directe ou indirecte du produit vectoriel dans l'espace $R^n \text{ impair}$

$\xi_n = 1$ ou -1 caractérise relativement au choix fait pour ψ_n l'orientation directoïde ou indirectoïde du repère $(O; \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_m}, \overrightarrow{e'_{m+1}}, \dots, \overrightarrow{e'_n})$

5.6h Reconstitution d'un déterminant $m \text{ pair} \times m \text{ pair}$ par toutes ses lignes polymixiales

On aurait pu faire le même raisonnement sur un polymixte m pair en le fondant sur les coordonnées de $\overrightarrow{v_1}$ dans $(O; \frac{\overrightarrow{env}}{R^m \text{ pair}})$ qui donne la distribution de $\frac{\overrightarrow{env}}{R^m \text{ pair}}$ sur l'ensemble des $m!$ déterminants 1 colonne et 1 ligne que l'on peut former dans la matrice $M_{m \times m}(\overrightarrow{v_m}, \dots, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1})$, le tout multiplié par la constante a qui caractérise la configuration spatiale du repère $(O; \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_m}, \overrightarrow{e'_{m+1}})$. On donne dans ce repère les coordonnées de $\overrightarrow{v_1}$:

$$\pm |\overrightarrow{v_1}| \cdot \frac{\frac{\overrightarrow{env}}{R^m \text{ pair}}}{\left\| \frac{\overrightarrow{env}}{R^m \text{ pair}} \right\|} =$$

$$a \cdot \text{Det}_{1 \times 1}^1(\overrightarrow{v_1}) \cdot \overrightarrow{E_1} + a \cdot \text{Det}_{1 \times 1}^2(\overrightarrow{v_1}) \cdot \overrightarrow{E_2} + \dots + a \cdot \text{Det}_{1 \times 1}^{m!}(\overrightarrow{v_1}) \cdot \overrightarrow{E_{m!}} = a \cdot v_{1|1} \cdot \overrightarrow{E_1} + a \cdot v_{1|2} \cdot \overrightarrow{E_2} + \dots + a \cdot v_{1|m} \cdot \overrightarrow{E_{m!}}$$

Les lignes polymixiales étant alors au nombre de $m!$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{e'_{(m+1)}} \boxtimes \left(\overrightarrow{e_{i_m}} \wedge \left(\overrightarrow{e_{i_{(m-1)}}} \boxtimes (\dots \boxtimes (\overrightarrow{e_{i_2}} \wedge \overrightarrow{E_1}) \dots) \right) \right) &= (0 \text{ ou } 1 \text{ ou } -1) \cdot \frac{\overrightarrow{en\vec{v}}_{R^{(m+1)}}}{\left\| \overrightarrow{en\vec{v}}_{R^{(m+1)}} \right\|} \\
\overrightarrow{e'_{(m+1)}} \boxtimes \left(\overrightarrow{e_{i_m}} \wedge \left(\overrightarrow{e_{i_{(m-1)}}} \boxtimes (\dots \boxtimes (\overrightarrow{e_{i_2}} \wedge \overrightarrow{E_2}) \dots) \right) \right) &= (0 \text{ ou } 1 \text{ ou } -1) \cdot \frac{\overrightarrow{en\vec{v}}_{R^{(m+1)}}}{\left\| \overrightarrow{en\vec{v}}_{R^{(m+1)}} \right\|} \\
&\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
\overrightarrow{e'_{(m+1)}} \boxtimes \left(\overrightarrow{e_{i_m}} \wedge \left(\overrightarrow{e_{i_{(m-1)}}} \boxtimes (\dots \boxtimes (\overrightarrow{e_{i_2}} \wedge \overrightarrow{E_{m!}}) \dots) \right) \right) &= (0 \text{ ou } 1 \text{ ou } -1) \cdot \frac{\overrightarrow{en\vec{v}}_{R^{(m+1)}}}{\left\| \overrightarrow{en\vec{v}}_{R^{(m+1)}} \right\|}
\end{aligned}$$

On voit alors pour chaque jeu de valeurs formé par les indices $i_j \leq i_j \leq i_m$ la possibilité de reconstituer

$a. \underset{m \times m}{\text{Det}} (\overrightarrow{v_m}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) :$
 $\underset{R^m \text{ pair}}{m \times m}$

$$\begin{aligned}
&\underset{m \times m}{\text{Det}} (\overrightarrow{v_m}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \cdot \frac{\overrightarrow{en\vec{v}}_{R^{(m+1)}}}{\left\| \overrightarrow{en\vec{v}}_{R^{(m+1)}} \right\|} = \\
&a. (v_{m|i_m} \cdot v_{(m-1)|i_{(m-1)}} \dots v_{2|i_2} \cdot v_{1|i_1}) \cdot (0 \text{ ou } 1 \text{ ou } -1) \cdot \frac{\overrightarrow{en\vec{v}}_{R^{(m+1)}}}{\left\| \overrightarrow{en\vec{v}}_{R^{(m+1)}} \right\|} \\
&\quad + \\
&a. (v_{m|i_m} \cdot v_{(m-1)|i_{(m-1)}} \dots v_{2|i_2} \cdot v_{1|i_1}) \cdot (0 \text{ ou } 1 \text{ ou } -1) \cdot \frac{\overrightarrow{en\vec{v}}_{R^{(m+1)}}}{\left\| \overrightarrow{en\vec{v}}_{R^{(m+1)}} \right\|} \\
&\quad + \dots + \\
&a. (v_{m|i_m} \cdot v_{(m-1)|i_{(m-1)}} \dots v_{2|i_2} \cdot v_{1|i_1}) \cdot (0 \text{ ou } 1 \text{ ou } -1) \cdot \frac{\overrightarrow{en\vec{v}}_{R^{(m+1)}}}{\left\| \overrightarrow{en\vec{v}}_{R^{(m+1)}} \right\|}
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{e'_{(m+1)}} = 1 \cdot \overrightarrow{e'_{(m+1)}}$ étant orthogonal à tous les vecteurs $\{\overrightarrow{e_i}\}$ m n'a pas d'indice variable.

5.6i Reconstitution d'un déterminant m impair $\times m$ impair par toutes ses lignes polymixiales

On aurait pu faire le même raisonnement sur un polymixte envoûteur m impair en le fondant sur les

coordonnées de $\overrightarrow{v_1}$ dans $(O; \frac{\overrightarrow{en\vec{v}}_{R^m \text{ impair}}}{\left\| \overrightarrow{en\vec{v}}_{R^m \text{ impair}} \right\|})$ qui donne la distribution de $\frac{\overrightarrow{en\vec{v}}_{R^m \text{ impair}}}{\left\| \overrightarrow{en\vec{v}}_{R^m \text{ impair}} \right\|}$ sur l'ensemble des $m!$

déterminants 1 colonne et 1 ligne que l'on peut former dans la matrice $\underset{m \times m}{M} (\overrightarrow{v_m}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})$ le tout multiplié par la constante a qui caractérise la configuration spatiale du repère $(O; \overrightarrow{e_1}; \dots; \overrightarrow{e_m})$. On donne dans ce repère les coordonnées de $\overrightarrow{v_1}$:

$$\pm ||\vec{v_1}|| \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{R^m \text{ impair}}}{\left| \overrightarrow{env}_{R^m \text{ impair}} \right|} =$$

$$a. \underset{1}{\overset{1 \times 1}{\text{Det}}}(\vec{v_1}).\vec{E_1} + a. \underset{2}{\overset{1 \times 1}{\text{Det}}}(\vec{v_1}).\vec{E_2} + \dots + a. \underset{m!}{\overset{1 \times 1}{\text{Det}}}(\vec{v_1}).\vec{E_{m!}} = a. v_{1|1}.\vec{E_1} + a. v_{1|2}.\vec{E_2} + \dots + a. v_{1|m}.\vec{E_{m!}}$$

Les lignes polymixiales étant alors au nombre de $m!$:

$$\begin{aligned} \vec{e_{i_m}} \boxtimes \left(\vec{e_{i_{(m-1)}}} \wedge (\dots \boxtimes (\vec{e_{i_2}} \wedge \vec{E_1}) \dots) \right) &= (0 \text{ ou } 1 \text{ ou } -1) \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{R^m \text{ impair}}}{\left| \overrightarrow{env}_{R^m \text{ impair}} \right|} \\ \vec{e_{i_m}} \boxtimes \left(\vec{e_{i_{(m-1)}}} \wedge (\dots \boxtimes (\vec{e_{i_2}} \wedge \vec{E_2}) \dots) \right) &= (0 \text{ ou } 1 \text{ ou } -1) \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{R^m \text{ impair}}}{\left| \overrightarrow{env}_{R^m \text{ impair}} \right|} \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \vec{e_{i_m}} \boxtimes \left(\vec{e_{i_{(m-1)}}} \wedge (\dots \boxtimes (\vec{e_{i_2}} \wedge \vec{E_{m!}}) \dots) \right) &= (0 \text{ ou } 1 \text{ ou } -1) \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{R^m \text{ impair}}}{\left| \overrightarrow{env}_{R^m \text{ impair}} \right|} \end{aligned}$$

On voit alors pour chaque jeu de valeurs formé par les indices $i_j \leq i_j \leq i_m$ la possibilité de reconstituer

$$a. \underset{R^m \text{ impair}}{\overset{m \times m}{\text{Det}}}(\vec{v_m}; \dots; \vec{v_2}; \vec{v_1}) :$$

$$a. \underset{R^m \text{ impair}}{\overset{m \times m}{\text{Det}}}(\vec{v_m}; \dots; \vec{v_2}; \vec{v_1}) \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{R^m \text{ impair}}}{\left| \overrightarrow{env}_{R^m \text{ impair}} \right|} =$$

$$a. (v_{m|i_m} \cdot v_{(m-1)|i_{(m-1)}} \dots v_{2|i_2} \cdot v_{1|i_1}) \cdot (0 \text{ ou } 1 \text{ ou } -1) \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{R^m \text{ impair}}}{\left| \overrightarrow{env}_{R^m \text{ impair}} \right|}$$

+

$$a. (v_{m|i_m} \cdot v_{(m-1)|i_{(m-1)}} \dots v_{2|i_2} \cdot v_{1|i_1}) \cdot (0 \text{ ou } 1 \text{ ou } -1) \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{R^m \text{ impair}}}{\left| \overrightarrow{env}_{R^m \text{ impair}} \right|}$$

+ ... +

$$a. (v_{m|i_m} \cdot v_{(m-1)|i_{(m-1)}} \dots v_{2|i_2} \cdot v_{1|i_1}) \cdot (0 \text{ ou } 1 \text{ ou } -1) \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{R^m \text{ impair}}}{\left| \overrightarrow{env}_{R^m \text{ impair}} \right|}$$

5.7 Mesures absolues d'objets polymixiaux par les normes des polymixtes

La mesure en valeur absolue d'un objet polymixial mD est donnée par le module de $\frac{\overrightarrow{pm}}{m/(n \text{ impair} \geq m)} \cdot \frac{1}{R^n}$. Elle est exprimée en unités segmentées, carrées, cubiques, et dans le cas général « hyper cubiques d'objets polymixiaux mD » dont les vecteurs ont mêmes normes 1 et sont orthogonaux entre eux. Ceci est dû à l'usage des tables trigonométriques qui ont été établies dans un repère orthonormé.

On rappelle que les opérateurs ψ_n et ξ_n caractérisent l'objet formant le repère dans lequel on mesure les objets formés sur des vecteurs quelconques.

La mesure en valeur absolue d'un objet unidimensionnel dans une base $(O; \overrightarrow{e_1})$ est donnée dans la base $(O; \overrightarrow{e_1})$ d'un espace de dimension impaire supérieure ou égale à 1. On a l'unique déterminant $\frac{Det}{1 \times 1}(\overrightarrow{v_1})$ car $\overrightarrow{v_1}$ est confiné à $R^1 = \{\overrightarrow{e_1}\}$:

$$\| \frac{\overrightarrow{pm}}{1/n} \|_{R^n \text{ impair} \geq 1} \equiv_{(O; \overrightarrow{v_1}) 1D} \| a \| \cdot \left| \frac{Det}{1 \times 1}(\overrightarrow{v_1}) \right|_{R^1}$$

Avec, tous les vecteurs étant orthogonaux entre eux :

$$\begin{aligned} a &= \psi_n \cdot \xi_n \cdot |\cos((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_1})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e'_2})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e'_2}), \overrightarrow{e'_3})| \\ &\quad |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e'_2}; \overrightarrow{e'_3}), \overrightarrow{e'_4})| \dots |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e'_2}; \overrightarrow{e'_3} \dots; \overrightarrow{e'_{(n-1)}}), \overrightarrow{e'_n})| \\ &= \psi_n \cdot \xi_n \end{aligned}$$

Soit :

$$\| \frac{\overrightarrow{pm}}{1/n} \|_{R^n \text{ impair} \geq 1} \equiv_{(O; \overrightarrow{v_1}) 1D} \| a \| \cdot \left| \frac{Det}{1 \times 1}(\overrightarrow{v_1}) \right|_{R^1}$$

Qui est un multiple d'objet segment de valeur 1

La mesure en valeur absolue d'un objet bidimensionnel dans une base $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ est donnée dans la base $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e'_3}; \dots; \overrightarrow{e'_n})$ d'un espace de dimension impaire supérieure ou égale à 3. On a l'unique déterminant $\frac{Det}{2 \times 2}(\overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})$ car $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_1}$ sont confinés à $R^2 = \{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}\}$:

$$\| \frac{\overrightarrow{pm}}{2/n} \|_{R^n \text{ impair} > 2} \equiv_{(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}) 2D} \| a \| \cdot \left| \frac{Det}{2 \times 2}(\overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \right|_{R^2}$$

Avec les orthogonalités partielles :

$$\begin{aligned} a &= \psi_n \cdot \xi_n \cdot |\cos((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_1})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_2})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e'_3})| \\ &\quad |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e'_3}), \overrightarrow{e'_4})| \dots |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e'_3} \dots; \overrightarrow{e'_{(n-1)}}), \overrightarrow{e'_n})| \end{aligned}$$

$$= \psi_n \cdot \xi_n \cdot |\sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2)|$$

Soit :

$$\| \vec{pm}_{2//n} \|_{R^n \text{ impair} > 2} = \left((O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)_{2D} \right)_{(\vec{v}_1; \vec{v}_2) \text{ conf} \{ \vec{e}_1; \vec{e}_2 \}} |\sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2)| \cdot \left| \frac{Det(\vec{v}_2; \vec{v}_1)}{R^2} \right|$$

Qui est un multiple d'objet carré de valeur 1

La mesure en valeur absolue d'un objet tridimensionnel dans une base $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ est donnée dans la base $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}'_4; \dots; \vec{e}'_n)$ d'un espace de dimension impaire supérieure ou égale à 3 . On a l'unique déterminant $Det_{3 \times 3}(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)$ car $(\vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1)$ sont confinés à $R^3 = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$:

$$\| \vec{pm}_{3//n} \|_{R^n \text{ impair} \geq 3} = \left((O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)_{3D} \right)_{(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3) \text{ conf} \{ \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3 \}} |a| \cdot \left| \frac{Det(\vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1)}{R^3} \right|$$

Avec les orthogonalités partielles :

$$\begin{aligned} a &= \psi_n \cdot \xi_n \cdot |\cos((O; \vec{e}_1), \vec{e}_1)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3)| \\ &\quad \left| \sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3), \vec{e}'_4) \right| \dots \left| \sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}'_3 \dots; \vec{e}'_{(n-1)}), \vec{e}'_n) \right| \\ &= \psi_n \cdot \xi_n \cdot |\sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3)| \end{aligned}$$

Soit :

$$\| \vec{pm}_{3//n} \|_{R^n \text{ impair} \geq 3} = \left((O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)_{3D} \right)_{(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3) \text{ conf} \{ \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3 \}} |\sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3)| \cdot \left| \frac{Det(\vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1)}{R^3} \right|$$

Qui est un multiple d'objet cubique de valeur 1

La mesure en valeur absolue d'un objet quadridimensionnel dans une base $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4)$ est donnée dans la base $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}'_5; \dots; \vec{e}'_n)$ d'un espace de dimension impaire supérieure ou égale à 5 . On a l'unique déterminant $Det_{4 \times 4}(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)$ car $(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)$ sont confinés à $R^4 = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4\}$:

$$\| \vec{pm}_{4//n} \|_{R^n \text{ impair} > 4} = \left((O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)_{4D} \right)_{(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4) \text{ conf} \{ \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4 \}} |a| \cdot \left| \frac{Det(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)}{R^4} \right|$$

Avec les orthogonalités partielles on trouve :

$$a = \psi_n \cdot \xi_n \cdot |\cos((O; \vec{e}_1), \vec{e}_1)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3), \vec{e}_4)|$$

Soit, avec $\cos((O; \vec{e}_1), \vec{e}_1) = 1$:

$$\| \overrightarrow{pm}_{4/n} \|_{R^{n \text{ impair} > 4}} = \left(\begin{matrix} O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2} \\ \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4} \end{matrix} \right)_{4D}^{(\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}) \text{conf} \{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4} \}}$$

$$| \sin((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_2}) | \cdot | \sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_3}) | \cdot | \sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}), \overrightarrow{e_4}) | \cdot \left| \frac{Det_{4 \times 4}(\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4})}{R^4} \right|$$

Qui est un multiple d'objet poymixial 4D « hypercubique » de valeur 1

La mesure en valeur absolue d'un objet pentadimensionnel dans une base $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e_5})$ est donnée dans la base $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e_5}; \overrightarrow{e'_6}; \dots; \overrightarrow{e'_n})$ d'un espace de dimension impaire supérieure ou égale à 5. On a l'unique déterminant $Det_{5 \times 5}(\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_5})$ car $(\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_5})$ sont confinés à $R^5 = \{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e_5}\}$:

On aboutit à :

$$\| \overrightarrow{pm}_{5/n} \|_{R^{n \text{ impair} \geq 5}} = \left(\begin{matrix} O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \\ \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_5} \end{matrix} \right)_{5D}^{(\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_5}) \text{conf} \{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e_5} \}}$$

$$| \sin((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_2}) | \cdot | \sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_3}) | \cdot | \sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}), \overrightarrow{e_4}) | \cdot | \sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}), \overrightarrow{e_5}) | \cdot \left| \frac{Det_{5 \times 5}(\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_5})}{R^5} \right|$$

Qui est un multiple d'unité poymixiale 5D hypercubique de valeur 1

Enfin, de manière générale, la mesure en valeur absolue d'un objet m dimensionnel dans une base $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \dots; \overrightarrow{e_m})$ est donnée dans la base $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \dots; \overrightarrow{e_m}; \overrightarrow{e'_{m+1}}; \dots; \overrightarrow{e'_n})$ d'un espace de dimension impaire supérieure ou égale à m . On a l'unique déterminant $Det_{m \times m}(\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \dots; \overrightarrow{v_m})$ car $(\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \dots; \overrightarrow{v_m})$ sont confinés à $R^m = \{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \dots; \overrightarrow{e_m}\}$:

$$\| \overrightarrow{pm}_{1/n} \|_{R^{n \text{ impair} \geq 1}} = \left(\begin{matrix} O; \overrightarrow{v_1} \end{matrix} \right)_{1D}^{(\overrightarrow{v_1}) \text{conf} \{ \overrightarrow{e_1} \}} \left| \frac{Det_{1 \times 1}(\overrightarrow{v_1})}{R^1} \right|$$

$$\| \overrightarrow{pm}_{(m \geq 2)/n} \|_{R^{n \text{ impair} \geq m}} = \left(\begin{matrix} O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \dots; \overrightarrow{v_m} \end{matrix} \right)_{mD}^{(\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \dots; \overrightarrow{v_m}) \text{conf} \{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \dots; \overrightarrow{e_m} \}}$$

$$\left| \prod_{\substack{s=2 \\ \text{à} \\ s=n}} \sin \left(\left(\begin{matrix} O; & \text{T} & \overrightarrow{e_r} \\ & r=1 & \\ & \text{à} & \\ & r=s-1 & \end{matrix} \right), \overrightarrow{e_s} \right) \right| \cdot \left| \frac{Det_{m \times m}(\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \dots; \overrightarrow{v_m})}{R^m} \right|$$

Qui est un multiple d'objet poymixial mD hypercubique de valeur 1

Note : je présente deux formules car je n'ai pas trouvé comment écrire de façon compréhensible $\sin((\vec{e}_1), \vec{e}_1)$ dans la formule pour les objets mD .

La validité de la formule suppose la conscience des libertés implicites qu'on a prises pour l'établir, et qui doivent être explicites dans sa palinodie.

5.8 Egalité de la norme de la forme analytique du vecteur polymixte envoûteur dans le repère $\{\vec{e}_i\}_m$ avec la norme de sa forme géométrique et ses mesures locales dans le repère, pour la géométrie de l'objet polymixial $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m)mD$

On a :

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{matrix} \overrightarrow{pm} \\ (m \geq 2)/n \\ R^n \text{ impair} \geq m \end{matrix} \right\| \begin{matrix} = \\ (O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m)mD \\ (\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m) \text{ conf} \{ \vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_m \} \end{matrix} \\ & \left| |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot |\vec{v}_3| \cdot \dots \cdot |\vec{v}_m| \cdot |\sin((O; \vec{v}_1), \vec{v}_2)| \cdot |\sin((O; \vec{v}_1; \vec{v}_2), \vec{v}_3)| \dots |\sin((O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_{m-1}), \vec{v}_m)| \right| \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{matrix} \overrightarrow{pm} \\ (m \geq 2)/n \\ R^n \text{ impair} \geq m \end{matrix} \right\| \begin{matrix} = \\ (O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m)mD \\ (\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m) \text{ conf} \{ \vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_m \} \end{matrix} \\ & \left| |\sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3)| \dots |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_{m-1}), \vec{e}_m)| \cdot \left| \text{Det}_{\begin{matrix} m \times m \\ R^m \end{matrix}} (\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m) \right| \right| \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} & \left| |\sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3)| \dots |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_{m-1}), \vec{e}_m)| \cdot \left| \text{Det}_{\begin{matrix} m \times m \\ R^m \end{matrix}} (\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m) \right| \right| \\ & = \\ & \left| |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot |\vec{v}_3| \cdot \dots \cdot |\vec{v}_m| \cdot |\sin((O; \vec{v}_1), \vec{v}_2)| \cdot |\sin((O; \vec{v}_1; \vec{v}_2), \vec{v}_3)| \dots |\sin((O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_{m-1}), \vec{v}_m)| \right| \end{aligned}$$

Pour des vecteurs non nuls, on conclut :

$\{\vec{e}_i\}_m$ étant famille libre, si $\{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_{j-1}; \vec{v}_j\}$ famille liée, alors :

$$\sin((O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_{j-1}), \vec{v}_j) = 0 \text{ et donc } \text{Det}_{\begin{matrix} m \times m \\ R^m \end{matrix}} (\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m) = 0$$

5.9 Vecteur produit mixte d'un objet 3D confiné à $R^{n \text{ impair}}$ dans $R^{n \text{ impair}}$

Le premier polymixte envoûteur est le nombre vectorisé $\overrightarrow{pm} = \overrightarrow{v_1}$. Le second polymixte envoûteur est le produit mixte $\overrightarrow{pm} = \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$. Le produit mixte en mD est une séquence dans tous les polymixtes $\overrightarrow{pm}$ $m/(n \text{ impair} \geq m)$ R^n .

Si $(\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3})$ prennent toutes les valeurs possibles de coordonnées dans $R^{n \text{ impair} \geq 3}$ on donne ci-dessous le produit mixte nD vue comme un envoûteur (en le démontrant dans les exemples de développements) :

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) \stackrel{(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}) \text{ 3D}}{\underset{(\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}) \in R^{n \text{ impair} \geq 3}}{=}} \\ & \psi_n \cdot \xi_n \cdot |\cos((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_1})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_2})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_3})| \\ & |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}), \overrightarrow{e_4})| \dots |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3} \dots; \overrightarrow{e_{(n-1)}}), \overrightarrow{e_n})| \\ & \cdot [(v_{3|(n-2)} \cdot (v_{2|(n-1)} \cdot v_{1|n} - v_{2|n} \cdot v_{1|(n-1)}) - v_{3|(n-1)} \cdot (v_{2|(n-2)} \cdot v_{1|n} - v_{2|n} \cdot v_{1|(n-2)}) \\ & + v_{3|n} \cdot (v_{2|(n-2)} \cdot v_{1|(n-1)} - v_{2|(n-1)} \cdot v_{1|(n-2)})) \\ & + \dots + \\ & + (v_{3|1} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2}) - v_{3|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1}) \\ & + v_{3|3} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}))] \cdot \frac{\overrightarrow{en\vec{v}}_{R^{n \text{ impair} \geq 3}}}{\left\| \overrightarrow{en\vec{v}}_{R^{n \text{ impair} \geq 3}} \right\|} \end{aligned}$$

Remarquons toutefois qu'il n'y a pas de conditions sur la parité de $n \geq 3$ si on ne le présente pas comme combiné linéairement avec un envoûteur.

On peut en donner une écriture synthétique dont la coordonnée est programmable informatiquement :

Pour $n = 1$, les produits vectoriels sont indéfinis car il n'y a pas assez de dimensions dans R^1 , par conséquent le produit mixte l'est aussi :

$$\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) \stackrel{(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}) \text{ 3D}}{\underset{(\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}) \in R^1}{=}} \psi_1 \cdot \xi_1 \cdot |\cos((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_1})| \cdot (\text{indéfini}) \cdot \frac{\overrightarrow{en\vec{v}}_{R^1}}{\left\| \overrightarrow{en\vec{v}}_{R^{n \text{ impair} \geq 3}} \right\|} = \text{indéfini}$$

Note : on conserve la mention de $|\cos((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_1})| = 1$ par désir informatif.

Pour n impair ≥ 3 :

$$\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) \stackrel{(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}) 3D}{\underset{(\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}) \in R^{n \text{ impair} \geq 3}}{=}} \psi_n \cdot \xi_n \cdot |\cos((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_1})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_2})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_3})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}), \overrightarrow{e_4})| \dots |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3} \dots; \overrightarrow{e_{(n-1)}}), \overrightarrow{e_n})|$$

$$\cdot \sum_{p=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-p} \left(\sum_{\substack{i \neq \{p; (p+k)\} \\ i \in [p; (p+k)] \Leftrightarrow c=1 \\ i \notin [p; (p+k)] \Leftrightarrow c=2}}^n (-1)^c \cdot (v_{3|i}) \cdot (v_{2|p} \cdot v_{1|(p+k)} - v_{2|(p+k)} \cdot v_{1|p}) \right) \right) \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{R^{n \text{ impair} \geq 3}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{R^{n \text{ impair} \geq 3}} \right\|}$$

Note : avec cette formule on prendra soin de réorganiser les termes qui sont ici dans le désordre, pour si on le veut distribuer $\frac{\overrightarrow{env}_{R^n}}{\left\| \overrightarrow{env}_{R^n} \right\|}$ sur les $\frac{n!}{(n-m)!m!}$ déterminants $m \times m$ formés sur la matrice des coordonnées de $\overrightarrow{v_m}, \dots, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}$ dans R^n .

5.10 Croissance des vecteurs polymixtes dans $\{\overrightarrow{e_i}\}m$ famille libre

On donne le détail des raisonnements pour toutes les configurations d'objets jusqu'à $m = 4 ; n = 7$. Ensuite, on étudie la croissance de $m = 5 ; n = 5$ jusqu'à $m = 5 ; n = 7$, seulement pour un objet $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_5})5D$, en appliquant le théorème qui dit que si l'objet $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_5})$ est de dimension inférieure à 5, son polymixte est soit vecteur nul, soit vecteur indéfini.

5.10a Croissance du vecteur polymixte dans $\{\overrightarrow{e_i}\}1 \cup \{\overrightarrow{e'_p}\}(n-1)$

Présentation des acteurs :

$\overrightarrow{v_1}$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\overrightarrow{e_1}\}$ et borné à une norme $\|\overrightarrow{v_1}\|$. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\overrightarrow{e_1}\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\overrightarrow{e_1}$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $R^1 = \{\overrightarrow{e_1}\}$ et borné à une norme 1. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\overrightarrow{e_1}\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\overrightarrow{e'_2}$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $R^1 = \{\overrightarrow{e'_2}\}$ et borné à une norme 1, orthogonal à tout autre vecteur de $\{\overrightarrow{e_i}\}1 \cup \{\overrightarrow{e'_p}\}(n-1)$. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\overrightarrow{e'_2}\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\overrightarrow{e'_3}$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $R^1 = \{\overrightarrow{e'_3}\}$ et borné à une norme 1, orthogonal à tout autre vecteur de $\{\overrightarrow{e'_i}\}1 \cup \{\overrightarrow{e'_p}\}(n-1)$. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\overrightarrow{e'_3}\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\overrightarrow{e'_4}$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $R^1 = \{\overrightarrow{e'_4}\}$ et borné à une norme 1, orthogonal à tout autre vecteur de $\{\overrightarrow{e'_i}\}1 \cup \{\overrightarrow{e'_p}\}(n-1)$. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\overrightarrow{e'_4}\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\overrightarrow{e'_5}$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $R^1 = \{\overrightarrow{e'_5}\}$ et borné à une norme 1, orthogonal à tout autre vecteur de $\{\overrightarrow{e'_i}\}1 \cup \{\overrightarrow{e'_p}\}(n-1)$. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\overrightarrow{e'_5}\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\overrightarrow{pm}_{1//1}^{R^1} = a. \text{Det}_{1X1}(\overrightarrow{v_1}). \frac{\overrightarrow{enp}_{\{\overrightarrow{e_1}\}}}{\|\overrightarrow{enp}_{\{\overrightarrow{e_1}\}}\|}$ vecteur polymixte envoûteur d'un objet polymixial 1D formé sur $\{\overrightarrow{e_1}\}$ et borné à une norme $\|\overrightarrow{v_1}\|$. C'est un vecteur qui peut changer d'aspect dans $\{\overrightarrow{e_1}\}$ quand il se compose avec un vecteur ordinaire.

$\overrightarrow{pm}_{1//2}^{R^2} = \overrightarrow{e'_2} \wedge \overrightarrow{v_1}$ vecteur polymixte ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e'_2}\}$ et borné à une norme $|\overrightarrow{e'_2} \wedge \overrightarrow{v_1}|$. C'est un vecteur qui est soit nul, soit indéfini dans $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e'_2}\}$ ou bien n'a qu'un seul aspect confiné à $\overrightarrow{e'_3}$ dans $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e'_2}; \overrightarrow{e'_3}\}$.

$\overrightarrow{pm}_{1//3}^{R^3} = \overrightarrow{e'_3} \boxtimes (\overrightarrow{e'_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$ vecteur polymixte envoûteur d'un objet polymixial 1D formé sur $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e'_2}; \overrightarrow{e'_3}\}$ et borné à une norme $|\overrightarrow{e'_3} \boxtimes (\overrightarrow{e'_2} \wedge \overrightarrow{v_1})|$. C'est un vecteur qui peut changer d'aspect dans $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e'_2}; \overrightarrow{e'_3}\}$ quand il se compose avec un vecteur ordinaire.

$\overrightarrow{pm}_{1//4}^{R^4} = \overrightarrow{e'_4} \wedge \overrightarrow{e'_3} \boxtimes (\overrightarrow{e'_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$ vecteur polymixte ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e'_2}; \overrightarrow{e'_3}; \overrightarrow{e'_4}\}$ et borné à une norme $|\overrightarrow{e'_4} \wedge \overrightarrow{e'_3} \boxtimes (\overrightarrow{e'_2} \wedge \overrightarrow{v_1})|$. C'est un vecteur qui est soit nul, soit indéfini dans $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e'_2}; \overrightarrow{e'_3}; \overrightarrow{e'_4}\}$ ou bien n'a qu'un seul aspect confiné à $\overrightarrow{e'_5}$ dans $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e'_2}; \overrightarrow{e'_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5}\}$

$\overrightarrow{pm}_{1//5}^{R^5} = \overrightarrow{e'_5} \boxtimes (\overrightarrow{e'_4} \wedge \overrightarrow{e'_3} \boxtimes (\overrightarrow{e'_2} \wedge \overrightarrow{v_1}))$ vecteur polymixte envoûteur d'un objet polymixial 1D formé sur $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e'_2}; \overrightarrow{e'_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5}\}$ et borné à une norme $|\overrightarrow{e'_5} \boxtimes (\overrightarrow{e'_4} \wedge \overrightarrow{e'_3} \boxtimes (\overrightarrow{e'_2} \wedge \overrightarrow{v_1}))|$. C'est un vecteur qui peut changer d'aspect dans $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e'_2}; \overrightarrow{e'_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5}\}$ quand il se compose avec un vecteur ordinaire.

Pour cette croissance, on pose que $\vec{v}_1$ est non nul. Si $\vec{v}_1$ est nul alors $\vec{e}'_2 \wedge \vec{v}_1$ est indéfini car on ne définit pas de produit vectoriel avec un vecteur nul (on ne le définit pas par un angle avec un vecteur nul). Par suite tous les polymixtes à partir de $\vec{pm}_{1/(n \geq 1)}^{R^n} = \vec{e}'_n (\wedge \boxtimes)^n \dots \wedge \vec{v}_1$ seraient aussi indéfinis.

On a :

$$\vec{v}_1(v_{1|1}, \vec{e}_1) \text{conf} \{ \vec{e}_1 \}$$

$$m = 1 ; n = 0$$

Il n'y a aucun vecteur $\vec{e}'_p$ et aucun vecteur $\vec{e}_i$. Le polymixte n'est pas défini dans $\{ \vec{e}_i \} 1 \cup \{ \vec{e}'_p \} (0 - 1) = \emptyset$, puisque dans cet ensemble il n'existe rien, pas même le vecteur nul.

$$\vec{pm}_{1//0}^{R^0} = \text{indéfini} \quad (O; \vec{v}_1) 0D$$

$$m = 1 ; n = 1$$

Le vecteur $\vec{v}_1$ est confiné à la famille $\{ \vec{e}_1 \}$ qui est libre et base de R^1 . Le repère $(O; \vec{e}_1)$ est 1D. Le vecteur $\vec{e}'_2$ est orthogonal à chacun des vecteurs de $\{ \vec{e}_1; \vec{v}_1 \}$ et $\vec{v}_1$ est libre dans une droite. On a alors dans R^2 une seule occurrence :

$\vec{pm}_{1//1}^{R^1}$ est défini comme polymixte envoûteur d'un objet polymixial 1D formé sur $\{ \vec{e}_1 \}$ et borné à une norme $|v_{1|1}|$.

$$\vec{pm}_{1//1}^{R^1} = \frac{a \cdot \text{Det}(\vec{v}_1)}{v_1 \text{conf} \{ \vec{e}_1 \}} \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{\{ \vec{e}_1 \}}}{\left| \overrightarrow{env}_{\{ \vec{e}_1 \}} \right|} ; a \text{ réduit} = \psi_1 \cdot \xi_1$$

$$a \text{ complet} = \psi_1 \cdot \xi_1 \cdot |\cos((O; \vec{e}_1), \vec{e}_1)|$$

Note : l'équation du premier des polymixtes semble abrupte et c'est normal, puisque sa formulation provient de raisonnements sur l'ensemble des polymixtes. On aurait pu commencer aussi en disant que $\vec{pm}_{1//1}^{R^1}$ est égal à lui-même.

L'orientation de la droite est fixée par l'opérateur à $\psi_1 = 1$ ou $\psi_1 = -1$. L'orientation de l'objet $(O; \vec{e}_1)$ est fixée par l'opérateur à $\xi_1 = 1$ ou $\xi_1 = -1$. On a $\cos((O; \vec{e}_1), \vec{e}_1) = 1$. Si $\psi_1 \cdot \xi_1 = 1$ la droite et l'objet ont même orientation. Si $\psi_1 \cdot \xi_1 = -1$ la droite et l'objet sont d'orientations contraires.

On choisit $\vec{E}_1$ tel que $\psi_1 \cdot \xi_1 \cdot \vec{E}_1 = \vec{e}_1$:

$$\vec{pm}_{1//1}^{R^1} = \frac{\psi_1 \cdot \xi_1 \cdot \text{Det}(\vec{v}_1)}{v_1 \text{conf} \{ \vec{e}_1 \}} \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{\{ \vec{e}_1 \}}}{\left| \overrightarrow{env}_{\{ \vec{e}_1 \}} \right|} = v_{1|1} \cdot \psi_1 \cdot \xi_1 \cdot \vec{E}_1 = v_{1|1} \cdot \vec{e}_1 = \vec{v}_1$$

Sa coordonnée dans le repère $(O; \frac{\overrightarrow{en\vec{v}}}{\|\overrightarrow{en\vec{v}}\|_{\{\vec{e}_1\}}})$ unidimensionnel occupant virtuellement tout R^1 avec une norme 1 est la mesure orientée d'un objet 1D (longueur orientée) dans R^1 . Le polymixte envoûteur $\overrightarrow{pm}_{1//1}^{1/1}$ occupe virtuellement un objet polymixial 1D avec une norme $\|\overrightarrow{pm}_{1//1}^{1/1}\| = |v_{1|1}|$. Pratiquement parlant, il est égal à $\overrightarrow{v}_1$.

Cet objet est mesuré en multiples d'objet polymixial segment de valeur 1

Note : on n'a pas besoin des considérations suivantes dans l'espace euclidien mais on peut distribuer $\frac{\overrightarrow{en\vec{v}}}{\|\overrightarrow{en\vec{v}}\|_{\{\vec{e}_1\}}}$ en une combinaison de $\frac{1!}{(1-1)!1!} = 1$ vecteur envoûteur $\overrightarrow{E}_1$ dans la matrice de une coordonnée $M_{1 \times 1}(\overrightarrow{v}_1)$ définies dans $R^1 = \{\vec{e}_1\}$. On retrouve la liberté de choix d'un sens d'orientation du vecteur $\overrightarrow{v}_1$ dans un repère $(O; \vec{e}_1)$ de R^1 , idée première et intuitive de la géométrie analytique :

$$\text{longueur orientée de } \overrightarrow{v}_1 \text{ dans } (O; \vec{e}_1) = v_{1|1}$$

$m = 1; n = 2$

Le vecteur $\overrightarrow{v}_1$ est confiné à la famille $\{\vec{e}_1\}$ qui est libre et base de R^1 . Le repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}'_2)$ est 2D. Le vecteur $\vec{e}'_2$ est orthogonal à chacun des vecteurs de $\{\vec{e}_1; \overrightarrow{v}_1\}$ et $\overrightarrow{v}_1$ est libre dans une droite. On a alors dans R^2 une seule occurrence :

Il n'y a pas assez de dimensions dans R^2 pour définir un produit vectoriel de vecteurs non colinéaires qui serait simultanément orthogonal à $\vec{e}'_2$ et à $\overrightarrow{v}_1$.

On ne définit donc pas le polymixte ordinaire :

$$\overrightarrow{pm}_{1//2}^{1/2} = \frac{\overrightarrow{e}'_2 \perp (O; \overrightarrow{v}_1)}{\overrightarrow{v}_1 \text{ conf } \{\vec{e}_1\}} = \text{indéfini}$$

Note : Plus exactement, l'objet $(O; \vec{e}'_2; \overrightarrow{v}_1; \overrightarrow{pm}_{1//2}^{1/2})$ ne peut pas être contenu dans R^2 . Pour éviter les confusions, on n'écrit pas $\overrightarrow{pm}_{1//1}^{1/1} = \overrightarrow{v}_1$, car ici $\overrightarrow{v}_1$ n'est pas un polymixte mais est une séquence du polymixte $\overrightarrow{pm}_{1//2}^{1/2}$.

$m = 1; n = 3$

Le vecteur $\overrightarrow{v}_1$ est confiné à la famille $\{\vec{e}_1\}$ qui est libre et base de R^1 . Le repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}'_2; \vec{e}'_3)$ est 3D. Le vecteur $\vec{e}'_3$ est orthogonal à chacun des vecteurs de $\{\vec{e}_1; \vec{e}'_2; \overrightarrow{v}_1\}$ et $\overrightarrow{v}_1$ est libre dans une droite. On a alors dans R^3 une seule occurrence :

Il y a assez de dimensions dans R^3 pour définir la séquence $\overrightarrow{e'_2} \wedge \overrightarrow{v_1}$ qui forme un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{e'_2}$ et à $\overrightarrow{v_1}$. On conclut donc que la séquence $\overrightarrow{e'_2} \wedge \overrightarrow{v_1}$ est confinée à $\overrightarrow{e'_3}$.

On a le repère $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e'_2}; \overrightarrow{e'_3})$ tridimensionnel. On choisit librement dans cet espace 3D la valeur d'opérateur $\psi_3 = 1$ ou $\psi_3 = -1$ pour y caractériser l'orientation directe ou indirecte du produit vectoriel. Si une valeur est choisie pour une des deux orientations, la valeur contraire s'applique à l'orientation contraire.

On choisit la valeur d'opérateur ξ_3 pour caractériser l'orientation directoïde ou indirectoïde du repère 3D $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e'_2}; \overrightarrow{e'_3})$ en accord avec la valeur choisie pour ψ_3 . Si l'objet est directoïde, alors ξ_3 est du signe qu'on a choisi pour ψ_3 qui caractérise l'orientation directe du produit vectoriel dans l'espace 3D. Si l'objet est indirectoïde, alors ξ_3 est du signe contraire à celui qu'on a choisi pour ψ_3 qui caractérise l'orientation directe du produit vectoriel dans l'espace 3D.

On a, avec $((O; \overrightarrow{e_1}); \overrightarrow{e'_2})$ angle droit :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{e'_2} \wedge \overrightarrow{e_1} &= (e'_2 e_1)_{|1} \cdot \overrightarrow{e_1} + (e'_2 e_1)_{|2} \cdot \overrightarrow{e'_2} + (e'_2 e_1)_{|3} \cdot \overrightarrow{e'_3} \\ &= 0 \cdot \overrightarrow{e_1} + 0 \cdot \overrightarrow{e'_2} + \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\cos((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_1})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}); \overrightarrow{e'_2})| \cdot \overrightarrow{e'_3} \end{aligned}$$

Avec $Det_{1 \times 1}(\overrightarrow{v_1}) = v_{1|1}$, déterminant d'un vecteur d'une matrice 1 ligne 1 colonne, on écrit donc :

$$\left(\overrightarrow{e'_2} \wedge \overrightarrow{v_1} \right)_{\substack{\overrightarrow{e'_3} \perp (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{e'_2}) \\ \overrightarrow{v_1} \text{ conf } \{ \overrightarrow{e_1} \} \\ (O; \overrightarrow{v_1}) 1D}} = v_{1|1} \cdot (\overrightarrow{e'_2} \wedge \overrightarrow{e_1}) = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\cos((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_1})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}); \overrightarrow{e'_2})| \cdot Det_{1 \times 1}(\overrightarrow{v_1}) \cdot \overrightarrow{e'_3}$$

On allège en symbolisant la constante a dans sa forme complète avec $|\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e'_2}), \overrightarrow{e'_3})| = 1$

$$a \text{ complet} = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\cos((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_1})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}); \overrightarrow{e'_2})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e'_2}), \overrightarrow{e'_3})|$$

Note : $Det_{m \times m}(\overrightarrow{v_m}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})$ sera toujours le déterminant d'une matrice carrée m lignes m colonnes de coordonnées construites sur $\{ \overrightarrow{e_i} \}_m$. De même $Det_{n \times n}(\overrightarrow{e'_n}; \dots; \overrightarrow{e'_{(m+1)}}; \overrightarrow{v_m}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})$ sera toujours le déterminant d'une matrice carrée n lignes n colonnes de coordonnées construites sur $\{ \overrightarrow{e_i} \}_m \cup \{ \overrightarrow{e'_i} \}_{(n-m)}$. Les deux déterminants sont reliés par un signe dépendant de l'indice n (voir en annexe « calcul du déterminant $n \times n$ »). L'intérêt de noter $Det_{m \times m}$ avec une baseline est, dans notre étude, de bien distinguer un ensemble de coordonnées variables parmi un ensemble de valeurs 0 et 1 dessinées en diagonale qui sont invariables :

$$Det(\overrightarrow{e'_n}; \dots; \overrightarrow{e'_{(m+1)}}; \overrightarrow{v_m}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & v_{m|1} & \dots & v_{2|1} & v_{1|1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & v_{m|2} & \dots & v_{2|2} & v_{1|2} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & v_{m|3} & \dots & v_{2|3} & v_{1|3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & v_{m|m} & \dots & v_{2|m} & v_{1|m} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \pm Det(\overrightarrow{v_m}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})$$

Et ensuite on donne le polymixte $\overrightarrow{pm}_{1//3}$ qui est donc un envoûteur d'un objet polymixial 1D formé sur $R^3 = \{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e'_2}; \overrightarrow{e'_3}\}$, il occupe toutes les directions de R^3 , chaque direction ayant 2 sens, et est borné à une norme :

$$\overrightarrow{pm}_{1//3} = \overrightarrow{e'_3} \boxtimes (\overrightarrow{e'_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) = (\overrightarrow{e'_3} \boxtimes (\overrightarrow{e'_2} \wedge \overrightarrow{v_1})) \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e'_2}; \overrightarrow{e'_3}\}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e'_2}; \overrightarrow{e'_3}\}} \right\|}$$

$$\overrightarrow{pm}_{1//3} = \left[a \cdot \text{Det}(\overrightarrow{v_1}) \cdot \overrightarrow{e'_3} \boxtimes \overrightarrow{e'_3} \right] \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e'_2}; \overrightarrow{e'_3}\}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e'_2}; \overrightarrow{e'_3}\}} \right\|}$$

Soit :

$$\overrightarrow{pm}_{1//3} = a \cdot \text{Det}(\overrightarrow{v_1}) \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e'_2}; \overrightarrow{e'_3}\}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e'_2}; \overrightarrow{e'_3}\}} \right\|} ; a \text{ réduit} = \psi_3 \cdot \xi_3$$

$$a \text{ complet} = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\cos((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_1})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}); \overrightarrow{e'_2})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e'_2}), \overrightarrow{e'_3})|$$

Sa coordonnée dans le repère $(O; \frac{\overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e'_2}; \overrightarrow{e'_3}\}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e'_2}; \overrightarrow{e'_3}\}} \right\|})$ unidimensionnel occupant virtuellement tout R^3 avec une

norme 1 est la mesure orientée d'un objet 1D (longueur orientée) dans R^3 . C'est en valeur absolue la même mesure que dans R^1

Le polymixte envoûteur $\overrightarrow{pm}_{1//3}$ occupe virtuellement tout R^3 avec une norme $\|\overrightarrow{pm}_{1//3}\| = |v_{1|1}|$. Pratiquement

parlant, il envoûte l'objet polymixial 1D de norme $|v_{1|1}|$ dans le repère $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e'_2}; \overrightarrow{e'_3})$.

Cet objet est mesuré en multiples d'objet polymixial segment de valeur 1.

Note : on n'a pas besoin des considérations suivantes dans l'espace euclidien mais on peut distribuer $\frac{\overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e'_2}; \overrightarrow{e'_3}\}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e'_2}; \overrightarrow{e'_3}\}} \right\|}$

en une combinaison de $\frac{3!}{(3-1)!1!} = 3$ vecteurs envoûteurs $\overrightarrow{E_p} = \{\overrightarrow{E_1}; \overrightarrow{E_2}; \overrightarrow{E_3}\}$ dans la matrice des coordonnées $M(\overrightarrow{v_1})$ définies dans R^3 . On identifie dans cette matrice (en supprimant chaque fois une des 3 lignes de coordonnées) 3 déterminants $\text{Det}(\overrightarrow{v_1})$ de 1 colonne et 1 ligne, sur lesquels on peut greffer $\{\overrightarrow{E_1}; \overrightarrow{E_2}; \overrightarrow{E_3}\}$ comme des vecteurs envoûteurs formés des combinaisons linéaires que l'on veut dans $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e'_2}; \overrightarrow{e'_3}\}$ lorsqu'ils se

composent avec un des vecteurs de $\{\vec{e}_1; \vec{e}'_2; \vec{e}'_3\}$. Mais comme $v_{1|2}=v_{1|3}=0$, puisque $\vec{v}_1$ est confiné à $\vec{e}_1$, il n'y a qu'une seule partie pouvant ne pas être vide (ou nulle), et on a donc :

$$Det_{1 \times 1}(\vec{v}_1) \cdot \frac{\overrightarrow{en\vec{v}}_{\{\vec{e}_1; \vec{e}'_2; \vec{e}'_3\}}}{\left\| \overrightarrow{en\vec{v}}_{\{\vec{e}_1; \vec{e}'_2; \vec{e}'_3\}} \right\|} = Det_{1 \times 1}(\vec{v}_1) \cdot \vec{E}_1 + 0 \cdot \vec{E}_2 + 0 \cdot \vec{E}_3$$

Soit :

$$\overrightarrow{pm}_{\frac{1}{\sqrt{3}} \vec{e}'_3 \perp (O; \vec{v}_1; \vec{e}'_2)} = \overrightarrow{pm}_{\frac{(O; \vec{v}_1) 1D}{\vec{v}_1 \text{ conf } \{\vec{e}_1\}}} = v_{1|1} \cdot \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot \vec{E}_1$$

Si on fixe $\psi_3, \xi_3 \cdot \vec{E}_1 = \vec{e}_1$ on retrouve la liberté de choix d'un sens d'orientation du vecteur $\vec{v}_1$ dans un repère $(O; \vec{e}_1)$ de R^1 .

$m = 1$; $n = 4$

Le vecteur $\vec{v}_1$ est confiné à la famille $\{\vec{e}_1\}$ qui est libre et base de R^1 . Le repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}'_2; \vec{e}'_3; \vec{e}'_4)$ est 4D. Le vecteur $\vec{e}'_4$ est orthogonal à chacun des vecteurs de $\{\vec{e}_1; \vec{e}'_2; \vec{e}'_3; \vec{v}_1\}$ et $\vec{v}_1$ est libre dans une droite. On a alors dans R^4 une seule occurrence :

Il n'y a pas assez de dimensions dans R^4 pour définir un produit vectoriel de vecteurs non liés qui serait simultanément orthogonal à $\vec{e}'_4$ et à tous les vecteurs de R^3 bornés par une même norme $\|\overrightarrow{e'_3 \boxtimes (\vec{e}'_2 \wedge \vec{v}_1)}\|$ puisque la séquence $\overrightarrow{e'_3 \boxtimes (\vec{e}'_2 \wedge \vec{v}_1)}$ est vecteur envoûteur d'un objet polymixial 3D formé sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}'_2; \vec{e}'_3\}$.

On ne définit donc pas le polymixte ordinaire :

$$\overrightarrow{pm}_{\frac{1}{\sqrt{4}} \vec{e}'_4 \perp (O; \vec{v}_1; \vec{e}'_2; \vec{e}'_3)} = \overrightarrow{e'_4 \wedge (\overrightarrow{e'_3 \boxtimes (\vec{e}'_2 \wedge \vec{v}_1)})} = \text{indéfini}$$

Note : en effet, $\overrightarrow{pm}_{\frac{1}{\sqrt{4}}}$ doit être orthogonal à chacun des vecteurs de la base $\{\vec{e}_1; \vec{e}'_2; \vec{e}'_3; \vec{e}'_4\}$. Dans R^4 , tout vecteur orthogonal à un des vecteurs de cette famille ne peut pas être orthogonal à chaque vecteur de cette famille, $\overrightarrow{pm}_{\frac{1}{\sqrt{4}}}$ ne peut donc pas être défini dans R^4 , même si R^4 était formé sur une base quelconque.

$\overrightarrow{pm}_{\frac{1}{\sqrt{4}}}$
 On a l'analogie dans R^2 base quelconque : il est impossible de situer dans R^2 un vecteur orthogonal aux deux vecteurs de base de R^2 , mais il est possible de le situer dans R^3 base quelconque.

$$\psi_5 \cdot \xi_5 \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}'_2; \vec{e}'_3), \vec{e}'_4)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}'_2; \vec{e}'_3; \vec{e}'_4), \vec{e}'_5)| \cdot \vec{e}'_5$$

On allège en symbolisant la constante a dans sa forme complète :

$$a \text{ complet} = \psi_5 \cdot \xi_5 \cdot |\cos((O; \vec{e}_1), \vec{e}_1)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}'_2)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}'_2), \vec{e}'_3)| \\ \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}'_2; \vec{e}'_3), \vec{e}'_4)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}'_2; \vec{e}'_3; \vec{e}'_4), \vec{e}'_5)|$$

Par suite :

$$\vec{e}'_4 \wedge \left(\overrightarrow{e'_3 \boxtimes (e'_2 \wedge \vec{v}_1)} \right) \xrightarrow[\substack{(O; \vec{v}_1) 1D \\ \vec{v}_1 \text{ conf} \{ \vec{e}_1 \}}]{\substack{\vec{e}'_5 \perp (O; \vec{v}_1; \vec{e}'_2; \vec{e}'_3; \vec{e}'_4)}}} = a \cdot \text{Det}_{1 \times 1}(\vec{v}_1) \cdot \vec{e}'_5$$

Et ensuite on donne le polymixte envoûteur $\overrightarrow{pm}_{1/5}^{R^5}$ qui est donc un envoûteur d'un objet polymixial 1D formé

sur $R^5 = \{ \vec{e}_1; \vec{e}'_2; \vec{e}'_3; \vec{e}'_4; \vec{e}'_5 \}$, il occupe toutes les directions de R^5 , chaque direction ayant 2 sens, et est borné à une norme :

$$\overrightarrow{pm}_{1/5}^{R^5} \xrightarrow[\substack{(O; \vec{v}_1) 1D \\ \vec{v}_1 \text{ conf} \{ \vec{e}_1 \}}]{\substack{\vec{e}'_5 \perp (O; \vec{v}_1; \vec{e}'_2; \vec{e}'_3; \vec{e}'_4)}}} = \overrightarrow{e'_5 \boxtimes (e'_4 \wedge \left(\overrightarrow{e'_3 \boxtimes (e'_2 \wedge \vec{v}_1)} \right))} \\ \overrightarrow{pm}_{1/5}^{R^5} \xrightarrow[\substack{(O; \vec{v}_1) 1D \\ \vec{v}_1 \text{ conf} \{ \vec{e}_1 \}}]{\substack{\vec{e}'_5 \perp (O; \vec{v}_1; \vec{e}'_2; \vec{e}'_3; \vec{e}'_4)}}} = \left[a \cdot \text{Det}_{1 \times 1}(\vec{v}_1) \cdot \vec{e}'_5 \boxtimes \vec{e}'_5 \right] \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{\{ \vec{e}_1; \vec{e}'_2; \vec{e}'_3; \vec{e}'_4; \vec{e}'_5 \}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{\{ \vec{e}_1; \vec{e}'_2; \vec{e}'_3; \vec{e}'_4; \vec{e}'_5 \}} \right\|}$$

Donc :

$$\overrightarrow{pm}_{1/5}^{R^5} \xrightarrow[\substack{(O; \vec{v}_1) 1D \\ \vec{v}_1 \text{ conf} \{ \vec{e}_1 \}}]{\substack{\vec{e}'_5 \perp (O; \vec{v}_1; \vec{e}'_2; \vec{e}'_3; \vec{e}'_4)}}} = a \cdot \text{Det}_{1 \times 1}(\vec{v}_1) \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{\{ \vec{e}_1; \vec{e}'_2; \vec{e}'_3; \vec{e}'_4; \vec{e}'_5 \}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{\{ \vec{e}_1; \vec{e}'_2; \vec{e}'_3; \vec{e}'_4; \vec{e}'_5 \}} \right\|} ; a \text{ réduit} = \psi_5 \cdot \xi_5$$

$$a \text{ complet} = \psi_5 \cdot \xi_5 \cdot |\cos((O; \vec{e}_1), \vec{e}_1)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}'_2)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}'_2), \vec{e}'_3)| \\ \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}'_2; \vec{e}'_3), \vec{e}'_4)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}'_2; \vec{e}'_3; \vec{e}'_4), \vec{e}'_5)|$$

Sa coordonnée dans le repère $(O; \frac{\overrightarrow{env}_{\{ \vec{e}_1; \vec{e}'_2; \vec{e}'_3; \vec{e}'_4; \vec{e}'_5 \}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{\{ \vec{e}_1; \vec{e}'_2; \vec{e}'_3; \vec{e}'_4; \vec{e}'_5 \}} \right\|})$ unidimensionnel occupant virtuellement tout R^5 avec

une norme 1 est la mesure orientée d'un objet 1D (longueur orientée) dans R^5 . C'est en valeur absolue la même mesure que dans R^3 , R^1 . Le polymixte envoûteur $\overrightarrow{pm}_{1/5}^{R^5}$ occupe virtuellement tout R^5 avec une norme

$||\overrightarrow{pm}_{1/5}|| = |v_{1|1}|$. Pratiquement parlant, il envoûte l'objet polymixial 1D de norme $|v_{1|1}|$ dans le repère R^5 $(0; \overrightarrow{e'_1}; \overrightarrow{e'_2}; \overrightarrow{e'_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5})$.

Cet objet est mesuré en multiples d'objet polymixial segment de valeur 1.

Conclusion pour $m = 1$; $n > 1$ et $(0; \overrightarrow{v_1})1D$

On poursuit :

$$\overrightarrow{pm}_{1/6} = \overrightarrow{e'_6} \wedge (\overrightarrow{e'_5} \boxtimes (\overrightarrow{e'_4} \wedge (\overrightarrow{e'_3} \boxtimes (\overrightarrow{e'_2} \wedge \overrightarrow{v_1})))) = \text{indéfini}$$

$$\overrightarrow{pm}_{1/7} = \overrightarrow{e'_7} \boxtimes (\overrightarrow{e'_6} \wedge (\overrightarrow{e'_5} \boxtimes (\overrightarrow{e'_4} \wedge (\overrightarrow{e'_3} \boxtimes (\overrightarrow{e'_2} \wedge \overrightarrow{v_1})))))) = a. Det_{1 \times 1}(\overrightarrow{v_1}). \frac{\overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e'_1}; \overrightarrow{e'_2}; \overrightarrow{e'_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5}; \overrightarrow{e'_6}; \overrightarrow{e'_7}\}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e'_1}; \overrightarrow{e'_2}; \overrightarrow{e'_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5}; \overrightarrow{e'_6}; \overrightarrow{e'_7}\}} \right\|}$$

Et ainsi de suite un objet défini dans la croissance des n impairs.

On peut donc conclure pour $\overrightarrow{v_1} \neq \vec{0}$ et pour des polymixtes définis sur des objets 1D :

$$\overrightarrow{pm}_{1/(n \text{ pair} > 1)} = \text{indéfini}$$

$$\overrightarrow{pm}_{1/(n \text{ impair} \geq 1)} = a. Det_{1 \times 1}(\overrightarrow{v_1}). \frac{\overrightarrow{env}_{R^n}}{\left\| \overrightarrow{env}_{R^n} \right\|} ; a \text{ réduit} = \psi_n \cdot \xi_n$$

$$a \text{ complet} =$$

$$\psi_n \cdot \xi_n \cdot |cos((0; \overrightarrow{e'_1}), \overrightarrow{e'_1})| \cdot |sin((0; \overrightarrow{e'_1}), \overrightarrow{e'_2})| \cdot |sin((0; \overrightarrow{e'_1}; \overrightarrow{e'_2}), \overrightarrow{e'_3})| \dots |sin((0; \overrightarrow{e'_1}; \overrightarrow{e'_2}; \overrightarrow{e'_3}; \dots; \overrightarrow{e'_{n-1}}), \overrightarrow{e'_n})|$$

5.10b Croissance du vecteur polymixte dans $\{\overrightarrow{e'_i}\}2U\{\overrightarrow{e'_p}\}(n-2)$

Présentation des acteurs :

$\overrightarrow{v_1}$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\overrightarrow{e'_1}; \overrightarrow{e'_2}\}$ et borné à une norme $||\overrightarrow{v_1}||$. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\overrightarrow{e'_1}; \overrightarrow{e'_2}\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\overrightarrow{v_2}$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\overrightarrow{e'_1}; \overrightarrow{e'_2}\}$ et borné à une norme $||\overrightarrow{v_2}||$. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\overrightarrow{e'_1}; \overrightarrow{e'_2}\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\vec{e}_1$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\vec{e}_1\}$ et borné à une norme 1. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\vec{e}_1\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\vec{e}_2$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\vec{e}_2\}$ et borné à une norme 1. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\vec{e}_2\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\vec{e}'_3$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\vec{e}'_3\}$ et borné à une norme 1, orthogonal à tout autre vecteur de $\{\vec{e}_i\} \cup \{\vec{e}'_p\} (n-2)$. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\vec{e}'_3\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\vec{e}'_4$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\vec{e}'_4\}$ et borné à une norme 1, orthogonal à tout autre vecteur de $\{\vec{e}_i\} \cup \{\vec{e}'_p\} (n-2)$. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\vec{e}'_4\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\vec{e}'_5$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\vec{e}'_5\}$ et borné à une norme 1, orthogonal à tout autre vecteur de $\{\vec{e}_i\} \cup \{\vec{e}'_p\} (n-2)$. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\vec{e}'_5\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\vec{pm}_{2//2} = \vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1$ vecteur polymixte ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$ et borné à une norme $\|\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1\|$. C'est un vecteur qui est soit nul, soit indéfini dans $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$ ou bien n'a qu'un seul aspect confiné à $\vec{e}'_3$ dans $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}'_3\}$.

$\vec{pm}_{2//3} = \vec{e}'_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)$ vecteur polymixte envoûteur d'un objet polymixial 2D formé sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}'_3\}$ et borné à une norme $|\vec{e}'_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)|$. C'est un vecteur qui peut changer d'aspect dans $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}'_3\}$ quand il se compose avec un vecteur ordinaire.

$\vec{pm}_{2//4} = \vec{e}'_4 \wedge \vec{e}'_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)$ vecteur polymixte ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}'_3; \vec{e}'_4\}$ et borné à une norme $|\vec{e}'_4 \wedge \vec{e}'_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)|$. C'est un vecteur qui est soit nul, soit indéfini dans $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}'_3; \vec{e}'_4\}$ ou bien n'a qu'un seul aspect confiné à $\vec{e}'_5$ dans $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}'_3; \vec{e}'_4; \vec{e}'_5\}$

$\vec{pm}_{2//5} = \vec{e}'_5 \boxtimes (\vec{e}'_4 \wedge \vec{e}'_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1))$ vecteur polymixte envoûteur d'un objet polymixial 2D formé sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}'_3; \vec{e}'_4; \vec{e}'_5\}$ et borné à une norme $|\vec{e}'_5 \boxtimes (\vec{e}'_4 \wedge \vec{e}'_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1))|$. C'est un vecteur qui peut changer d'aspect dans $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}'_3; \vec{e}'_4; \vec{e}'_5\}$ quand il se compose avec un vecteur ordinaire.

Pour cette croissance, on pose que chacun des vecteurs de la famille $\{\vec{v}_2; \vec{v}_1\}$ est non nul. Si l'un de ces vecteurs est nul alors $\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1$ est indéfini car on ne définit pas de produit vectoriel avec un vecteur nul (on ne le définit pas par un angle avec un vecteur nul).

Par suite tous les polymixtes à partir de $\overrightarrow{pm}_{2/(n \geq 3)}^{R^n} = \overrightarrow{e'_n} (\wedge \boxtimes)^n \dots \overrightarrow{e'_3} \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)$ seraient aussi indéfinis.

On a :

$$\begin{aligned} \vec{v}_1(v_{1|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{1|2} \cdot \vec{e}_2) \text{conf} \{ \vec{e}_1; \vec{e}_2 \} \\ \vec{v}_2(v_{2|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{2|2} \cdot \vec{e}_2) \text{conf} \{ \vec{e}_1; \vec{e}_2 \} \end{aligned}$$

$m = 2 ; n = 0$

Il n'y a aucun vecteur $\overrightarrow{e'_p}$ et aucun vecteur $\vec{e}_i$. Le polymixte n'est pas défini dans $\{\vec{e}_i\}^2 \cup \{\overrightarrow{e'_p}\} (0 - 2) = \emptyset$, puisque dans cet ensemble il n'existe rien, pas même le vecteur nul.

$$\overrightarrow{pm}_{2/0}^{R^0} (O; \vec{v}_1; \vec{v}_2) 0D = \text{indéfini}$$

$m = 2 ; n = 1$

Les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sont confinés à la famille $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$ qui est liée et génère R^1 . Il n'y a aucun vecteur $\overrightarrow{e'_i}$ et $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont alors obligatoirement liés dans une droite. Il n'existe pas suffisamment de dimensions dans R^1 pour définir un vecteur nul orthogonal à $\vec{v}_1$ et à $\vec{v}_2$. Le polymixte ordinaire est donc indéfini :

$$\overrightarrow{pm}_{2/1}^{R^1} = \vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1 = \text{indéfini}$$

$$\begin{matrix} \{\vec{v}_2, \vec{v}_1\} \text{conf} \{ \vec{e}_1; \vec{e}_2 \} \\ (O; \vec{v}_1; \vec{v}_2) 1D \end{matrix}$$

Conclusion

On conclut que si l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)$ est de dimension égale à 1, $\overrightarrow{pm}_{2/1}^{R^1}$ n'est pas défini. Les vecteurs

ordinaires $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont liés.

$m = 2 ; n = 2$

Les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sont confinés à la famille $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$ qui est libre et base de R^2 . Il n'y a aucun vecteur $\overrightarrow{e'_i}$ et $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sont libres dans un plan ou liés dans une droite. On a alors dans R^2 deux occurrences :

1) Si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2) 1D$, $\vec{v}_2$ forme un angle plat avec l'objet $(O; \vec{v}_1)$ réduit au vecteur $\vec{v}_1$, il y a assez de dimensions dans R^2 pour définir un produit vectoriel de vecteurs colinéaires qui serait simultanément orthogonal à $\vec{v}_1$ et à $\vec{v}_2$. Le polymixte ordinaire est donc défini :

$$\overrightarrow{pm}_{2/2}^{R^2} = \vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1 = \vec{0}$$

$$\begin{matrix} \{\vec{v}_2, \vec{v}_1\} \text{conf} \{ \vec{e}_1; \vec{e}_2 \} \\ (O; \vec{v}_1; \vec{v}_2) 1D \end{matrix}$$

Note : $\vec{v}_2$ est dans le même espace de dimension 1 que $\vec{v}_1$ par l'angle plat qu'il forme avec tous les vecteurs de l'objet $(O; \vec{v}_1)$. $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_1$ sont définis classiquement comme liés. Plus généralement, on pose que si $\vec{v}_n$ est dans

le même espace que l'envoûteur $\vec{e}$ d'un espace $R^n = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_n\}$ alors on a la séquence :

$$\vec{v}_2 \wedge \vec{e} = \vec{0}.$$

$\{\vec{v}_2, \vec{e}\} \text{conf} \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_n\}$
 $(O; \vec{e}; \vec{v}_2)_{nD}$

Conclusion

On conclut que si l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)$ est de dimension égale à 1, $\overrightarrow{pm}_{2//2}^{R^2}$ est défini nul . Les vecteurs ordinaires

$\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont liés.

2) Si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)_{2D}$, $\vec{v}_2$ forme un angle non nul avec l'objet $(O; \vec{v}_1)$ réduit au vecteur $\vec{v}_1$, il n'y a pas assez de dimensions dans R^2 pour définir un produit vectoriel de vecteurs non colinéaires qui serait simultanément orthogonal à $\vec{v}_1$ et à $\vec{v}_2$. Le polymixte ordinaire est donc indéfini :

$$\overrightarrow{pm}_{2//2}^{R^2} = \vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1 = \text{indéfini}$$

$\{\vec{v}_2, \vec{v}_1\} \text{conf} \{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$
 $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)_{2D}$

Note : $\vec{v}_2$ s'élève donc au-dessus de l'objet $(O; \vec{v}_1)$ (ou inversement $\vec{v}_1$ s'élève au-dessus de l'objet $(O; \vec{v}_2)$). Cette élévation actualise un espace de dimension supérieure. La propriété géométrique de l'élévation, qui image aussi la propriété de déterminant nul pour des vecteurs liés ou non nul pour des vecteurs libres, est que le vecteur qui s'élève au-dessus de l'objet ne peut pas former d'angle plat avec un vecteur combinaison linéaire des vecteurs de l'objet.

Conclusion

On conclut que si l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)$ est de dimension égale à 2, $\overrightarrow{pm}_{2//2}^{R^2}$ est indéfini par manque de

dimensions. Les vecteurs ordinaires $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont libres.

$m = 2 ; n = 3$

Le repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ est 3D. L'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{e}_3)$ est 3D ou 2D. Le vecteur $\vec{e}_3$ est orthogonal à tous les vecteurs formés par combinaisons linéaires sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$ et n'est pas dans l'espace de l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)$. Le vecteur ordinaire $\vec{e}_3$ et le vecteur ordinaire $\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1$ sont liés entre eux. On a alors dans R^3 deux occurrences :

Note : $\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1$ n'est pas formé par combinaisons linéaires sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$. Il en va de même pour tous les produits vectoriels de vecteurs appartenant à une famille.

1) Si l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)$ est 1D alors l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{e}_3)$ est 2D. On a conclu en $m = 2 ; n = 2$ que la séquence $\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1$ est indéfinie. Par suite le polymixte envoûteur construit avec un vecteur nul est indéfini :

$$\overrightarrow{pm}_{2//3}^{R^3} = \left(\vec{e}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1) \right) = \vec{e}_3 \boxtimes \vec{0} = \text{indéfini}$$

$(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{e}_3)_{2D}$
 $(\vec{v}_1; \vec{v}_2) \text{conf} \{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$

Conclusion

On conclut que si l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{e}'_3)$ est de dimension égale à 2, $\vec{pm}_{2//3}^{R^3}$ n'est pas défini. Le vecteur ordinaire $\vec{e}'_3$ et le vecteur ordinaire $\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1 = \vec{0}$ sont liés entre eux.

2) Si l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)$ est 2D alors l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{e}'_3)$ est 3D. On a conclu en $m = 2; n = 2$ que la séquence $\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1$ est indéfinie par manque de dimensions. Cependant il y a assez de dimensions dans R^3 pour définir la séquence $\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1$ qui forme un produit vectoriel de vecteurs non colinéaires qui sont simultanément orthogonal à $\vec{v}_1$ et à $\vec{v}_2$. On conclut donc que la séquence $\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1$ est non nulle et confinée à $\vec{e}'_3$.

On a le repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}'_3)$ tridimensionnel. On choisit librement dans cet espace 3D la valeur d'opérateur $\psi_3 = 1$ ou $\psi_3 = -1$ pour y caractériser l'orientation directe ou indirecte du produit vectoriel. Si une valeur est choisie pour une des deux orientations, la valeur contraire s'applique à l'orientation contraire.

On choisit la valeur d'opérateur ξ_3 pour caractériser l'orientation directoïde ou indirectoïde du repère 3D $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}'_3)$ en accord avec la valeur choisie pour ψ_3 . Si l'objet est directoïde, alors ξ_3 est du signe qu'on a choisi pour ψ_3 qui caractérise l'orientation directe du produit vectoriel dans l'espace 3D. Si l'objet est indirectoïde, alors ξ_3 est du signe contraire à celui qu'on a choisi pour ψ_3 qui caractérise l'orientation directe du produit vectoriel dans l'espace 3D.

On a, avec $((O; \vec{e}_1); \vec{e}_2)$ angle quelconque :

$$\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 = (e_2 e_1)_{|1} \cdot \vec{e}_1 + (e_2 e_1)_{|2} \cdot \vec{e}_2 + (e_2 e_1)_{|3} \cdot \vec{e}'_3$$

$\vec{e}'_3$ étant orthogonal à $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$:

$$\begin{aligned} \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 &= 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\cos((O; \vec{e}_1), \vec{e}_1)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1); \vec{e}_2)| \cdot \vec{e}'_3 \\ \vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1 &\xrightarrow[\substack{\{ \vec{v}_2, \vec{v}_1 \} \text{ conf } \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \} \\ (O; \vec{v}_1; \vec{v}_2) 2D}]{\substack{\vec{e}'_3 \perp (O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)}} = (v_{2|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{2|2} \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}'_3) \wedge (v_{1|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{1|2} \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}'_3) \\ &= (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}) \cdot \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_1 \wedge \vec{e}'_3 + 0 \cdot \vec{e}_2 \wedge \vec{e}'_3 \\ &= 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + (e_1 e_2)_{|3} \cdot \vec{e}'_3 = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\cos((O; \vec{e}_1), \vec{e}_1)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1); \vec{e}_2)| \cdot \vec{e}'_3 \end{aligned}$$

Avec $\text{Det}_{2 \times 2}(\vec{v}_2; \vec{v}_1) = v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}$, déterminant d'une matrice de vecteurs 2 lignes 2 colonnes, on écrit donc :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1} &= \frac{\overrightarrow{e'_3} \perp (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2})}{\{\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}\} \text{conf}\{\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}\}} \cdot (v_{2|1} \cdot \overrightarrow{e'_1} + v_{2|2} \cdot \overrightarrow{e'_2} + 0 \cdot \overrightarrow{e'_3}) \wedge (v_{1|1} \cdot \overrightarrow{e'_1} + v_{1|2} \cdot \overrightarrow{e'_2} + 0 \cdot \overrightarrow{e'_3}) \\
&= (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}) \cdot \overrightarrow{e'_1} \wedge \overrightarrow{e'_2} + 0 \cdot \overrightarrow{e'_1} \wedge \overrightarrow{e'_3} + 0 \cdot \overrightarrow{e'_2} \wedge \overrightarrow{e'_3} \\
&= \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\cos((O; \overrightarrow{e'_1}), \overrightarrow{e'_1})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e'_1}); \overrightarrow{e'_2})| \cdot \text{Det}_{2 \times 2}(\overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \cdot \overrightarrow{e'_3}
\end{aligned}$$

On allège en symbolisant la constante a dans sa forme complète avec $|\sin((O; \overrightarrow{e'_1}; \overrightarrow{e'_2}), \overrightarrow{e'_3})| = 1$. C'est une pure fourniture d'informations puisque $a \text{ complet} = a \text{ réduit} = a$

$$a \text{ complet} = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\cos((O; \overrightarrow{e'_1}), \overrightarrow{e'_1})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e'_1}); \overrightarrow{e'_2})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e'_1}; \overrightarrow{e'_2}), \overrightarrow{e'_3})|$$

Et ensuite on donne le polymixte envoûteur $\overrightarrow{pm}_{2//3}^{R^3}$ qui est donc un envoûteur d'un objet polymixial 2D formé sur $R^3 = \{\overrightarrow{e'_1}; \overrightarrow{e'_2}; \overrightarrow{e'_3}\}$, il occupe toutes les directions de R^3 , chaque direction ayant 2 sens, et est borné à une norme :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{pm}_{2//3}^{R^3} &= \frac{\overrightarrow{e'_3} \perp (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2})}{\{\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}\} \text{conf}\{\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}\}} \cdot \overrightarrow{e'_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) = (\overrightarrow{e'_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})) \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e'_1}; \overrightarrow{e'_2}; \overrightarrow{e'_3}\}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e'_1}; \overrightarrow{e'_2}; \overrightarrow{e'_3}\}} \right\|} \\
\overrightarrow{pm}_{2//3}^{R^3} &= \left[a \cdot \text{Det}_{2 \times 2}(\overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \cdot \overrightarrow{e'_3} \boxtimes \overrightarrow{e'_3} \right] \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e'_1}; \overrightarrow{e'_2}; \overrightarrow{e'_3}\}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e'_1}; \overrightarrow{e'_2}; \overrightarrow{e'_3}\}} \right\|}
\end{aligned}$$

Soit :

$$\overrightarrow{pm}_{2//3}^{R^3} = \frac{\overrightarrow{e'_3} \perp (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2})}{\{\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}\} \text{conf}\{\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}\}} \cdot a \cdot \text{Det}_{2 \times 2}(\overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e'_1}; \overrightarrow{e'_2}; \overrightarrow{e'_3}\}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e'_1}; \overrightarrow{e'_2}; \overrightarrow{e'_3}\}} \right\|}$$

$$a \text{ réduit} = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e'_1}); \overrightarrow{e'_2})|$$

$$a \text{ complet} = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\cos((O; \overrightarrow{e'_1}), \overrightarrow{e'_1})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e'_1}); \overrightarrow{e'_2})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e'_1}; \overrightarrow{e'_2}), \overrightarrow{e'_3})|$$

Sa coordonnée dans le repère $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e'_3})$ unidimensionnel occupant virtuellement tout R^3 avec une norme 1 est la mesure orientée d'un objet 2D (aire orientée) dans R^3 . Le polymixte envoûteur $\overrightarrow{pm}_{2//3}$ occupe virtuellement tout R^3 avec une norme $||\overrightarrow{pm}_{2//3}|| = |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}); \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})|$. Pratiquement parlant, il envoûte un objet polymixial 2D de norme $|\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}); \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})|$ dans le repère $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e'_3})$.

Cet objet est mesuré en multiples d'objet polymixial carré de valeur 1.

Note : on n'a pas besoin des considérations suivantes dans l'espace euclidien mais on peut distribuer $\overrightarrow{pm}_{2//3}$ en une combinaison de $\frac{3!}{(3-2)!} = 3$ vecteurs envoûteurs $\overrightarrow{E_p} = \{\overrightarrow{E_1}; \overrightarrow{E_2}; \overrightarrow{E_3}\}$ dans la matrice des coordonnées $M_{2 \times 3}(\overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})$ définies dans R^3 . On identifie dans cette matrice (en supprimant chaque fois une des 3 lignes de coordonnées) 3 déterminants $Det_{2 \times 2}(\overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})$ de 2 colonnes et 2 lignes, sur lesquels on peut greffer $\{\overrightarrow{E_1}; \overrightarrow{E_2}; \overrightarrow{E_3}\}$ comme des vecteurs envoûteurs formés des combinaisons linéaires que l'on veut dans $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e'_3}\}$ lorsqu'ils se composent avec un des vecteurs de $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e'_3}\}$. Mais comme $v_{1|3} = v_{2|3} = 0$, puisque $(\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2})$ sont confinés à $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}\}$, il n'y a qu'une seule partie pouvant ne pas être vide (ou nulle), et on a donc :

$$Det_{2 \times 2}(\overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \cdot \overrightarrow{pm}_{2//3} = Det_{2 \times 2}(\overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \cdot \overrightarrow{E_1} + 0 \cdot \overrightarrow{E_2} + 0 \cdot \overrightarrow{E_3}$$

Soit :

$$\overrightarrow{pm}_{2//3} = \overrightarrow{e'_3} \cdot \sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}); \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}); \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})| \cdot \overrightarrow{E_1}$$

Si on fixe $\overrightarrow{E_1}$ comme un vecteur absent du sous-espace vectoriel $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$, par exemple $\overrightarrow{E_1} = \overrightarrow{e'_3}$ (mais tout vecteur s'élevant au-dessus de l'objet ferait aussi bien l'affaire), on retrouve la liberté de choix d'un sens d'orientation de l'angle $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ dans un repère $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e'_3})$ de R^3 :

$$\psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}); \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})| = \sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}); \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) = \sin(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$$

Dans R^2 le polymixte n'est pas défini mais l'aire orientée $(O; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})$ est la quantité mesurée dans le repère $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ bidimensionnel. On a alors $\psi_2 \cdot \xi_2$ qui est le signe de l'angle $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. on retrouve la liberté de choix d'un sens d'orientation de l'angle $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ dans un repère $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ de R^2 . ψ_2 représente alors l'orientation du repère trigonométrique, que l'on fixe arbitrairement par $\psi_2 = 1$ ou $\psi_2 = -1$, et ξ_2 celle de l'objet $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ que l'on fixe arbitrairement par $\xi_2 = 1$ ou $\xi_2 = -1$. Si $\overrightarrow{e_2}$ est dans le demi-plan délimité par $\overrightarrow{e_1}$ où on situe l'axe des sinus du repère trigonométrique, alors l'objet $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ et l'espace du plan sont orientés pareils et on ajuste les valeurs tel que $\psi_2 \cdot \xi_2 = 1$. Dans le cas d'orientations contraires, on a $\psi_2 \cdot \xi_2 = -1$

aire orientée $(O; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})$

$$\begin{aligned}
&= \psi_2 \cdot \xi_2 \cdot |\sin(\vec{e}_1, \vec{e}_2)| \cdot \text{Det}_{2 \times 2}(\vec{v}_2; \vec{v}_1) \\
&= \sin(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cdot \text{Det}_{2 \times 2}(\vec{v}_2; \vec{v}_1)
\end{aligned}$$

aire orientée $(O; \vec{v}_2; \vec{v}_1) = -\text{aire orientée}(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)$, car $\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1 = -\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$.

C'est donc la surface située dans l'angle saillant de $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)$, en allant du premier objet nommé au second, et son signe dépend d'un choix de coordonnées et de $\sin(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, donc du choix d'une mesure positive ou négative pour un quelconque des angles saillant ou rentrant de $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$, en allant du premier objet nommé au second. C'est ce que l'introduction d'un produit vectoriel caché dans R^2 et mis en évidence par le vecteur polymixte nous permet de mieux comprendre.

Conclusion

On conclut que si l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{e}'_3)$ est de dimension égale à 3, $\overrightarrow{pm}_{2//3}^{R^3}$ est défini non nul. Le vecteur ordinaire $\vec{e}'_3$ et le vecteur ordinaire $\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1 \neq \vec{0}$ sont liés entre eux.

$m = 2; n = 4$

Le repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}'_3; \vec{e}'_4)$ est 4D. L'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{e}'_3; \vec{e}'_4)$ est 4D ou 3D. Le vecteur $\vec{e}'_4$ est orthogonal à tous les vecteurs formés par combinaisons linéaires sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}'_3\}$ et n'est pas dans l'espace de l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{e}'_3)$. Le vecteur ordinaire $\vec{e}'_3$ et le vecteur envoûteur $\overrightarrow{e'_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ sont libres entre eux. On a alors dans R^4 deux occurrences :

1) Si l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{e}'_3)$ est 2D alors l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{e}'_3; \vec{e}'_4)$ est 3D. On a conclu en $m = 2; n = 3$ que la séquence $\overrightarrow{e'_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ est indéfinie. Par suite le polymixte ordinaire est donc indéfini :

$$\overrightarrow{pm}_{2//4}^{R^4} (O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{e}'_3; \vec{e}'_4)_{3D} \equiv \overrightarrow{e'_4 \wedge (\vec{e}'_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1))} = \text{indéfini}$$

Conclusion

On conclut que si l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{e}'_3; \vec{e}'_4)$ est de dimension égale à 3, $\overrightarrow{pm}_{2//4}^{R^4}$ n'est pas défini. Le vecteur ordinaire $\vec{e}'_4$ et le vecteur envoûteur $\overrightarrow{e'_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ sont libres entre eux.

2) Si l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{e}'_3)$ est 3D alors l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{e}'_3; \vec{e}'_4)$ est 4D. On a conclu en $m = 2; n = 3$ que la séquence $\overrightarrow{e'_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ est définie. Cependant il n'y a pas assez de dimensions dans R^4 pour définir un produit vectoriel de vecteurs non liés qui serait simultanément orthogonal à $\vec{e}'_4$ et à tous les vecteurs de R^3 bornés à une norme $\|\overrightarrow{e'_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}\|$ puisque $\overrightarrow{e'_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ est envoûteur d'un objet polymixial 3D formé sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}'_3\}$. Le polymixte ordinaire est donc indéfini :

$$\begin{array}{c} \overrightarrow{pm} \\ 2//4 \\ R^4 \end{array} \begin{array}{c} \overrightarrow{e'_4} \perp (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{e'_3}) \\ (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}) 2D \\ (\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}) \text{conf}\{\overrightarrow{e'_1}; \overrightarrow{e'_2}\} \end{array} = \overrightarrow{e'_4} \wedge \overrightarrow{(e'_3 \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}))} = \text{indéfini}$$

Conclusion

On conclut que si l'objet $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{e'_3}; \overrightarrow{e'_4})$ est de dimension égale à 4, $\overrightarrow{pm}_{2//4}^{R^4}$ n'est pas défini par manque de dimensions. Le vecteur ordinaire $\overrightarrow{e'_4}$ et le vecteur envoûteur $\overrightarrow{e'_3 \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})}^{R^4}$ sont libres entre eux.

$m = 2$; $n = 5$

Le repère $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e'_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5})$ est 5D. L'objet $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{e'_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5})$ est 5D ou 4D. Le vecteur $\overrightarrow{e'_5}$ est orthogonal à tous les vecteurs formés sur $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e'_3}; \overrightarrow{e'_4}\}$ et n'est pas dans l'espace de l'objet $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{e'_3}; \overrightarrow{e'_4})$. Le vecteur ordinaire $\overrightarrow{e'_5}$ et le vecteur ordinaire $\overrightarrow{e'_4} \wedge \overrightarrow{(e'_3 \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}))}$ sont liés. On a alors dans R^5 deux occurrences :

1) Si l'objet $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{e'_3}; \overrightarrow{e'_4})$ est 3D alors l'objet $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e'_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5})$ est 4D. On a conclu en $m = 2$; $n = 4$ que la séquence $\overrightarrow{e'_4} \wedge \overrightarrow{(e'_3 \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}))}$ est indéfinie. Par suite le polymixte envoûteur est donc indéfini :

$$\begin{array}{c} \overrightarrow{pm} \\ 2//5 \\ R^5 \end{array} \begin{array}{c} (O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e'_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5}) 4D \\ (\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}) \text{conf}\{\overrightarrow{e'_1}; \overrightarrow{e'_2}\} \end{array} = \overrightarrow{e'_5} \boxtimes \overrightarrow{e'_4} \wedge \overrightarrow{(e'_3 \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}))} = \text{indéfini}$$

Conclusion

On conclut que si l'objet $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e'_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5})$ est de dimension égale à 4, $\overrightarrow{pm}_{2//5}^{R^5}$ n'est pas défini. Le vecteur ordinaire $\overrightarrow{e'_5}$ et le vecteur ordinaire $\overrightarrow{e'_4} \wedge \overrightarrow{(e'_3 \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}))}$ sont liés.

2) Si l'objet $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{e'_3}; \overrightarrow{e'_4})$ est 4D alors l'objet $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e'_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5})$ est 5D. On a conclu en $m = 2$; $n = 4$ que la séquence $\overrightarrow{e'_4} \wedge \overrightarrow{(e'_3 \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}))}$ est indéfinie par manque de dimensions. Cependant il y a assez de dimensions dans R^5 pour définir un produit vectoriel de vecteurs non liés qui serait simultanément orthogonal à $\overrightarrow{e'_4}$ et à tous les vecteurs de R^3 bornés à une norme $\|\overrightarrow{e'_3 \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})}\|$

puisque $\overrightarrow{e'_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$ est envoûteur d'un objet polymixial 3D formé sur $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e'_3}\}$. On conclut donc que la séquence $\overrightarrow{e'_4} \wedge (\overrightarrow{e'_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}))$ est confinée à $\overrightarrow{e'_5}$.

On a le repère $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e'_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5})$ pentadimensionnel. On choisit librement dans cet espace 5D la valeur d'opérateur $\psi_5 = 1$ ou $\psi_5 = -1$ pour y caractériser l'orientation directe ou indirecte du produit vectoriel. Si une valeur est choisie pour une des deux orientations, la valeur contraire s'applique à l'orientation contraire.

On choisit la valeur d'opérateur ξ_5 pour caractériser l'orientation directoïde ou indirectoïde de l'objet $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e'_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5})$. Si l'objet est directoïde, alors ξ_5 est du signe qu'on a choisi pour ψ_5 qui caractérise l'orientation directe du produit vectoriel dans l'espace 5D. Si l'objet est indirectoïde, alors ξ_5 est du signe contraire à celui qu'on a choisi pour ψ_5 qui caractérise l'orientation directe du produit vectoriel dans l'espace 5D.

On précise la séquence :

$$\overrightarrow{e'_4} \wedge \overrightarrow{e'_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) \xrightarrow{\substack{= \\ e'_5 \perp (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{e'_3}; \overrightarrow{e'_4}) \\ \{\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}\} \text{conf} \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\} \\ (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}) 2D}} = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\cos((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_1})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}); \overrightarrow{e_2})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}); \overrightarrow{e'_3})| \cdot \text{Det}(\overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \cdot (\overrightarrow{e'_4} \wedge \frac{\overrightarrow{env}}{\left\| \frac{\overrightarrow{env}}{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e'_3}\}} \right\|})$$

Avec :

$$\psi_3 \cdot \xi_3 \cdot (\overrightarrow{e'_4} \wedge \frac{\overrightarrow{env}}{\left\| \frac{\overrightarrow{env}}{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e'_3}\}} \right\|}) = \pm 1 \cdot \overrightarrow{e'_5}$$

On pose alors que :

$$\psi_3 \cdot \xi_3 \cdot (\overrightarrow{e'_4} \wedge \frac{\overrightarrow{env}}{\left\| \frac{\overrightarrow{env}}{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e'_3}\}} \right\|}) = \psi_5 \cdot \xi_5 \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e'_3}), \overrightarrow{e'_4})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e'_3}; \overrightarrow{e'_4}), \overrightarrow{e'_5})| \cdot \overrightarrow{e'_5}$$

On allège en symbolisant la constante a dans sa forme complète :

$$a \text{ complet} = \psi_5 \cdot \xi_5 \cdot |\cos((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_1})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_2})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e'_3})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e'_3}), \overrightarrow{e'_4})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e'_3}; \overrightarrow{e'_4}), \overrightarrow{e'_5})|$$

Par suite :

$$\overrightarrow{e'_4} \wedge \overrightarrow{e'_3} \boxtimes \left(\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1} \right)_{\{\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}\} \text{conf} \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}} = \overrightarrow{e'_5} \perp_{\{\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}\} \text{conf} \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}} (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{e'_3}; \overrightarrow{e'_4})_{(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}) 2D} = a. \text{Det}_{2 \times 2}(\overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}). \overrightarrow{e'_5}$$

Et ensuite on donne le polymixte envoûteur $\overrightarrow{pm}_{\frac{2}{5}/5}$ qui est donc un envoûteur d'un objet polymixial 2D formé

sur $R^5 = \{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e'_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5}\}$, il occupe toutes les directions de R^5 , chaque direction ayant 2 sens, et est borné à une norme :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{pm}_{\frac{2}{5}/5} \overrightarrow{e'_5} \perp_{\{\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}\} \text{conf} \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}} (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{e'_3}; \overrightarrow{e'_4})_{(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}) 2D} &= \overrightarrow{e'_5} \boxtimes (\overrightarrow{e'_4} \wedge \overrightarrow{e'_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})) \\ &= \left[\overrightarrow{e'_5} \boxtimes (\overrightarrow{e'_4} \wedge \overrightarrow{e'_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})) \right] \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e'_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5}\}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e'_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5}\}} \right\|} \\ &= \overrightarrow{pm}_{\frac{2}{5}/5} \overrightarrow{e'_5} \perp_{\{\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}\} \text{conf} \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}} (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2})_{2D} = \left[a. \text{Det}_{2 \times 2}(\overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}). \overrightarrow{e'_5} \boxtimes \overrightarrow{e'_5} \right] \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e'_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5}\}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e'_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5}\}} \right\|} \end{aligned}$$

Donc :

$$\overrightarrow{pm}_{\frac{2}{5}/5} \overrightarrow{e'_5} \perp_{\{\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}\} \text{conf} \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}} (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2})_{2D} = a. \text{Det}_{2 \times 2}(\overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}). \frac{\overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e'_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5}\}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e'_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5}\}} \right\|}; a \text{ réduit} = \psi_5. \xi_5. |\sin((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_2})|$$

$$a \text{ complet} = \psi_5. \xi_5. |\cos((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_1})|. |\sin((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_2})|. |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e'_3})| \\ . |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e'_3}), \overrightarrow{e'_4})|. |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e'_3}; \overrightarrow{e'_4}), \overrightarrow{e'_5})|$$

Sa coordonnée dans le repère $(O; \frac{\overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e'_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5}\}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e'_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5}\}} \right\|})$ unidimensionnel occupant virtuellement tout R^5 avec une norme 1 est la mesure orientée d'un objet 2D (aire orientée) dans R^5 . C'est en valeur absolue la même mesure que dans R^3 . Le polymixte envoûteur $\overrightarrow{pm}_{\frac{2}{5}/5}$ occupe virtuellement tout R^5 avec une norme $\|\overrightarrow{pm}_{\frac{2}{5}/5}\| =$

$|\sin((O; \overrightarrow{e_1}); \overrightarrow{e_2}). \text{Det}_{2 \times 2}(\overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})|$. Pratiquement parlant, il envoûte un objet polymixial 2D de norme $|\sin((O; \overrightarrow{e_1}); \overrightarrow{e_2}). \text{Det}_{2 \times 2}(\overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})|$ dans le repère $(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e'_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5})$.

Cet objet est mesuré en multiples d'objet polymixial carré de valeur 1.

Conclusion

On conclut que si l'objet $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5)$ est de dimension égale à 5, $\overrightarrow{pm}_{\frac{2}{5}/5}^{R^5}$ est défini non nul. Le vecteur ordinaire $\vec{e}_5'$ et le vecteur ordinaire $\vec{e}_4' \wedge \left(\overrightarrow{e_3'} \boxtimes \left(\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1} \right) \right)$ sont liés.

Conclusion pour $m = 2$; $n \geq 2$ et $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)2D$

On poursuit :

$$\overrightarrow{pm}_{\frac{2}{6}/6}^{R^6} = \vec{e}_6' \wedge \left(\overrightarrow{e_5'} \boxtimes \left(\overrightarrow{e_4'} \wedge \overrightarrow{e_3'} \boxtimes \left(\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1} \right) \right) \right) = \text{indéfini}$$

$$\overrightarrow{pm}_{\frac{2}{7}/7}^{R^7} = \vec{e}_7' \boxtimes \vec{e}_6' \wedge \left(\overrightarrow{e_5'} \boxtimes \left(\overrightarrow{e_4'} \wedge \overrightarrow{e_3'} \boxtimes \left(\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1} \right) \right) \right) = a. \text{Det}_{2 \times 2}(\vec{v}_2; \vec{v}_1) \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5; \vec{e}_6; \vec{e}_7\}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5; \vec{e}_6; \vec{e}_7\}} \right\|}$$

Et ainsi de suite un objet défini dans la croissance des n impairs.

On peut donc conclure pour $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ et $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$ et pour des polymixtes définis sur des objets 2D :

$$\overrightarrow{pm}_{\frac{2}{(n \text{ pair} \geq 2)}/n}^{R^n} = \text{indéfini}_{(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)2D (\vec{v}_1; \vec{v}_2) \text{conf} \{ \vec{e}_1; \vec{e}_2 \}}$$

$$\overrightarrow{pm}_{\frac{2}{(n \text{ impair} > 2)}/n}^{R^n} = a. \text{Det}_{2 \times 2}(\vec{v}_2; \vec{v}_1) \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{R^{n \text{ impair}}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{R^{n \text{ impair}}} \right\|}$$

$$a \text{ réduit} = \psi_n \cdot \xi_n \cdot |\sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2)|$$

$$a \text{ complet} = \psi_n \cdot \xi_n \cdot |\cos((O; \vec{e}_1), \vec{e}_1)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3)| \dots |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \dots; \vec{e}_{n-1}), \vec{e}_n)|$$

5.10c Croissance du vecteur polymixte dans $\{ \vec{e}_i \} 3 U \{ \vec{e}_p' \} (n - 3)$

Présentation des acteurs :

$\vec{v}_1$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{ \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3 \}$ et borné à une norme $\|\vec{v}_1\|$. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{ \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3 \}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\vec{v}_2$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$ et borné à une norme $||\vec{v}_2||$. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\vec{v}_3$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$ et borné à une norme $||\vec{v}_3||$. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\vec{e}_1$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\vec{e}_1\}$ et borné à une norme 1. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\vec{e}_1\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\vec{e}_2$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\vec{e}_2\}$ et borné à une norme 1. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\vec{e}_2\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\vec{e}_3$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\vec{e}_3\}$ et borné à une norme 1. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\vec{e}_3\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\vec{e}'_4$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\vec{e}'_4\}$ et borné à une norme 1, orthogonal à tout autre vecteur de $\{\vec{e}_i\} \cup \{\vec{e}'_p\} (n-3)$. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\vec{e}'_4\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\vec{e}'_5$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\vec{e}'_5\}$ et borné à une norme 1, orthogonal à tout autre vecteur de $\{\vec{e}_i\} \cup \{\vec{e}'_p\} (n-3)$. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\vec{e}'_5\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$ et borné à une norme $||\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1||$. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\vec{pm} = \vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)$ vecteur polymixte envoûteur d'un objet polymixial 3D formé sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$ et borné à une norme $||\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)||$. C'est un vecteur qui peut changer d'aspect dans $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$ quand il se compose avec un vecteur ordinaire.

$\vec{pm} = \vec{e}'_4 \wedge \vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)$ vecteur polymixte ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}'_4\}$

et borné à une norme $||\vec{e}'_4 \wedge \vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)||$. C'est un vecteur qui est soit nul, soit indéfini dans $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}'_4\}$, ou bien n'a qu'un seul aspect confiné à $\vec{e}'_5$ dans $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}'_4; \vec{e}'_5\}$

$\vec{pm} = \vec{e}'_5 \boxtimes (\vec{e}'_4 \wedge \vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1))$ vecteur polymixte envoûteur d'un objet polymixial 3D formé sur

$\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}'_4; \vec{e}'_5\}$ et borné à une norme $||\vec{e}'_5 \boxtimes (\vec{e}'_4 \wedge \vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1))||$. C'est un vecteur qui peut changer d'aspect dans $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}'_4; \vec{e}'_5\}$ quand il se compose avec un vecteur ordinaire.

Pour cette croissance, on pose que chacun des vecteurs de la famille $\{\vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1\}$ est non nul. Si au moins un de ces vecteurs est nul alors la séquence $\overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ est soit polymixte de vecteur envoûteur nul, soit indéfini.

Par suite tous les polymixtes à partir de $\overrightarrow{pm} = \overrightarrow{e'_n} (\wedge \boxtimes)^n \dots \overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ seraient aussi indéfinis.

On a :

$$\begin{aligned} & \vec{v}_1(v_{1|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{1|2} \cdot \vec{e}_2 + v_{1|3} \cdot \vec{e}_3) \text{conf} \{ \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3 \} \\ & \vec{v}_2(v_{2|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{2|2} \cdot \vec{e}_2 + v_{2|3} \cdot \vec{e}_3) \text{conf} \{ \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3 \} \\ & \vec{v}_3(v_{3|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{3|2} \cdot \vec{e}_2 + v_{3|3} \cdot \vec{e}_3) \text{conf} \{ \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3 \} \end{aligned}$$

$m = 3; n = 0$

Il n'y a aucun vecteur $\vec{e'_p}$ et aucun vecteur $\vec{e_l}$. Le polymixte n'est pas défini dans $\{\vec{e_l}\} 3 \cup \{\vec{e'_p}\} (0 - 3) = \emptyset$, puisque dans cet ensemble il n'existe rien, pas même le vecteur nul.

$$\overrightarrow{pm} = \text{indéfini}$$

$m = 3; n = 1$

Les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sont confinés à la famille $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$ qui est liée et génère R^1 . Il n'y a aucun vecteur $\vec{e'_l}$ et $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sont alors obligatoirement liés dans une droite. Il n'existe pas suffisamment de dimensions dans R^1 pour définir un vecteur nul orthogonal à $\vec{v}_1$ et à $\vec{v}_2$. Le polymixte envoûteur est donc indéfini :

$$\overrightarrow{pm} = \overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)} = \text{indéfini}$$

Conclusion

On conclut que si l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)$ est de dimension égale à 1, $\overrightarrow{pm}$ n'est pas défini. Les vecteurs ordinaires $\vec{v}_3$ et $\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1$ ne sont ni libres ni liés parce que $\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1$ est indéfini.

$m = 3; n = 2$

Les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sont confinés à la famille $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$ qui est liée et génère R^2 . Il n'y a aucun vecteur $\vec{e'_l}$ et $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sont alors obligatoirement liés dans un plan ou une droite. On a alors dans R^2 trois occurrences :

1) Si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3) 1D$ alors $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2) 1D$. $\vec{v}_2$ forme un angle plat avec $\vec{v}_1$, Il y a assez de dimensions dans R^2 pour définir un produit vectoriel nul de vecteurs colinéaires qui serait simultanément orthogonal à $\vec{v}_1$ et à $\vec{v}_2$. La séquence est donc définie :

$$\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1 = \vec{0}$$

Par suite le polymixte envoûteur construit avec un vecteur nul est indéfini :

$$\overrightarrow{pm}_{\substack{3//2 \\ R^2}} = \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) \quad \begin{matrix} \equiv \\ (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3})1D \\ (\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3})conf\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}\} \\ (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2})1D \end{matrix} \quad \text{indéfini}$$

Conclusion

On conclut que si $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3})1D$ et si $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2})1D$, $\overrightarrow{pm}_{\substack{3//2 \\ R^2}}$ n'est pas défini. Les vecteurs ordinaires

$\overrightarrow{v_3}$ et $\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1} = \vec{0}$ sont liés.

2) Si $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3})2D$ et si $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2})1D$. $\overrightarrow{v_2}$ forme un angle plat avec $\overrightarrow{v_1}$ Il y a assez de dimensions dans R^2 pour définir un produit vectoriel nul de vecteurs colinéaires qui serait simultanément orthogonal à $\overrightarrow{v_1}$ et à $\overrightarrow{v_2}$. La séquence est donc définie :

$$\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1} \quad \begin{matrix} \equiv \\ (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3})2D \\ (\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3})conf\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}\} \\ (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2})1D \end{matrix} \quad \vec{0}$$

Par suite le polymixte envoûteur construit avec un vecteur nul est indéfini :

$$\overrightarrow{pm}_{\substack{3//2 \\ R^2}} = \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) \quad \begin{matrix} \equiv \\ (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3})2D \\ (\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3})conf\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}\} \\ (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2})1D \end{matrix} \quad \text{indéfini}$$

Conclusion

On conclut que si $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3})2D$ et si $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2})1D$, $\overrightarrow{pm}_{\substack{3//2 \\ R^2}}$ n'est pas défini. Les vecteurs ordinaires

$\overrightarrow{v_3}$ et $\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1} = \vec{0}$ sont liés.

3) Si $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3})2D$ et si $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2})2D$. $\overrightarrow{v_2}$ forme un angle non nul avec $\overrightarrow{v_1}$, il n'y a pas assez de dimensions dans R^2 pour définir un produit vectoriel de vecteurs non colinéaires qui serait simultanément orthogonal à $\overrightarrow{v_1}$ et à $\overrightarrow{v_2}$. La séquence est donc indéfinie :

$$\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1} \quad \begin{matrix} \equiv \\ (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3})2D \\ (\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3})conf\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}\} \\ (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2})2D \end{matrix} \quad \text{indéfini}$$

Par suite le polymixte envoûteur construit avec un vecteur indéfini est indéfini :

$$\overrightarrow{pm}_{\substack{3//2 \\ R^2}} = \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) \quad \begin{matrix} \equiv \\ (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3})2D \\ (\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3})conf\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}\} \\ (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2})2D \end{matrix} \quad \text{indéfini}$$

Conclusion

On conclut que si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)2D$ et si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)2D$, $\overrightarrow{pm}_{3//2}^{R^2}$ n'est pas défini. Les vecteurs ordinaires $\vec{v}_3$ et $\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1$ sont ni libres ni liés parce que $\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1$ est indéfini.

$m = 3; n = 3$

Les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sont confinés à la famille $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$ qui est libre et base de R^3 . Le repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ est 3D. Il n'y a aucun vecteur $\vec{e}'_i$ et $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ occupent soit une droite, soit un plan, soit un volume. On distingue alors dans R^3 trois occurrences :

1) Si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)2D$ ou $1D$ et si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)1D$ Il y a assez de dimensions dans R^3 pour définir un produit vectoriel nul de vecteurs colinéaires qui serait simultanément orthogonal à $\vec{v}_1$ et à $\vec{v}_2$. La séquence est donc définie :

$$\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1 = \vec{0}$$

$(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)2D \text{ ou } 1D$
 $(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)conf\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$
 $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)1D$

Par suite le polymixte envoûteur construit avec un vecteur nul est indéfini :

$$\overrightarrow{pm}_{3//3}^{R^3} = \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1) = \text{indéfini}$$

$(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)2D \text{ ou } 1D$
 $(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)conf\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$
 $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)1D$

Note : R^3 formé sur la base $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$ contient R^2 formé sur chacune des combinaisons linéaires que l'on peut faire avec les vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ pour former un plan dans R^3 . Dans ce plan on peut redéfinir des vecteurs de base $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ pour faire les mêmes raisonnements que dans la série $m = 2; n = 2$. Affirmer qu'il y a assez de dimensions dans R^3 pour définir $\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1 = \vec{0}$, cela sous-entend qu'il y en a aussi assez dans R^2 contenu dans R^3 .

Conclusion

On conclut que si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)2D$ ou $1D$ et si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)1D$, $\overrightarrow{pm}_{3//3}^{R^3}$ n'est pas défini. Les vecteurs ordinaires $\vec{v}_3$ et $\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1 = \vec{0}$ sont liés

2) Si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)2D$ et si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)2D$, il y a assez de dimensions dans R^3 pour définir un produit vectoriel non nul de vecteurs non colinéaires qui serait simultanément orthogonal à $\vec{v}_1$ et à $\vec{v}_2$. La séquence est donc définie comme vecteur non nul :

$$\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1 \neq \vec{0}$$

$(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)2D$
 $(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)conf\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$
 $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)2D$

$\vec{v}_3$ est alors coplanaire avec $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)2D$. Comme $\cos(\vec{v}_3, (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)) = 0$, le polymixte envoûteur est vecteur nul de R^3 :

$$\begin{array}{c} \overrightarrow{pm} = \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) \\ \begin{array}{c} 3//3 \\ R^3 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} = \\ \begin{array}{c} (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}) 2D \\ (\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}) \text{conf} \{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3} \} \\ (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}) 2D \end{array} \end{array} \quad \overrightarrow{0}$$

Note : tous ces cas de nullités de $\overrightarrow{pm}_{m//n, R^n}$ expliquent géométriquement que $\text{Det}(\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \dots; \overrightarrow{v_m}) = 0$ quand $\{\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \dots; \overrightarrow{v_m}\}$ est une famille liée (définition mathématique admise : si au moins un de ces vecteurs $\overrightarrow{v_j}$ est combinaison linéaire des autres ou si elle contient le vecteur nul car alors $\overrightarrow{0} = 0 \cdot \overrightarrow{v_j}$).

Reconnaissons toutefois dans notre raisonnement que $\overrightarrow{pm}_{m//n, R^n} = \overrightarrow{0}$ n'explique pas géométriquement que $\text{Det}(\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \dots; \overrightarrow{v_m}) = 0$ quand au moins un des vecteurs $\{\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \dots; \overrightarrow{v_m}\}$ est vecteur nul, car alors nous avons posé que $\overrightarrow{pm}_{m//n, R^n}$ est indéfini.

Conclusion

On conclut que si $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}) 2D$ et si $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}) 2D$, $\overrightarrow{pm}_{3//3, R^3}$ est défini nul. Les vecteurs ordinaires $\overrightarrow{v_3}$ et $\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}$ sont libres entre eux.

3) Si $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}) 3D$ il y a assez de dimensions dans R^3 pour définir le polymixte envoûteur $\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$ qui est un envoûteur non nul d'un objet polymixial 3D formé sur $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}\}$.

En effet, on a donc $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}) 2D$. Il y a assez de dimensions dans R^3 pour définir $\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1} \neq \overrightarrow{0}$ orthogonal à $\overrightarrow{v_2}$ et à $\overrightarrow{v_1}$ vecteurs ordinaires. Le vecteur ordinaire $\overrightarrow{v_3}$ et le vecteur ordinaire $\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}$ sont liés si $\overrightarrow{v_3}$ est orthogonal à $\overrightarrow{v_2}$ et à $\overrightarrow{v_1}$. Dans le cas contraire, le vecteur ordinaire $\overrightarrow{v_3}$ et le vecteur ordinaire $\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}$ sont libres entre eux.

On a le repère $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3})$ tridimensionnel. On choisit librement dans cet espace 3D la valeur d'opérateur $\psi_3 = 1$ ou $\psi_3 = -1$ pour y caractériser l'orientation directe ou indirecte du produit vectoriel. Si une valeur est choisie pour une des deux orientations, la valeur contraire s'applique à l'orientation contraire.

On choisit la valeur d'opérateur ξ_3 pour caractériser l'orientation directoïde ou indirectoïde du repère 3D $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3})$ en accord avec la valeur choisie pour ψ_3 . Si l'objet est directoïde, alors ξ_3 est du signe qu'on a choisi pour ψ_3 qui caractérise l'orientation directe du produit vectoriel dans l'espace 3D. Si l'objet est indirectoïde, alors ξ_3 est du signe contraire à celui qu'on a choisi pour ψ_3 qui caractérise l'orientation directe du produit vectoriel dans l'espace 3D.

On a, avec des angles quelconques entre les vecteurs de base :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2} &= (e_1 e_2)_{|1} \cdot \overrightarrow{e_1} + (e_1 e_2)_{|2} \cdot \overrightarrow{e_2} + (e_1 e_2)_{|3} \cdot \overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_3} &= (e_1 e_3)_{|1} \cdot \overrightarrow{e_1} + (e_1 e_3)_{|2} \cdot \overrightarrow{e_2} + (e_1 e_3)_{|3} \cdot \overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{e_2} \wedge \overrightarrow{e_3} &= (e_2 e_3)_{|1} \cdot \overrightarrow{e_1} + (e_2 e_3)_{|2} \cdot \overrightarrow{e_2} + (e_2 e_3)_{|3} \cdot \overrightarrow{e_3} \end{aligned}$$

Avec :

[illegible]

On a démontré, dans les chapitres précédents ce que valait $\vec{v}_1 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3)$ pour $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)3D$ et qu'on réécrit sous la forme $\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)$ en permutant les indices de $\vec{v}_3$ et $\vec{v}_1$:

$$\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) \underset{\substack{(\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}) \text{ conf } \{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3} \} \\ (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}) 3D}}{=} \quad$$

$$\begin{aligned} & v_{3|1} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2}) (\cos(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) \cdot (e_2 e_3)_{|1} + \cos(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) \cdot (e_2 e_3)_{|2} + \cos(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}) \cdot (e_2 e_3)_{|3}) \\ & + v_{3|2} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|1} - v_{2|1} \cdot v_{1|3}) (\cos(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_1}) \cdot (e_3 e_1)_{|1} + \cos(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}) \cdot (e_3 e_1)_{|2} + \cos(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) \cdot (e_3 e_1)_{|3}) \\ & + v_{3|3} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}) (\cos(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1}) \cdot (e_1 e_2)_{|1} + \cos(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_2}) \cdot (e_1 e_2)_{|2} + \cos(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_3}) \cdot (e_1 e_2)_{|3}) \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{aligned} & + v_{3|1} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}) (\cos(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) \cdot (e_1 e_2)_{|1} + \cos(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) \cdot (e_1 e_2)_{|2} + \cos(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}) \cdot (e_1 e_2)_{|3}) \\ & + v_{3|1} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|1} - v_{2|1} \cdot v_{1|3}) (\cos(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) \cdot (e_3 e_1)_{|1} + \cos(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) \cdot (e_3 e_1)_{|2} + \cos(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}) \cdot (e_3 e_1)_{|3}) \end{aligned} \quad (b)$$

$$\begin{aligned} & + v_{3|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}) (\cos(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_1}) \cdot (e_1 e_2)_{|1} + \cos(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}) \cdot (e_1 e_2)_{|2} + \cos(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) \cdot (e_1 e_2)_{|3}) \\ & + v_{3|2} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2}) (\cos(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_1}) \cdot (e_2 e_3)_{|1} + \cos(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}) \cdot (e_2 e_3)_{|2} + \cos(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) \cdot (e_2 e_3)_{|3}) \end{aligned} \quad (c)$$

$$\begin{aligned} & + v_{3|3} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2}) (\cos(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1}) \cdot (e_2 e_3)_{|1} + \cos(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_2}) \cdot (e_2 e_3)_{|2} + \cos(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_3}) \cdot (e_2 e_3)_{|3}) \\ & + v_{3|3} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|1} - v_{2|1} \cdot v_{1|3}) (\cos(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1}) \cdot (e_3 e_1)_{|1} + \cos(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_2}) \cdot (e_3 e_1)_{|2} + \cos(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_3}) \cdot (e_3 e_1)_{|3}) \end{aligned} \quad (d)$$

Avec $(b) = (c) = (d) = 0$ et dans (a) :

$$\begin{aligned} & \cos(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) \cdot (e_2 e_3)_{|1} + \cos(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) \cdot (e_2 e_3)_{|2} + \cos(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}) \cdot (e_2 e_3)_{|3} = \\ & \cos(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_1}) \cdot (e_3 e_1)_{|1} + \cos(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}) \cdot (e_3 e_1)_{|2} + \cos(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) \cdot (e_3 e_1)_{|3} = \\ & \cos(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1}) \cdot (e_1 e_2)_{|1} + \cos(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_2}) \cdot (e_1 e_2)_{|2} + \cos(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_3}) \cdot (e_1 e_2)_{|3} \end{aligned}$$

Soit, en factorisant avec une de ces trois expressions :

$$\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) = (\cos(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1}) \cdot (e_1 e_2)_{|1} + \cos(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_2}) \cdot (e_1 e_2)_{|2} + \cos(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_3}) \cdot (e_1 e_2)_{|3}) \cdot \begin{vmatrix} v_{3|1} & v_{2|1} & v_{1|1} \\ v_{3|2} & v_{2|2} & v_{1|2} \\ v_{3|3} & v_{2|3} & v_{1|3} \end{vmatrix}$$

On a antérieurement démontré que :

$$\sum_{i=1}^3 \cos(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_i}) \cdot (e_1 e_2)_{|i} = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_2})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_3})|$$

Et ensuite on donne le polymixte envoûteur $\overrightarrow{pm}_{3//3}$ qui est donc un envoûteur d'un objet polymixial 3D formé

sur $R^3 = \{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}\}$, il occupe toutes les directions de R^3 , chaque direction ayant 2 sens, et est borné à une norme :

$$\overrightarrow{pm}_{3//3} = \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$$

$$\overrightarrow{pm}_{3//3} \underset{R^3}{=} \underset{(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}) 3D}{=} \underset{(\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}) \text{ conf } \{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3} \}}{=} a. \underset{3 \times 3}{Det}(\overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \cdot \frac{\overrightarrow{en\vec{v}}_{\{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3} \}}}{\left\| \overrightarrow{en\vec{v}}_{\{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3} \}} \right\|}$$

$$a \text{ réduit} = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_2})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_3})|$$

$$a \text{ complet} = \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\cos((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_1})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_2})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_3})|$$

Sa coordonnée dans le repère $(O; \frac{\overrightarrow{env}}{\|\frac{\overrightarrow{env}}{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}\}}\|})$ unidimensionnel occupant virtuellement tout R^3 avec une norme 1 est la mesure orientée d'un objet 3D (volume orienté) dans R^3 . Le polymixte envoûteur $\frac{\overrightarrow{pm}}{3//3}$ occupe virtuellement tout R^3 avec une norme $\|\frac{\overrightarrow{pm}}{3//3}\| = |a. \underset{R^3}{Det}(\overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})|$. Pratiquement parlant, il envoûte un objet polymixial 3D de norme $|a. \underset{3X3}{Det}(\overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})|$ dans le repère $(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3})$.

Cet objet est mesuré en multiples d'objet polymixial cubique de valeur 1.

Note : on n'a pas besoin des considérations suivantes dans l'espace euclidien mais on peut distribuer $\frac{\overrightarrow{env}}{\|\frac{\overrightarrow{env}}{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}\}}\|}$ en une combinaison de $\frac{3!}{(3-3)!3!} = 1$ vecteur envoûteur $\overrightarrow{E_p} = \{\overrightarrow{E_1}\}$ dans la matrice des coordonnées $\underset{3X3}{M}(\overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})$ définies dans R^3 . On identifie dans cette matrice 1 déterminant $\underset{3X3}{Det}(\overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})$ de 3 colonnes et 3 lignes, sur lequel on peut greffer $\overrightarrow{E_1}$ comme un vecteur formé de la combinaison linéaire que l'on veut dans $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}\}$ lorsqu'il se compose avec un des vecteurs de $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}\}$.

Conclusion

On conclut que si $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3})$ 3D $\frac{\overrightarrow{pm}}{3//3}$ est défini non nul. Le vecteur ordinaire $\overrightarrow{v_3}$ et le vecteur ordinaire $\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}$ sont liés si $\overrightarrow{v_3}$ est orthogonal à $\overrightarrow{v_2}$ et à $\overrightarrow{v_1}$. Dans le cas contraire, le vecteur ordinaire $\overrightarrow{v_3}$ et le vecteur ordinaire $\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}$ sont libres entre eux.

$m = 3; n = 4$

Le repère $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e'_4})$ est 4D. L'objet $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{e'_4})$ est 4D ou 3D ou 2D. Le vecteur $\overrightarrow{e'_4}$ est orthogonal à tous les vecteurs formés par combinaisons linéaires sur $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}\}$ et n'est pas dans l'espace de l'objet $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3})$. Le vecteur ordinaire $\overrightarrow{e'_4}$ et le vecteur envoûteur $\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$ sont libres entre eux.

Note : $\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$ est un vecteur envoûteur non nul d'un objet polymixial 3D formé sur $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}\}$, puisque les vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ sont confinés à $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}\}$. Leurs coordonnées sur $\overrightarrow{e'_4}$ sont toujours nulles

On a alors dans R^4 deux occurrences :

1) Si l'objet $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3})$ est 2D ou 1D alors l'objet $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{e'_4})$ est 3D ou 2D. On a conclu en $m = 3; n = 3$ que la séquence $\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$ est indéfinie ou vecteur nul. Par suite le polymixte ordinaire construit avec un vecteur indéfini ou nul est indéfini :

$$\frac{\overrightarrow{pm}}{3//4} \underset{R^4}{=} \underset{(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{e'_4}) 3Dou2D}{=} \underset{(\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}) conf \{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}\}}{=} \underset{(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}) 2Dou1D}{=} \overrightarrow{e'_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) = \overrightarrow{e'_4} \wedge (\text{indéfini ou } \vec{0}) = \text{indéfini}$$

Conclusion

On conclut que si l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{e}'_4)$ est de dimension égale à 3 ou 2, $\overrightarrow{pm}_{3//4}^{R^4}$ n'est pas défini. Le vecteur ordinaire $\vec{e}'_4$ et le vecteur envoûteur $\overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ sont libres entre eux.

2) Si l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)$ est 3D alors l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{e}'_4)$ est 4D. On a conclu en $m = 3; n = 3$ que la séquence $\overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ est définie non nulle. Cependant il n'y a pas assez de dimensions dans R^4 pour définir un produit vectoriel de vecteurs non liés qui serait simultanément orthogonal à $\vec{e}'_4$ et à tous les vecteurs de R^3 bornés à $\left\| \overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)} \right\|$ puisque $\overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ est envoûteur d'un objet polymixial 3D formé sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$.

On a utilisé un raisonnement analogique à ce qu'on a constaté pour $\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1$ dans R^2 avec $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_1$ libres entre eux.

Note : $\overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ est envoûteur d'un objet polymixial 3D formé sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$ et pas sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4\}$ parce que les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sont confinés à $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$. Leurs coordonnées sur $\vec{e}_4$ sont toujours nulles.

Le polymixte ordinaire est donc indéfini par manque de dimensions :

$$\overrightarrow{pm}_{3//4}^{R^4} = \overrightarrow{e'_4 \wedge (\overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)})} = \text{indéfini}$$

$(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{e}'_4)_{4D}$
 $(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)_{conf\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}}$
 $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)_{3D}$

Conclusion

On conclut que si l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{e}'_4)$ est de dimension égale à 4, $\overrightarrow{pm}_{3//4}^{R^4}$ n'est pas défini par manque de dimensions. Le vecteur ordinaire $\vec{e}'_4$ et le vecteur envoûteur $\overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ sont libres entre eux.

$m = 3; n = 5$

Le repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}'_4; \vec{e}'_5)$ est 5D. L'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{e}'_4; \vec{e}'_5)$ est 5D ou 4D ou 3D. Le vecteur $\vec{e}'_5$ est orthogonal à tous les vecteurs formés par combinaisons linéaires sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}'_4\}$ et n'est pas dans l'espace de l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{e}'_4)$. Le vecteur ordinaire $\vec{e}'_5$ et le vecteur ordinaire $\vec{e}'_4$ $\wedge$ $\overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ sont liés. On a alors dans R^5 deux occurrences :

1) Si l'objet $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{e'_4})$ est 3D ou 2D alors l'objet $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5})$ est 4D ou 3D. On a conclu en $m = 3$; $n = 4$ que la séquence $\overrightarrow{e'_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$ est alors indéfinie. Par suite le polymixte envoûteur construit avec un vecteur ordinaire indéfini est indéfini :

$$\begin{array}{c} \overrightarrow{pm} \\ 3//5 \\ R^5 \end{array} (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5}) \stackrel{=}{=} \overrightarrow{e'_5} \boxtimes (\overrightarrow{e'_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})) = \text{indéfini}$$

$(\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}) \text{conf} \{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3} \}$
 $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{e'_4}) \text{3Dou2D}$

Conclusion

On conclut que si l'objet $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5})$ est de dimension égale à 4 ou 3, $\overrightarrow{pm}_{3//5}^{R^5}$ n'est pas défini. Le vecteur ordinaire $\overrightarrow{e'_5}$ et le vecteur ordinaire $\overrightarrow{e'_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$ ne sont ni libres ni liés parce que $\overrightarrow{e'_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$ est indéfinie.

1) Si l'objet $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{e'_4})$ est 4D alors l'objet $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5})$ est 5D. On a conclu en $m = 3$; $n = 4$ que la séquence $\overrightarrow{e'_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$ est alors indéfinie par manque de dimensions. Cependant il y a assez de dimensions dans R^5 pour définir la séquence $\overrightarrow{e'_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$ qui forme un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{e'_4}$ et à tous les vecteurs de R^3 bornés à $\|\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})\|$ puisque $\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$ est envoûteur d'un objet polymixial 3D formé sur $\{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3} \}$. On conclut donc que la séquence $\overrightarrow{e'_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$ est confinée à $\overrightarrow{e'_5}$. Le vecteur ordinaire $\overrightarrow{e'_5}$ et le vecteur ordinaire $\overrightarrow{e'_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$ sont donc liés entre eux.

On utilise un raisonnement analogue à ce qu'on a constaté pour $\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}$ dans R^3 avec $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_1}$ libres entre eux.

Note : le vecteur $\overrightarrow{v_2}$ s'élève au-dessus du vecteur $\overrightarrow{v_1}$ dans un plan, tout comme $\overrightarrow{e'_4}$ s'élève au-dessus de toutes les directions de R^3 occupées par l'envoûteur $\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$.

On a le repère $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5})$ pentadimensionnel. On choisit librement dans cet espace 5D la valeur d'opérateur $\psi_5 = 1$ ou $\psi_5 = -1$ pour y caractériser l'orientation directe ou indirecte du produit vectoriel. Si une valeur est choisie pour une des deux orientations, la valeur contraire s'applique à l'orientation contraire.

On choisit la valeur d'opérateur ξ_5 pour caractériser l'orientation directoïde ou indirectoïde de l'objet $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5})$. Si l'objet est directoïde, alors ξ_5 est du signe qu'on a choisi pour ψ_5 qui caractérise l'orientation directe du produit vectoriel dans l'espace 5D. Si l'objet est indirectoïde, alors ξ_5 est du signe contraire à celui qu'on a choisi pour ψ_5 qui caractérise l'orientation directe du produit vectoriel dans l'espace 5D.

On précise la séquence :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{e'_4} \wedge \overrightarrow{\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})} &= \\ & \begin{aligned} & (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5})_{5D} \\ & (\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}) \text{conf} \{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3} \} \\ & (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3})_{3D} \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\cos((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_1})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}); \overrightarrow{e_2})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}); \overrightarrow{e_3})| \underset{3 \times 3}{Det}(\overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \cdot (\overrightarrow{e'_4} \wedge \frac{\overrightarrow{env}}{\left\| \frac{\overrightarrow{env}}{\{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3} \}} \right\|})$$

Avec :

$$\psi_3 \cdot \xi_3 \cdot (\overrightarrow{e'_4} \wedge \frac{\overrightarrow{env}}{\left\| \frac{\overrightarrow{env}}{\{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3} \}} \right\|}) = \pm 1 \cdot \overrightarrow{e'_5}$$

On pose alors que :

$$\begin{aligned} \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot (\overrightarrow{e'_4} \wedge \frac{\overrightarrow{env}}{\left\| \frac{\overrightarrow{env}}{\{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3} \}} \right\|}) &= \\ \psi_5 \cdot \xi_5 \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}), \overrightarrow{e'_4})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e'_4}), \overrightarrow{e'_5})| \cdot \overrightarrow{e'_5} \end{aligned}$$

On allège en symbolisant la constante a dans sa forme complète. C'est une pure fourniture d'informations puisque $a \text{ complet} = a \text{ réduit} = a$

$$\begin{aligned} a \text{ complet} &= \psi_5 \cdot \xi_5 \cdot |\cos((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_1})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_2})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_3})| \\ &\cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}), \overrightarrow{e'_4})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e'_4}), \overrightarrow{e'_5})| \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{e'_4} \wedge \overrightarrow{\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})} &= \\ & \begin{aligned} & (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5})_{5D} \\ & (\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}) \text{conf} \{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3} \} \\ & (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3})_{3D} \end{aligned} a \cdot \underset{3 \times 3}{Det}(\overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \cdot \overrightarrow{e'_5} \end{aligned}$$

Et ensuite on donne le polymixte $\overrightarrow{pm}_{3//5}^{R^5}$ qui est donc un envoûteur d'un objet polymixial 3D formé sur $R^5 =$

$\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5}\}$, il occupe toutes les directions de R^5 , chaque direction ayant 2 sens, et est borné à une norme :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{pm}_{3//5}^{R^5} &= \\ & \begin{aligned} & (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5})_{5D} \\ & (\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}) \text{conf} \{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3} \} \\ & (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3})_{3D} \end{aligned} \overrightarrow{e'_5} \boxtimes (\overrightarrow{e'_4} \wedge \overrightarrow{\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})}) = \left[\overrightarrow{e'_5} \boxtimes (\overrightarrow{e'_4} \wedge \overrightarrow{\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})}) \right] \cdot \frac{\overrightarrow{env}}{\left\| \frac{\overrightarrow{env}}{\{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5} \}} \right\|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{pm}_{3//5}^{R^5} &= \overrightarrow{(0; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5})_{5D}} \left[a. Det_{3 \times 3}(\overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \cdot \overrightarrow{e'_5} \boxtimes \overrightarrow{e'_5} \right] \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5}\}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5}\}} \right\|} \\ &\quad \overrightarrow{(v_1; v_2; v_3) conf \{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3} \}} \\ &\quad \overrightarrow{(0; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3})_{3D}} \end{aligned}$$

Donc :

$$\overrightarrow{pm}_{3//5}^{R^5} = \overrightarrow{(0; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5})_{5D}} \cdot \overrightarrow{(v_1; v_2; v_3) conf \{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3} \}} \cdot \overrightarrow{(0; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3})_{3D}} \cdot a. Det_{3 \times 3}(\overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5}\}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5}\}} \right\|}$$

$$a \text{ réduit} = \psi_5 \cdot \xi_5 \cdot |\sin((0; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_2})| \cdot |\sin((0; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_3})|$$

$$a \text{ complet} = \psi_5 \cdot \xi_5 \cdot |\cos((0; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_1})| \cdot |\sin((0; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_2})| \cdot |\sin((0; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_3})| \cdot |\sin((0; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}), \overrightarrow{e'_4})| \cdot |\sin((0; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e'_4}), \overrightarrow{e'_5})|$$

Sa coordonnée dans le repère $(0; \frac{\overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5}\}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5}\}} \right\|})$ unidimensionnel occupant virtuellement tout R^5 avec une norme 1 est la mesure orientée d'un objet 3D (volume orienté) dans R^5 . C'est en valeur absolue la même mesure que dans R^3 . Le polymixte envoûteur $\overrightarrow{pm}_{3//5}^{R^5}$ occupe virtuellement tout R^5 avec une norme $\|\overrightarrow{pm}_{3//5}^{R^5}\| = |a. Det_{3 \times 3}(\overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})|$. Pratiquement parlant, il envoûte un objet polymixial 3D de norme $|a. Det_{3 \times 3}(\overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})|$ dans le repère $(0; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5})$.

Cet objet est mesuré en multiples d'objet polymixial cubique de valeur 1.

Conclusion

On conclut que si l'objet $(0; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{e'_4}; \overrightarrow{e'_5})$ est de dimension égale à 5, $\overrightarrow{pm}_{3//5}^{R^5}$ est défini non nul. Le vecteur ordinaire $\overrightarrow{e'_5}$ et le vecteur ordinaire $\overrightarrow{e'_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$ sont liés.

Conclusion pour $m = 3$; $n \geq 3$ et $(0; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3})_{3D}$

On poursuit :

$$\overrightarrow{pm}_{3//6}^{R^6} = \overrightarrow{e'_6} \wedge (\overrightarrow{e'_5} \boxtimes (\overrightarrow{e'_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}))) = \text{indéfini}$$

$$\overrightarrow{pm}_{3//7} = \overrightarrow{e'_7} \boxtimes (\overrightarrow{e'_6} \wedge (\overrightarrow{e'_5} \boxtimes (\overrightarrow{e'_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})))) = a. Det_{3 \times 3}(\overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e_5}; \overrightarrow{e_6}; \overrightarrow{e_7}\}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e_5}; \overrightarrow{e_6}; \overrightarrow{e_7}\}} \right\|}$$

Et ainsi de suite un objet défini dans la croissance des n impairs.

On peut donc conclure pour $\overrightarrow{v_1} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{v_2} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{v_3} \neq \vec{0}$ et pour des polymixtes définis sur des objets 3D :

$$\overrightarrow{pm}_{3//(n \text{ pair} > 3)} = \text{indéfini}$$

$$\overrightarrow{pm}_{3//(n \text{ impair} \geq 3)} = a. Det_{3 \times 3}(\overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{R^n \text{ impair}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{R^n \text{ impair}} \right\|}$$

$$a \text{ réduit} = \psi_n \cdot \xi_n \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_2})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_3})|$$

$$a \text{ complet} = \psi_n \cdot \xi_n \cdot |\cos((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_1})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_2})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_3})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}), \overrightarrow{e_4})| \dots |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \dots; \overrightarrow{e'_{n-1}}), \overrightarrow{e'_n})|$$

5.10d Croissance du vecteur polymixte dans $\{\overrightarrow{e_i}\}_4 \cup \{\overrightarrow{e'_p}\}(n-4)$

Présentation des acteurs :

$\overrightarrow{v_1}$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}\}$ et borné à une norme $\|\overrightarrow{v_1}\|$. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\overrightarrow{v_2}$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, sur $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}\}$ et borné à une norme $\|\overrightarrow{v_2}\|$. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\overrightarrow{v_3}$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}\}$ et borné à une norme $\|\overrightarrow{v_3}\|$. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\overrightarrow{v_4}$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}\}$ et borné à une norme $\|\overrightarrow{v_4}\|$. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\overrightarrow{e_1}$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\overrightarrow{e_1}\}$ et borné à une norme 1. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\overrightarrow{e_1}\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\overrightarrow{e_2}$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\overrightarrow{e_2}\}$ et borné à une norme 1. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\overrightarrow{e_2}\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\vec{e}_3$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\vec{e}_3\}$ et borné à une norme 1. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\vec{e}_3\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\vec{e}_4$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\vec{e}_4\}$ et borné à une norme 1. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\vec{e}_4\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\vec{e}'_5$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\vec{e}'_5\}$ et borné à une norme 1, orthogonal à tout autre vecteur de $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^4 \cup \{\vec{e}'_p\}_{p=1}^{(n-4)}$. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\vec{e}'_5\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4\}$ et borné à une norme $||\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1||$. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)$ vecteur envoûteur d'un objet polymixial 3D formé sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4\}$ et borné à une norme $||\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)||$. C'est un vecteur qui peut changer d'aspect dans $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4\}$ quand il se compose avec un vecteur ordinaire.

$\vec{pm}_{4/4} = \vec{v}_4 \wedge \vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)$ vecteur polymixte ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4\}$

et borné à une norme $||\vec{v}_4 \wedge \vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)||$. C'est un vecteur qui est soit nul, soit indéfini dans $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4\}$ ou bien n'a qu'un seul aspect confiné à $\vec{e}'_5$ dans $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}'_5\}$

$\vec{pm}_{4/5} = \vec{e}'_5 \boxtimes (\vec{v}_4 \wedge \vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1))$ vecteur polymixte envoûteur d'un objet polymixial 4D formé sur

$\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}'_5\}$ et borné à une norme $||\vec{e}'_5 \boxtimes (\vec{v}_4 \wedge \vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1))||$. C'est un vecteur qui peut changer d'aspect dans $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}'_5\}$ quand il se compose avec un vecteur ordinaire.

Pour cette croissance, on pose que chacun des vecteurs de la famille $\{\vec{v}_4; \vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1\}$ est non nul. Sinon la séquence $\vec{v}_4 \wedge \vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)$ serait indéfinie car on ne définit pas de produit vectoriel avec un vecteur indéfini ou nul. Par suite tous les polymixtes à partir de $\vec{pm}_{4/(n \geq 3)} = \vec{e}'_n (\wedge \boxtimes)^n \dots \vec{v}_4 \wedge \vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)$ seraient aussi indéfinis.

On a :

$$\begin{aligned} & \vec{v}_1(v_{1|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{1|2} \cdot \vec{e}_2 + v_{1|3} \cdot \vec{e}_3 + v_{1|4} \cdot \vec{e}_4) \text{conf} \{ \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4 \} \\ & \vec{v}_2(v_{2|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{2|2} \cdot \vec{e}_2 + v_{2|3} \cdot \vec{e}_3 + v_{2|4} \cdot \vec{e}_4) \text{conf} \{ \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4 \} \\ & \vec{v}_3(v_{3|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{3|2} \cdot \vec{e}_2 + v_{3|3} \cdot \vec{e}_3 + v_{3|4} \cdot \vec{e}_4) \text{conf} \{ \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4 \} \\ & \vec{v}_4(v_{4|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{4|2} \cdot \vec{e}_2 + v_{4|3} \cdot \vec{e}_3 + v_{4|4} \cdot \vec{e}_4) \text{conf} \{ \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4 \} \end{aligned}$$

$$m = 4 ; n = 0$$

Il n'y a aucun vecteur $\overrightarrow{e'_p}$ et aucun vecteur $\overrightarrow{e'_i}$. Le polymixte n'est pas défini dans $\{\overrightarrow{e'_i}\}_4 \cup \{\overrightarrow{e'_p}\}(0-4) = \emptyset$, puisque dans cet ensemble il n'existe rien, pas même le vecteur nul.

$$\overrightarrow{pm}_{4//0}^{R^0} = \text{indéfini}_{(O;\overrightarrow{v_1};\overrightarrow{v_2};\overrightarrow{v_3};\overrightarrow{v_4})0D}$$

$$m = 4 ; n = 1$$

Les vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}$ sont confinés à la famille $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}\}$ qui est liée et génère R^1 . Il n'y a aucun vecteur $\overrightarrow{e'_i}$ et $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}$ sont alors obligatoirement liés dans une droite. Il n'existe pas suffisamment de dimensions dans R^1 pour définir un vecteur nul orthogonal à $\overrightarrow{v_1}$ et à $\overrightarrow{v_2}$. La séquence $\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$ est donc indéfinie. Par suite le polymixte ordinaire est indéfini :

$$\overrightarrow{pm}_{4//1}^{R^1} = \overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) = \text{indéfini}_{(\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}) \text{conf}\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}\} (O;\overrightarrow{v_1};\overrightarrow{v_2};\overrightarrow{v_3};\overrightarrow{v_4})1D}$$

Conclusion

On conclut que si l'objet $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4})$ est de dimension égale à 1, $\overrightarrow{pm}_{4//1}^{R^1}$ n'est pas défini. Le vecteur ordinaire $\overrightarrow{v_4}$ et $\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$ ne sont ni libres ni liés parce que $\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$ est indéfini.

$$m = 4 ; n = 2$$

Les vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}$ sont confinés à la famille $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}\}$ qui est liée et génère R^2 . Il n'y a aucun vecteur $\overrightarrow{e'_i}$ et $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}$ sont alors obligatoirement liés dans un plan ou une droite. On a alors dans R^2 trois occurrences :

1) Si $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4})1D$ alors $\overrightarrow{v_2}$ forme un angle plat avec $\overrightarrow{v_1}$. Il y a assez de dimensions dans R^2 pour définir un produit vectoriel de vecteurs colinéaires qui serait simultanément orthogonal à $\overrightarrow{v_1}$ et à $\overrightarrow{v_2}$. La séquence est donc définie :

$$\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1} = \vec{0}_{(O;\overrightarrow{v_1};\overrightarrow{v_2};\overrightarrow{v_3};\overrightarrow{v_4})1D (\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}) \text{conf}\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}\}}$$

Mais la séquence suivante construite avec un vecteur nul est indéfinie :

$$\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) = \text{indéfini}_{(O;\overrightarrow{v_1};\overrightarrow{v_2};\overrightarrow{v_3};\overrightarrow{v_4})1D (\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}) \text{conf}\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}\}}$$

Par suite le polymixte ordinaire construit avec un indéfini est indéfini :

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{pm} = \overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) & = & \text{indéfini} \\ \begin{array}{c} 4//2 \\ R^2 \end{array} & \begin{array}{c} (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4})1D \\ (\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4})conf\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}\} \end{array} & \end{array}$$

Conclusion

On conclut que si $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4})1D$, $\overrightarrow{pm}$ n'est pas défini. Le vecteur ordinaire $\overrightarrow{v_4}$ et l'envoûteur $\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$ ne sont ni libres ni liés parce que $\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$ n'est pas défini.

2) Si $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4})2D$ et si $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2})1D$ alors $\overrightarrow{v_2}$ forme un angle plat avec $\overrightarrow{v_1}$, Il y a assez de dimensions dans R^2 pour définir un produit vectoriel de vecteurs colinéaires qui serait simultanément orthogonal à $\overrightarrow{v_1}$ et à $\overrightarrow{v_2}$. La séquence est donc définie :

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1} & = & \vec{0} \\ & \begin{array}{c} (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4})2D \\ (\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4})conf\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}\} \\ (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2})1D \end{array} & \end{array}$$

Mais la séquence suivante construite avec un vecteur nul est indéfinie :

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) & = & \text{indéfini} \\ & \begin{array}{c} (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4})2D \\ (\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4})conf\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}\} \\ (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2})1D \end{array} & \end{array}$$

Par suite le polymixte ordinaire construit avec un indéfini est indéfini :

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{pm} = \overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) & = & \text{indéfini} \\ \begin{array}{c} 4//2 \\ R^2 \end{array} & \begin{array}{c} (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4})2D \\ (\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4})conf\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}\} \\ (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2})1D \end{array} & \end{array}$$

Conclusion

On conclut que si $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4})2D$ et si $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2})1D$, $\overrightarrow{pm}$ n'est pas défini. Le vecteur ordinaire $\overrightarrow{v_4}$ et l'envoûteur $\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$ ne sont ni libres ni liés parce que $\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$ n'est pas défini.

2) Si $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4})2D$ et si $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2})1D$ alors $\overrightarrow{v_2}$ forme un angle non nul avec $\overrightarrow{v_1}$, il n'y a pas assez de dimensions dans R^2 pour définir un produit vectoriel de vecteurs non colinéaires qui serait simultanément orthogonal à $\overrightarrow{v_1}$ et à $\overrightarrow{v_2}$. La séquence est donc indéfinie :

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1} & = & \text{indéfini} \\ & \begin{array}{c} (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4})2D \\ (\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4})conf\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}\} \\ (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2})2D \end{array} & \end{array}$$

La séquence suivante construite avec un vecteur indéfini est indéfinie :

$$\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) \quad \begin{array}{c} \text{=} \\ (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4})2D \\ (\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}) \text{conf} \{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4} \} \\ (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2})2D \end{array} \quad \text{indéfini}$$

Par suite le polymixte ordinaire construit avec un vecteur indéfini est indéfini :

$$\begin{array}{c} \overrightarrow{pm} \\ 4//2 \\ R^2 \end{array} = \overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) \quad \begin{array}{c} \text{=} \\ (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4})2D \\ (\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}) \text{conf} \{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4} \} \\ (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2})2D \end{array} \quad \text{indéfini}$$

Conclusion

On conclut que si $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4})2D$ et si $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2})2D$, $\overrightarrow{pm}$ n'est pas défini. Le vecteur ordinaire $\overrightarrow{v_4}$ et l'envoûteur $\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$ ne sont ni libres ni liés parce que $\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$ n'est pas défini.

$m = 4; n = 3$

Les vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}$ sont confinés à la famille $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}\}$ qui est liée et génère R^3 . Il n'y a aucun vecteur $\overrightarrow{e'_i}$ et $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}$ occupent soit une droite, soit un plan, soit un volume. On distingue alors dans R^3 quatre occurrences :

1) Si $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4})2D$ ou $1D$ et si $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2})1D$, Il y a assez de dimensions dans R^3 pour définir un produit vectoriel nul de vecteurs colinéaires qui serait simultanément orthogonal à $\overrightarrow{v_1}$ et à $\overrightarrow{v_2}$. La séquence est donc définie :

$$\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1} \quad \begin{array}{c} \text{=} \\ (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4})2D \text{ ou } 1D \\ (\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}) \text{conf} \{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4} \} \\ (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2})1D \end{array} \quad \vec{0}$$

Mais la séquence suivante construite avec un vecteur nul est indéfinie :

$$\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) \quad \begin{array}{c} \text{=} \\ (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4})2D \text{ ou } 1D \\ (\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}) \text{conf} \{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4} \} \\ (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2})1D \end{array} \quad \text{indéfini}$$

Par suite le polymixte ordinaire construit avec un indéfini est indéfini :

$$\begin{array}{c} \overrightarrow{pm} \\ 4//3 \\ R^3 \end{array} = \overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) \quad \begin{array}{c} \text{=} \\ (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4})2D \text{ ou } 1D \\ (\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}) \text{conf} \{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4} \}2D \\ (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2})1D \end{array} \quad \text{indéfini}$$

Conclusion

On conclut que si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)2Dou1D$ et si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)1D$, $\overrightarrow{pm}_{4/3}^{R^3}$ n'est pas défini. Le vecteur ordinaire $\vec{v}_4$ et l'envoûteur $\overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ ne sont ni libres ni liés parce que $\overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}_{R^3}$ n'est pas défini.

2) Si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)2D$ ou $1D$ et si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)2D$, il y a assez de dimensions dans R^3 pour définir un produit vectoriel non nul de vecteurs non colinéaires qui serait simultanément orthogonal à $\vec{v}_1$ et à $\vec{v}_2$. La séquence est donc définie comme vecteur non nul :

$$\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1 \underset{\substack{(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)2Dou1D \\ (\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)conf\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4\} \\ (O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)2D}}{\neq} \vec{0}$$

$\vec{v}_3$ et $\vec{v}_4$ sont alors coplanaires avec $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)2D$. Comme $\cos(\vec{v}_3, (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)) = 0$, la séquence suivante est vecteur envoûteur nul de R^3 formé sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4\}$:

$$\overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)} \underset{\substack{(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)2Dou1D \\ (\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)conf\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4\} \\ (O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)2D}}{=} \vec{0}$$

Par suite le polymixte ordinaire construit avec un vecteur nul est indéfini :

$$\overrightarrow{pm}_{4/3}^{R^3} = \vec{v}_4 \wedge \overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)} \underset{\substack{(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)2Dou1D \\ (\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)conf\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4\} \\ (O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)2D}}{=} \text{indéfini}$$

Conclusion

On conclut que si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)2Dou1D$ et si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)2D$, $\overrightarrow{pm}_{4/3}^{R^3}$ n'est pas défini. Le vecteur ordinaire $\vec{v}_4$ et l'envoûteur $\overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)} = \vec{0}$ sont liés.

3) Si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)3D$ et si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)2Dou1D$ il y a assez de dimensions dans R^3 pour définir la séquence $\overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)} = \vec{0}$ ou indéfini qui est un envoûteur nul ou indéfini d'un objet polymixial indéfini ou de dimension inférieure à 3, formé sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4\}$. Le polymixte ordinaire construit avec un vecteur nul ou indéfini est indéfini :

$$\overrightarrow{pm}_{4/3}^{R^3} = \vec{v}_4 \wedge \overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)} \underset{\substack{(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)conf\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4\} \\ (O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)3D \\ (O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)2Dou1D}}{=} \text{indéfini}$$

Conclusion

On conclut que si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)3D$ et si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)2D$ ou $1D$, $\overrightarrow{pm}_{4/3}^{R^3}$ n'est pas défini. Le vecteur ordinaire $\vec{v}_4$ et l'envoûteur $\overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ sont liés si ce dernier est vecteur nul, sinon on ne peut pas dire s'ils sont libres ou liés

4) Si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)3D$ et si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)3D$ il y a assez de dimensions dans R^3 pour définir la séquence $\overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)} \neq \vec{0}$ qui est un envoûteur non nul d'un objet polymixial 3D, formé sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4\}$.

Mais le vecteur $\vec{v}_4$ est alors, par manque de dimension, dans l'espace de l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)3D$. Le vecteur $\vec{v}_4$ et l'envoûteur $\overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ sont donc liés. D'autre part, il n'y a pas assez de dimensions dans R^3 pour définir un produit vectoriel nul de vecteurs liés qui serait simultanément orthogonal à $\vec{v}_4$ et à l'envoûteur $\overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ qui représente tous les vecteurs qu'on peut construire sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4\}$. Le polymixte ordinaire est donc indéfini :

$$\overrightarrow{pm}_{4/3}^{R^3} = \vec{v}_4 \wedge \overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)} = \text{indéfini}$$

$(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4) \text{ conf } \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4\}$
 $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)3D$
 $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)3D$

Conclusion

On conclut que si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)3D$ et si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)3D$, $\overrightarrow{pm}_{4/3}^{R^3}$ n'est pas défini par manque de dimensions. Le vecteur ordinaire $\vec{v}_4$ et l'envoûteur $\overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ sont liés.

Note : $\vec{v}_4$ est dans le même sous-espace de dimension 3 que $\overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ par l'angle plat qu'il forme avec une combinaison linéaire des 3 vecteurs de l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)3D$. Les vecteurs $\vec{v}_4$ et $\overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ sont définis comme liés dans R^3 mais on a $\vec{v}_4 \wedge \overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)} = \text{indéfini}$ par manque de dimensions. De la même façon,

$\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont définis comme liés dans R^1 et on a $\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1 = \text{indéfini}$ par manque de dimensions.

Conclusion

On conclut que si l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)$ est de dimension inférieure ou égal à 3, $\overrightarrow{pm}_{4/3}^{R^3}$ n'est pas défini

$$m = 4; n = 4$$

Les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ sont confinés à la famille $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4\}$ qui est libre et génère R^4 . Il n'y a aucun vecteur $\vec{e}'_i$ et $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ occupent soit une droite, soit un plan, soit un volume, soit un objet 4D. On distingue alors dans R^4 cinq occurrences :

1) Si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)2D$ ou $1D$ et si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)1D$, Il y a assez de dimensions dans R^4 pour définir un produit vectoriel nul de vecteurs colinéaires qui serait simultanément orthogonal à $\vec{v}_1$ et à $\vec{v}_2$. La séquence est donc définie :

$$\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1 \stackrel{(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)2Dou1D}{=} \vec{0} \stackrel{(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)conf\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4\}}{(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)1D}$$

Mais la séquence suivante construite avec un vecteur nul est indéfinie :

$$\overrightarrow{\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)} \stackrel{(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)2Dou1D}{=} \text{indéfini} \stackrel{(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)conf\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4\}}{(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)1D}$$

Par suite le polymixte ordinaire construit avec un indéfini est indéfini :

$$\overrightarrow{\vec{p}m} = \vec{v}_4 \wedge \overrightarrow{\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)} \stackrel{(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)2Dou1D}{=} \text{indéfini} \stackrel{(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)conf\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4\}}{(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)1D}$$

$\frac{4}{4}/4$
 R^4

Conclusion

On conclut que si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)2Dou1D$ et si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)1D$, $\overrightarrow{\vec{p}m}$ n'est pas défini. Le vecteur ordinaire $\vec{v}_4$ et l'envoûteur $\overrightarrow{\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ ne sont ni libres ni liés parce que $\overrightarrow{\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ n'est pas défini.

2) Si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)2D$ ou $1D$ et si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)2D$, il y a assez de dimensions dans R^4 pour définir un produit vectoriel non nul de vecteurs non colinéaires qui serait simultanément orthogonal à $\vec{v}_1$ et à $\vec{v}_2$. La séquence est donc définie comme vecteur non nul :

$$\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1 \stackrel{(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)2Dou1D}{\neq} \vec{0} \stackrel{(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)conf\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4\}}{(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)2D}$$

$\vec{v}_3$ et $\vec{v}_4$ sont alors coplanaires avec $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)2D$. Comme $\cos(\vec{v}_3, (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)) = 0$, la séquence suivante est vecteur envoûteur nul de R^3 formé sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4\}$:

$$\overrightarrow{\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)} \stackrel{(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)2Dou1D}{=} \vec{0} \stackrel{(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)conf\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4\}}{(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2)2D}$$

Par suite le polymixte ordinaire construit avec un vecteur nul est indéfini :

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{pm} = \overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) & = & \text{indéfini} \\ \begin{array}{c} 4//4 \\ R^4 \end{array} & \begin{array}{c} (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}) 2Dou1D \\ (\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}) \text{conf}\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}\} \\ (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}) 2D \end{array} & \end{array}$$

Conclusion

On conclut que si $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}) 2Dou1D$ et si $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}) 2D$, $\overrightarrow{pm}$ n'est pas défini. Le vecteur ordinaire $\overrightarrow{v_4}$ et l'envoûteur $\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) = \vec{0}$ sont liés.

3) Si $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}) 3D$ et si $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}) 2Dou1D$ il y a assez de dimensions dans R^4 pour définir la séquence $\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) = \vec{0}$ ou *indéfini* qui est un envoûteur d'un objet polymixial indéfini ou de dimension inférieure à 3, formé sur $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}\}$. Le polymixte ordinaire construit avec un vecteur nul ou indéfini est indéfini :

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{pm} = \overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) & = & \text{indéfini} \\ \begin{array}{c} 4//4 \\ R^4 \end{array} & \begin{array}{c} (\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}) \text{conf}\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}\} \\ (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}) 3D \\ (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}) 2Dou1D \end{array} & \end{array}$$

Conclusion

On conclut que si $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}) 3D$ et si $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}) 2Dou1D$, $\overrightarrow{pm}$ n'est pas défini. Le vecteur ordinaire $\overrightarrow{v_4}$ et l'envoûteur $\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$ sont liés si ce dernier est vecteur nul, sinon on ne peut pas dire s'ils sont libres ou liés

4) Si $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}) 3D$ et si $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}) 3D$ il y a assez de dimensions dans R^3 pour définir la séquence $\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) \neq \vec{0}$ qui est un envoûteur non nul d'un objet polymixial 3D formé sur $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}\}$. Mais le vecteur $\overrightarrow{v_4}$ est alors dans l'espace de l'objet $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}) 3D$. Le vecteur $\overrightarrow{v_4}$ et l'envoûteur $\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$ sont donc liés. D'autre part, il y a assez de dimensions dans R^4 pour définir un produit vectoriel nul de vecteurs liés qui serait simultanément orthogonal à $\overrightarrow{v_4}$ et à $\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$. Le polymixte ordinaire est donc défini nul :

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{pm} = \overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) & = & \vec{0} \\ \begin{array}{c} 4//4 \\ R^4 \end{array} & \begin{array}{c} (\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}) \text{conf}\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}\} \\ (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}) 3D \\ (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}) 3D \end{array} & \end{array}$$

Conclusion

On conclut que si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)3D$ et si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)3D$, $\overrightarrow{pm}_{4//4}^{R^4}$ est défini nul. Le vecteur ordinaire $\vec{v}_4$ et l'envoûteur $\overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ sont liés.

Note : De la même façon, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont définis comme liés dans R^2 et on a $\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1 = \vec{0}$ par suffisance de dimensions.

5) Si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)4D$ on a donc $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)3D$. Il y a assez de dimensions dans R^4 pour définir la séquence $\overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)} \neq \vec{0}$ qui est un envoûteur non nul d'un objet polymixial 3D confiné à $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4\}$. Mais le vecteur $\vec{v}_4$ est alors hors de l'espace de l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)3D$. Le vecteur $\vec{v}_4$ et l'envoûteur $\overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ sont donc libres. D'autre part, il n'y a pas assez de dimensions dans R^4 pour définir un produit vectoriel de vecteurs non liés qui serait simultanément orthogonal à $\vec{v}_4$ et à $\overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$. Le polymixte ordinaire est donc indéfini :

$$\overrightarrow{pm}_{4//4}^{R^4} = \vec{v}_4 \wedge \overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)} = \text{indéfini}$$

$(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4) \text{conf} \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4\}$
 $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)4D$

Conclusion

On conclut que si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)4D$, $\overrightarrow{pm}_{4//4}^{R^4}$ est indéfini par manque de dimensions. Le vecteur ordinaire $\vec{v}_4$ et l'envoûteur $\overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ sont libres.

Note : on décrit l'analogie dans le plan pour $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_1$ libre entre eux : $\vec{v}_1$ est un vecteur ordinaire générant un espace 1D formé sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$ et $\vec{v}_2$ est hors de l'objet $(O; \vec{v}_1)1D$, ce qui signifie que $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_1$ n'ont jamais en commun une même direction dans l'objet polymixial 2D (il est suffisant de dire que l'un n'est pas combinaison linéaire de l'autre). Il n'y a pas assez de dimensions dans R^2 pour définir un produit vectoriel de vecteurs non colinéaires qui serait simultanément orthogonal à $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_1$.

$m = 4; n = 5$

Le repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}'_5)$ est 5D. L'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{e}'_5)$ est 5D ou 4D ou 3D ou 2D. Le vecteur $\vec{e}'_5$ est orthogonal à tous les vecteurs formés par combinaisons linéaires sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4\}$ et n'est pas dans l'espace de l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)$. Le vecteur ordinaire $\vec{e}'_5$ et le vecteur ordinaire $\vec{v}_4 \wedge \overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ sont liés entre eux. On a alors dans R^5 trois occurrences :

1) Si l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)$ est 2D ou 1D alors l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{e}'_5)$ est 3D ou 2D. On a conclu en $m = 4$; $n = 4$ que la séquence $\vec{v}_4 \wedge \overrightarrow{\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ est indéfinie. Par suite le polymixte envoûteur construit avec un vecteur indéfini est indéfini :

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{pm}_{4//5} = \overrightarrow{e'_5 \boxtimes (\vec{v}_4 \wedge \overrightarrow{\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)})} = \overrightarrow{e'_5 \boxtimes (\text{indéfini})} = \text{indéfini} \\ \begin{array}{l} \text{R}^5 \quad (O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{e}'_5) \text{3Dou2D} \\ \quad \quad (O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4) \text{2Dou1D} \end{array} \end{array}$$

Conclusion

On conclut que si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{e}'_5)$ 3Dou2D, $\overrightarrow{pm}_{4//5}$ est indéfini. Le vecteur ordinaire $\vec{e}'_5$ et le vecteur ordinaire $\vec{v}_4 \wedge \overrightarrow{\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ ne sont ni libres ni liés car $\vec{v}_4 \wedge \overrightarrow{\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ est indéfinie.

Note : si les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ était confinés à une base de R^4 contenant $\vec{e}'_5$, par exemple $\{\vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}'_5\}$, on ne pourrait pas utiliser ce raisonnement.

2) Si l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)$ est 3D alors l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{e}'_5)$ est 4D. On a conclu en $m = 4$; $n = 4$ que la séquence $\vec{v}_4 \wedge \overrightarrow{\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ est indéfinie ou nulle. Par suite le polymixte envoûteur construit avec un vecteur indéfini ou nul est indéfini :

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{pm}_{4//5} = \overrightarrow{e'_5 \boxtimes (\vec{v}_4 \wedge \overrightarrow{\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)})} = \overrightarrow{e'_5 \boxtimes (\text{indéfini ou } \vec{0})} = \text{indéfini} \\ \text{R}^5 \quad \begin{array}{l} (O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{e}'_5) \text{4D} \\ (O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4) \text{3D} \end{array} \end{array}$$

Conclusion

On conclut que si $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{e}'_5)$ 4D, $\overrightarrow{pm}_{4//5}$ est indéfini. Le vecteur ordinaire $\vec{e}'_5$ et le vecteur ordinaire $\vec{v}_4 \wedge \overrightarrow{\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ sont liés entre eux si $\vec{v}_4 \wedge \overrightarrow{\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)} = \vec{0}$, si $\vec{v}_4 \wedge \overrightarrow{\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ est indéfini on ne peut pas dire s'ils sont libres ou liés.

3) Si l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)$ est 4D alors l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{e}'_5)$ est 5D. il y a assez de dimensions dans R^5 pour définir $\vec{v}_4 \wedge \overrightarrow{\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)} \neq \vec{0}$ orthogonal à $\vec{v}_4$ et à $\overrightarrow{\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ envoûteur d'un objet polymixial 3D formé sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4\}$.

Donc $\vec{v}_4 \wedge \overrightarrow{\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ ne peut être que confiné à $\vec{e}'_5$, la dimension supplémentaire d'espace orthogonale à tous les vecteurs formés sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4\}$. Le vecteur ordinaire $\vec{e}'_5$ et le vecteur ordinaire $\vec{v}_4 \wedge \overrightarrow{\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ sont liés.

On a le repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}'_5)$ pentadimensionnel. On choisit librement dans cet espace 5D la valeur d'opérateur $\psi_5 = 1$ ou $\psi_5 = -1$ pour y caractériser l'orientation directe ou indirecte du produit vectoriel. Si une valeur est choisie pour une des deux orientations, la valeur contraire s'applique à l'orientation contraire.

On choisit la valeur d'opérateur ξ_5 pour caractériser l'orientation directoïde ou indirectoïde de l'objet $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}'_5)$. Si l'objet est directoïde, alors ξ_5 est du signe qu'on a choisi pour ψ_5 qui caractérise l'orientation directe du produit vectoriel dans l'espace 5D. Si l'objet est indirectoïde, alors ξ_5 est du signe contraire à celui qu'on a choisi pour ψ_5 qui caractérise l'orientation directe du produit vectoriel dans l'espace 5D.

On liste les produits vectoriels non nuls avec des angles quelconques entre les vecteurs de base de $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4\}$:

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 &= (e_1 e_2)_{|1} \cdot \vec{e}_1 + (e_1 e_2)_{|2} \cdot \vec{e}_2 + (e_1 e_2)_{|3} \cdot \vec{e}_3 + (e_1 e_2)_{|4} \cdot \vec{e}_4 \\ \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 &= (e_1 e_3)_{|1} \cdot \vec{e}_1 + (e_1 e_3)_{|2} \cdot \vec{e}_2 + (e_1 e_3)_{|3} \cdot \vec{e}_3 + (e_1 e_3)_{|4} \cdot \vec{e}_4 \\ \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_4 &= (e_1 e_4)_{|1} \cdot \vec{e}_1 + (e_1 e_4)_{|2} \cdot \vec{e}_2 + (e_1 e_4)_{|3} \cdot \vec{e}_3 + (e_1 e_4)_{|4} \cdot \vec{e}_4 \\ \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 &= (e_2 e_3)_{|1} \cdot \vec{e}_1 + (e_2 e_3)_{|2} \cdot \vec{e}_2 + (e_2 e_3)_{|3} \cdot \vec{e}_3 + (e_2 e_3)_{|4} \cdot \vec{e}_4 \\ \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_4 &= (e_2 e_4)_{|1} \cdot \vec{e}_1 + (e_2 e_4)_{|2} \cdot \vec{e}_2 + (e_2 e_4)_{|3} \cdot \vec{e}_3 + (e_2 e_4)_{|4} \cdot \vec{e}_4 \\ \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_4 &= (e_3 e_4)_{|1} \cdot \vec{e}_1 + (e_3 e_4)_{|2} \cdot \vec{e}_2 + (e_3 e_4)_{|3} \cdot \vec{e}_3 + (e_3 e_4)_{|4} \cdot \vec{e}_4\end{aligned}$$

Mais on ne sait pas exprimer géométriquement leurs coordonnées comme on l'a fait dans l'espace euclidien. On cherche donc une forme analytique de $\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$ qui est un vecteur envoûteur d'un objet

polymixial3D formé sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4\}$. Son vecteur unitaire est donc $\frac{\overrightarrow{env}}{\left\| \frac{\overrightarrow{env}}{\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4\}} \right\|}$ qui représente toutes les

combinaisons linéaires possibles sur $R^4 = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4\}$ et occupe donc toutes les directions dans R^4 , chaque direction ayant 2 sens.

L'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)$ est nécessairement 3D si l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)$ est 4D :

$$\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) \stackrel{=}{=} \begin{matrix} (\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3) \text{conf} \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4\} \\ (O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3) \text{ 3D} \end{matrix}$$

$$[(v_{3|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{3|2} \cdot \vec{e}_2 + v_{3|3} \cdot \vec{e}_3 + v_{3|4} \cdot \vec{e}_4) \boxtimes ((v_2 v_1)_{|1} \cdot \vec{e}_1 + (v_2 v_1)_{|2} \cdot \vec{e}_2 + (v_2 v_1)_{|3} \cdot \vec{e}_3 + (v_2 v_1)_{|4} \cdot \vec{e}_4)] \cdot \frac{\overrightarrow{env}}{\left\| \frac{\overrightarrow{env}}{\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4\}} \right\|}$$

$$= [v_{3|1} \cdot (v_2 v_1)_{|1} + v_{3|2} \cdot (v_2 v_1)_{|2} + v_{3|3} \cdot (v_2 v_1)_{|3} + v_{3|4} \cdot (v_2 v_1)_{|4}$$

$$+ \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cdot (v_{3|1} \cdot (v_2 v_1)_{|2} + v_{3|2} \cdot (v_2 v_1)_{|1})$$

$$+ \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_3) \cdot (v_{3|1} \cdot (v_2 v_1)_{|3} + v_{3|3} \cdot (v_2 v_1)_{|1})$$

$$+ \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_4) \cdot (v_{3|1} \cdot (v_2 v_1)_{|4} + v_{3|4} \cdot (v_2 v_1)_{|1})$$

$$+ \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3) \cdot (v_{3|2} \cdot (v_2 v_1)_{|3} + v_{3|3} \cdot (v_2 v_1)_{|2})$$

$$+ \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_4) \cdot (v_{3|2} \cdot (v_2 v_1)_{|4} + v_{3|4} \cdot (v_2 v_1)_{|2})$$

$$+ \cos(\vec{e_3}, \vec{e_4}) \cdot (v_{3|3} \cdot (v_2 v_1)_{|4} + v_{3|4} \cdot (v_2 v_1)_{|3})] \cdot \frac{\overrightarrow{en\vec{v}}_{\{\vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3}; \vec{e_4}\}}}{\left\| \overrightarrow{en\vec{v}}_{\{\vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3}; \vec{e_4}\}} \right\|}$$

Avec :

$$(v_2 v_1)_{|i} \underset{\substack{(\vec{v_1}; \vec{v_2}) \text{ conf } \{\vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3}; \vec{e_4}\} \\ \vec{v_2} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v_1} \neq \vec{0}}}}{=} \sum_{p=1}^{4-1} \left(\sum_{k=1}^{4-p} (v_{2|p} \cdot v_{1|(p+k)} - v_{2|(p+k)} \cdot v_{1|p}) \cdot (e_p e_{(p+k)})_{|i} \right)$$

Qui donne :

$$\begin{aligned} (v_2 v_1)_{|1} &= (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}) \cdot (e_1 e_2)_{|1} + (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1}) \cdot (e_1 e_3)_{|1} \\ &\quad + (v_{2|1} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|1}) \cdot (e_1 e_4)_{|1} + (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2}) \cdot (e_2 e_3)_{|1} \\ &\quad + (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2}) \cdot (e_2 e_4)_{|1} + (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3}) \cdot (e_3 e_4)_{|1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (v_2 v_1)_{|2} &= (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}) \cdot (e_1 e_2)_{|2} + (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1}) \cdot (e_1 e_3)_{|2} \\ &\quad + (v_{2|1} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|1}) \cdot (e_1 e_4)_{|2} + (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2}) \cdot (e_2 e_3)_{|2} \\ &\quad + (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2}) \cdot (e_2 e_4)_{|2} + (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3}) \cdot (e_3 e_4)_{|2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (v_2 v_1)_{|3} &= (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}) \cdot (e_1 e_2)_{|3} + (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1}) \cdot (e_1 e_3)_{|3} \\ &\quad + (v_{2|1} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|1}) \cdot (e_1 e_4)_{|3} + (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2}) \cdot (e_2 e_3)_{|3} \\ &\quad + (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2}) \cdot (e_2 e_4)_{|3} + (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3}) \cdot (e_3 e_4)_{|3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (v_2 v_1)_{|4} &= (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}) \cdot (e_1 e_2)_{|4} + (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1}) \cdot (e_1 e_3)_{|4} \\ &\quad + (v_{2|1} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|1}) \cdot (e_1 e_4)_{|4} + (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2}) \cdot (e_2 e_3)_{|4} \\ &\quad + (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2}) \cdot (e_2 e_4)_{|4} + (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3}) \cdot (e_3 e_4)_{|4} \end{aligned}$$

On a :

$$\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) \underset{\substack{(\vec{v_1}; \vec{v_2}; \vec{v_3}) \text{ conf } \{\vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3}; \vec{e_4}\} \\ (O; \vec{v_1}; \vec{v_2}; \vec{v_3}) \text{ 3D}}}}{=}$$

$$\begin{aligned} &[v_{3|1} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}) \cdot \cos(\vec{e_1}, \vec{e_1}) \cdot (e_1 e_2)_{|1} \\ &+ v_{3|1} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1}) \cdot \cos(\vec{e_1}, \vec{e_1}) \cdot (e_1 e_3)_{|1} \\ &+ v_{3|1} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|1}) \cdot \cos(\vec{e_1}, \vec{e_1}) \cdot (e_1 e_4)_{|1} \\ &+ v_{3|1} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2}) \cdot \cos(\vec{e_1}, \vec{e_1}) \cdot (e_2 e_3)_{|1} \\ &+ v_{3|1} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2}) \cdot \cos(\vec{e_1}, \vec{e_1}) \cdot (e_2 e_4)_{|1} \\ &+ v_{3|1} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3}) \cdot \cos(\vec{e_1}, \vec{e_1}) \cdot (e_3 e_4)_{|1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ v_{3|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}) \cdot \cos(\vec{e_2}, \vec{e_2}) \cdot (e_1 e_2)_{|2} \\ &+ v_{3|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1}) \cdot \cos(\vec{e_2}, \vec{e_2}) \cdot (e_1 e_3)_{|2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +v_{3|4} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2}) \cdot \cos(\vec{e_3}, \vec{e_4}) \cdot (e_2 e_4)_{|3} \\
& +v_{3|4} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3}) \cdot \cos(\vec{e_3}, \vec{e_4}) \cdot (e_3 e_4)_{|3} \cdot \frac{\overrightarrow{env}}{\left\| \frac{\overrightarrow{env}}{\{e_1; e_2; e_3; e_4\}} \right\|}
\end{aligned}$$

On réorganise cette écriture en faisant apparaître des termes contenus dans $Det_{4 \times 4}(\vec{v_4}; \vec{v_3}; \vec{v_2}; \vec{v_1})$:

$$\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) \underset{\substack{(\vec{v_1}; \vec{v_2}; \vec{v_3}) conf \{ \vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3}; \vec{e_4} \} \\ (O; \vec{v_1}; \vec{v_2}; \vec{v_3}) 3D}}{=}$$

$$\begin{aligned}
& [v_{3|2} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3}) [cos(\vec{e_1}, \vec{e_2}) \cdot (e_3 e_4)_{|1} + cos(\vec{e_2}, \vec{e_2}) \cdot (e_3 e_4)_{|2} + cos(\vec{e_2}, \vec{e_3}) \cdot (e_3 e_4)_{|3} + cos(\vec{e_2}, \vec{e_4}) \cdot (e_3 e_4)_{|4}] \\
& -v_{3|3} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2}) [cos(\vec{e_1}, \vec{e_3}) \cdot (e_4 e_2)_{|1} + cos(\vec{e_2}, \vec{e_3}) \cdot (e_4 e_2)_{|2} + cos(\vec{e_3}, \vec{e_3}) \cdot (e_4 e_2)_{|3} + cos(\vec{e_3}, \vec{e_4}) \cdot (e_4 e_2)_{|4}] \\
& +v_{3|4} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2}) [cos(\vec{e_1}, \vec{e_4}) \cdot (e_2 e_3)_{|1} + cos(\vec{e_2}, \vec{e_4}) \cdot (e_2 e_3)_{|2} + cos(\vec{e_3}, \vec{e_4}) \cdot (e_2 e_3)_{|3} + cos(\vec{e_4}, \vec{e_4}) \cdot (e_2 e_3)_{|4}] \\
& v_{3|1} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3}) [cos(\vec{e_1}, \vec{e_1}) \cdot (e_3 e_4)_{|1} + cos(\vec{e_1}, \vec{e_2}) \cdot (e_3 e_4)_{|2} + cos(\vec{e_1}, \vec{e_3}) \cdot (e_3 e_4)_{|3} + cos(\vec{e_1}, \vec{e_4}) \cdot (e_3 e_4)_{|4}] \\
& -v_{3|3} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|1}) [cos(\vec{e_1}, \vec{e_3}) \cdot (e_4 e_1)_{|1} + cos(\vec{e_2}, \vec{e_3}) \cdot (e_4 e_1)_{|2} + cos(\vec{e_3}, \vec{e_3}) \cdot (e_4 e_1)_{|3} + cos(\vec{e_3}, \vec{e_4}) \cdot (e_4 e_1)_{|4}] \\
& +v_{3|4} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1}) [cos(\vec{e_1}, \vec{e_4}) \cdot (e_1 e_3)_{|1} + cos(\vec{e_2}, \vec{e_4}) \cdot (e_1 e_3)_{|2} + cos(\vec{e_3}, \vec{e_4}) \cdot (e_1 e_3)_{|3} + cos(\vec{e_4}, \vec{e_4}) \cdot (e_1 e_3)_{|4}] \\
& v_{3|1} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2}) [cos(\vec{e_1}, \vec{e_1}) \cdot (e_2 e_4)_{|1} + cos(\vec{e_1}, \vec{e_2}) \cdot (e_2 e_4)_{|2} + cos(\vec{e_1}, \vec{e_3}) \cdot (e_2 e_4)_{|3} + cos(\vec{e_1}, \vec{e_4}) \cdot (e_2 e_4)_{|4}] \\
& -v_{3|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|1}) [cos(\vec{e_1}, \vec{e_2}) \cdot (e_4 e_1)_{|1} + cos(\vec{e_2}, \vec{e_2}) \cdot (e_4 e_1)_{|2} + cos(\vec{e_2}, \vec{e_3}) \cdot (e_4 e_1)_{|3} + cos(\vec{e_2}, \vec{e_4}) \cdot (e_4 e_1)_{|4}] \\
& +v_{3|4} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}) [cos(\vec{e_1}, \vec{e_4}) \cdot (e_1 e_2)_{|1} + cos(\vec{e_2}, \vec{e_4}) \cdot (e_1 e_2)_{|2} + cos(\vec{e_3}, \vec{e_4}) \cdot (e_1 e_2)_{|3} + cos(\vec{e_4}, \vec{e_4}) \cdot (e_1 e_2)_{|4}] \\
& v_{3|1} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2}) [cos(\vec{e_1}, \vec{e_1}) \cdot (e_2 e_3)_{|1} + cos(\vec{e_1}, \vec{e_2}) \cdot (e_2 e_3)_{|2} + cos(\vec{e_1}, \vec{e_3}) \cdot (e_2 e_3)_{|3} + cos(\vec{e_1}, \vec{e_4}) \cdot (e_2 e_3)_{|4}] \\
& -v_{3|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1}) [cos(\vec{e_1}, \vec{e_2}) \cdot (e_3 e_1)_{|1} + cos(\vec{e_2}, \vec{e_2}) \cdot (e_3 e_1)_{|2} + cos(\vec{e_2}, \vec{e_3}) \cdot (e_3 e_1)_{|3} + cos(\vec{e_2}, \vec{e_4}) \cdot (e_3 e_1)_{|4}] \\
& +v_{3|3} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}) [cos(\vec{e_1}, \vec{e_3}) \cdot (e_1 e_2)_{|1} + cos(\vec{e_2}, \vec{e_3}) \cdot (e_1 e_2)_{|2} + cos(\vec{e_3}, \vec{e_3}) \cdot (e_1 e_2)_{|3} + cos(\vec{e_3}, \vec{e_4}) \cdot (e_1 e_2)_{|4}] \\
& +v_{3|1} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}) [cos(\vec{e_1}, \vec{e_1}) \cdot (e_1 e_2)_{|1} + cos(\vec{e_1}, \vec{e_2}) \cdot (e_1 e_2)_{|2} + cos(\vec{e_1}, \vec{e_3}) \cdot (e_1 e_2)_{|3} + cos(\vec{e_1}, \vec{e_4}) \cdot (e_1 e_2)_{|4}] \\
& +v_{3|1} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1}) \cdot [cos(\vec{e_1}, \vec{e_1}) \cdot (e_1 e_3)_{|1} + cos(\vec{e_1}, \vec{e_2}) \cdot (e_1 e_3)_{|2} + cos(\vec{e_1}, \vec{e_3}) \cdot (e_1 e_3)_{|3} + cos(\vec{e_1}, \vec{e_4}) \cdot (e_1 e_3)_{|4}] \\
& +v_{3|1} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|1}) \cdot [cos(\vec{e_1}, \vec{e_1}) \cdot (e_1 e_4)_{|1} + cos(\vec{e_1}, \vec{e_2}) \cdot (e_1 e_4)_{|2} + cos(\vec{e_1}, \vec{e_3}) \cdot (e_1 e_4)_{|3} + cos(\vec{e_1}, \vec{e_4}) \cdot (e_1 e_4)_{|4}] \\
& +v_{3|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}) \cdot [cos(\vec{e_1}, \vec{e_2}) \cdot (e_1 e_2)_{|1} + cos(\vec{e_2}, \vec{e_2}) \cdot (e_1 e_2)_{|2} + cos(\vec{e_2}, \vec{e_3}) \cdot (e_1 e_2)_{|3} + cos(\vec{e_2}, \vec{e_4}) \cdot (e_1 e_2)_{|4}] \\
& +v_{3|2} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2}) \cdot [cos(\vec{e_1}, \vec{e_2}) \cdot (e_2 e_3)_{|1} + cos(\vec{e_2}, \vec{e_2}) \cdot (e_2 e_3)_{|2} + cos(\vec{e_2}, \vec{e_3}) \cdot (e_2 e_3)_{|3} + cos(\vec{e_2}, \vec{e_4}) \cdot (e_2 e_3)_{|4}] \\
& +v_{3|2} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2}) \cdot [cos(\vec{e_1}, \vec{e_2}) \cdot (e_2 e_4)_{|1} + cos(\vec{e_2}, \vec{e_2}) \cdot (e_2 e_4)_{|2} + cos(\vec{e_2}, \vec{e_3}) \cdot (e_2 e_4)_{|3} + cos(\vec{e_2}, \vec{e_4}) \cdot (e_2 e_4)_{|4}] \\
& +v_{3|3} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1}) \cdot [cos(\vec{e_1}, \vec{e_3}) \cdot (e_1 e_3)_{|1} + cos(\vec{e_2}, \vec{e_3}) \cdot (e_1 e_3)_{|2} + cos(\vec{e_3}, \vec{e_3}) \cdot (e_1 e_3)_{|3} + cos(\vec{e_3}, \vec{e_4}) \cdot (e_1 e_3)_{|4}] \\
& +v_{3|3} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2}) \cdot [cos(\vec{e_1}, \vec{e_3}) \cdot (e_2 e_3)_{|1} + cos(\vec{e_2}, \vec{e_3}) \cdot (e_2 e_3)_{|2} + cos(\vec{e_3}, \vec{e_3}) \cdot (e_2 e_3)_{|3} + cos(\vec{e_3}, \vec{e_4}) \cdot (e_2 e_3)_{|4}] \\
& +v_{3|3} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3}) \cdot [cos(\vec{e_1}, \vec{e_3}) \cdot (e_3 e_4)_{|1} + cos(\vec{e_2}, \vec{e_3}) \cdot (e_3 e_4)_{|2} + cos(\vec{e_3}, \vec{e_3}) \cdot (e_3 e_4)_{|3} + cos(\vec{e_3}, \vec{e_4}) \cdot (e_3 e_4)_{|4}] \\
& +v_{3|4} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|1}) \cdot [cos(\vec{e_1}, \vec{e_4}) \cdot (e_1 e_4)_{|1} + cos(\vec{e_2}, \vec{e_4}) \cdot (e_1 e_4)_{|2} + cos(\vec{e_3}, \vec{e_4}) \cdot (e_1 e_4)_{|3} + cos(\vec{e_4}, \vec{e_4}) \cdot (e_1 e_4)_{|4}] \\
& +v_{3|4} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2}) \cdot [cos(\vec{e_1}, \vec{e_4}) \cdot (e_2 e_4)_{|1} + cos(\vec{e_2}, \vec{e_4}) \cdot (e_2 e_4)_{|2} + cos(\vec{e_3}, \vec{e_4}) \cdot (e_2 e_4)_{|3} + cos(\vec{e_4}, \vec{e_4}) \cdot (e_2 e_4)_{|4}] \\
& +v_{3|4} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3}) \cdot [cos(\vec{e_1}, \vec{e_4}) \cdot (e_3 e_4)_{|1} + cos(\vec{e_2}, \vec{e_4}) \cdot (e_3 e_4)_{|2} + cos(\vec{e_3}, \vec{e_4}) \cdot (e_3 e_4)_{|3} + cos(\vec{e_4}, \vec{e_4}) \cdot (e_3 e_4)_{|4}]
\end{aligned}$$

$$\cdot \frac{\overrightarrow{env}}{\left\| \frac{\overrightarrow{env}}{\{e_1; e_2; e_3; e_4\}} \right\|}$$

En notant $((O; \vec{e_1}; \vec{e_2}), \vec{e_3})$, l'élévation du vecteur $\vec{e_3}$ au-dessus de l'objet $(O; \vec{e_1}; \vec{e_2})$. En notant $(\vec{e_1}, \vec{e_2}) = ((O; \vec{e_1}), \vec{e_2})$ l'élévation du vecteur $\vec{e_2}$ au-dessus de l'objet $(O; \vec{e_1})$, on a démontré dans les chapitres précédents par des considérations géométriques dont les mesures d'objets réels sont les preuves de vérité, et pour des vecteurs confinés à l'espace euclidien, que :

$$\begin{aligned}
& \psi_3 \cdot \xi_3 \cdot |\sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3)| \\
&= \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_1) \cdot (e_1 e_2)_{|1} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_2) \cdot (e_1 e_2)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_3) \cdot (e_1 e_2)_{|3} \\
&= \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_1) \cdot (e_3 e_1)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \cdot (e_3 e_1)_{|2} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3) \cdot (e_3 e_1)_{|3} \\
&= \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \cdot (e_2 e_3)_{|1} + \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cdot (e_2 e_3)_{|2} + \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_3) \cdot (e_2 e_3)_{|3} \\
& \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \cdot (e_1 e_2)_{|1} + \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cdot (e_1 e_2)_{|2} + \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_3) \cdot (e_1 e_2)_{|3} = 0 \\
& \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \cdot (e_1 e_3)_{|1} + \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cdot (e_1 e_3)_{|2} + \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_3) \cdot (e_1 e_3)_{|3} = 0 \\
& \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_1) \cdot (e_1 e_2)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \cdot (e_1 e_2)_{|2} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3) \cdot (e_1 e_2)_{|3} = 0 \\
& \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_1) \cdot (e_2 e_3)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \cdot (e_2 e_3)_{|2} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3) \cdot (e_2 e_3)_{|3} = 0 \\
& \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_1) \cdot (e_2 e_3)_{|1} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_2) \cdot (e_2 e_3)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_3) \cdot (e_2 e_3)_{|3} = 0 \\
& \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_1) \cdot (e_1 e_3)_{|1} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_2) \cdot (e_1 e_3)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_3) \cdot (e_1 e_3)_{|3} = 0
\end{aligned}$$

Note : On l'a démontré pour $\vec{v}_1 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3)$, qu'on réécrit ici pour $\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)$. On se demande alors si on peut poursuivre l'analogie dans R^4 . Je ne sais pas comment je pourrais projeter des coordonnées d'un vecteur sur un axe d'une dimension que je ne peux pas visualiser. L'argument de poser une analogie avec les constatations faites dans l'espace euclidien est donc pour moi la seule façon de formuler quelque chose, dont la preuve de vérité suppose déjà que les dimensions supplémentaires existent réellement.

On pose que, en notant $((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3), \vec{e}_4)$ l'élévation du vecteur $\vec{e}_4$ au-dessus de l'objet $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$. On peut alors conjecturer :

$$\begin{aligned}
& \psi_5 \cdot \xi_5 \cdot |\sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3), \vec{e}_4)| \\
&= \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cdot (e_3 e_4)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \cdot (e_3 e_4)_{|2} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3) \cdot (e_3 e_4)_{|3} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_4) \cdot (e_3 e_4)_{|4} \\
&= \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_3) \cdot (e_4 e_2)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3) \cdot (e_4 e_2)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_3) \cdot (e_4 e_2)_{|3} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_4) \cdot (e_4 e_2)_{|4} \\
&= \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_4) \cdot (e_2 e_3)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_4) \cdot (e_2 e_3)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_4) \cdot (e_2 e_3)_{|3} + \cos(\vec{e}_4, \vec{e}_4) \cdot (e_2 e_3)_{|4} \\
&= \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \cdot (e_3 e_4)_{|1} + \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cdot (e_3 e_4)_{|2} + \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_3) \cdot (e_3 e_4)_{|3} + \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_4) \cdot (e_3 e_4)_{|4} \\
&= \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_3) \cdot (e_4 e_1)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3) \cdot (e_4 e_1)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_3) \cdot (e_4 e_1)_{|3} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_4) \cdot (e_4 e_1)_{|4} \\
&= \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_4) \cdot (e_1 e_3)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_4) \cdot (e_1 e_3)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_4) \cdot (e_1 e_3)_{|3} + \cos(\vec{e}_4, \vec{e}_4) \cdot (e_1 e_3)_{|4} \\
&= \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \cdot (e_2 e_4)_{|1} + \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cdot (e_2 e_4)_{|2} + \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_3) \cdot (e_2 e_4)_{|3} + \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_4) \cdot (e_2 e_4)_{|4} \\
&= \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cdot (e_4 e_1)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \cdot (e_4 e_1)_{|2} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3) \cdot (e_4 e_1)_{|3} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_4) \cdot (e_4 e_1)_{|4} \\
&= \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_4) \cdot (e_1 e_2)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_4) \cdot (e_1 e_2)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_4) \cdot (e_1 e_2)_{|3} + \cos(\vec{e}_4, \vec{e}_4) \cdot (e_1 e_2)_{|4} \\
&= \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \cdot (e_2 e_3)_{|1} + \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cdot (e_2 e_3)_{|2} + \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_3) \cdot (e_2 e_3)_{|3} + \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_4) \cdot (e_2 e_3)_{|4} \\
&= \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cdot (e_3 e_1)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \cdot (e_3 e_1)_{|2} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3) \cdot (e_3 e_1)_{|3} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_4) \cdot (e_3 e_1)_{|4} \\
&= \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_3) \cdot (e_1 e_2)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3) \cdot (e_1 e_2)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_3) \cdot (e_1 e_2)_{|3} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_4) \cdot (e_1 e_2)_{|4}
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
& \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \cdot (e_1 e_2)_{|1} + \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cdot (e_1 e_2)_{|2} + \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_3) \cdot (e_1 e_2)_{|3} + \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_4) \cdot (e_1 e_2)_{|4} = 0 \\
& \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \cdot (e_1 e_3)_{|1} + \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cdot (e_1 e_3)_{|2} + \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_3) \cdot (e_1 e_3)_{|3} + \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_4) \cdot (e_1 e_3)_{|4} = 0 \\
& \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \cdot (e_1 e_4)_{|1} + \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cdot (e_1 e_4)_{|2} + \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_3) \cdot (e_1 e_4)_{|3} + \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_4) \cdot (e_1 e_4)_{|4} = 0 \\
& \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cdot (e_1 e_2)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \cdot (e_1 e_2)_{|2} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3) \cdot (e_1 e_2)_{|3} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_4) \cdot (e_1 e_2)_{|4} = 0 \\
& \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cdot (e_2 e_3)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \cdot (e_2 e_3)_{|2} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3) \cdot (e_2 e_3)_{|3} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_4) \cdot (e_2 e_3)_{|4} = 0 \\
& \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cdot (e_2 e_4)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \cdot (e_2 e_4)_{|2} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3) \cdot (e_2 e_4)_{|3} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_4) \cdot (e_2 e_4)_{|4} = 0 \\
& \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_3) \cdot (e_1 e_3)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3) \cdot (e_1 e_3)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_3) \cdot (e_1 e_3)_{|3} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_4) \cdot (e_1 e_3)_{|4} = 0 \\
& \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_3) \cdot (e_2 e_3)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3) \cdot (e_2 e_3)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_3) \cdot (e_2 e_3)_{|3} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_4) \cdot (e_2 e_3)_{|4} = 0 \\
& \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_3) \cdot (e_3 e_4)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3) \cdot (e_3 e_4)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_3) \cdot (e_3 e_4)_{|3} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_4) \cdot (e_3 e_4)_{|4} = 0 \\
& \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_4) \cdot (e_1 e_4)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_4) \cdot (e_1 e_4)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_4) \cdot (e_1 e_4)_{|3} + \cos(\vec{e}_4, \vec{e}_4) \cdot (e_1 e_4)_{|4} = 0 \\
& \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_4) \cdot (e_2 e_4)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_4) \cdot (e_2 e_4)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_4) \cdot (e_2 e_4)_{|3} + \cos(\vec{e}_4, \vec{e}_4) \cdot (e_2 e_4)_{|4} = 0
\end{aligned}$$

$$\cos(\vec{e_1}, \vec{e_4}) \cdot (e_3 e_4)_{|1} + \cos(\vec{e_2}, \vec{e_4}) \cdot (e_3 e_4)_{|2} + \cos(\vec{e_3}, \vec{e_4}) \cdot (e_3 e_4)_{|3} + \cos(\vec{e_4}, \vec{e_4}) \cdot (e_3 e_4)_{|4} = 0$$

Note : le statut de « conjecture » suppose qu'on n'est pas certain que ce soit vrai. Mais peut-être que, à un niveau de réalité échappant à toutes mesures, l'univers est-il construit pour que ce que l'on souhaite voir soit vrai. C'est une autre conjecture... Il y a aussi la possibilité que je me trompe par rapport à une vérité déjà établie mais que j'ignore.

On remarque que si la base $\{\vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3}; \vec{e_4}\}$ est orthonormée, alors les expressions ci-dessus se simplifient en ne laissant aucun doute sur leur exactitude, car on a :

$$\begin{aligned} \cos(\vec{e_p}, \vec{e_{p'}}) &= 0 \text{ si } p \neq p' \\ \cos(\vec{e_p}, \vec{e_{p'}}) &= 1 \text{ si } p = p' \\ (e_p e_{p'})_{|i} &= 0 \text{ si } i = p \text{ ou } i = p' \\ (e_p e_{p'})_{|i} &= \pm 1 \text{ si } i \neq p \text{ et } i \neq p' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\sin((O; \vec{e_1}), \vec{e_2})| &= 1 \\ |\sin((O; \vec{e_1}; \vec{e_2}), \vec{e_3})| &= 1 \\ |\sin((O; \vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3}), \vec{e_4})| &= 1 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \psi_5 \cdot \xi_5 \cdot |\sin((O; \vec{e_1}), \vec{e_2})| \cdot |\sin((O; \vec{e_1}; \vec{e_2}), \vec{e_3})| \cdot |\sin((O; \vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3}), \vec{e_4})| \\ = (e_3 e_4)_{|2} \\ = (e_4 e_2)_{|3} \\ = (e_2 e_3)_{|4} \\ = (e_3 e_4)_{|1} \\ = (e_4 e_1)_{|3} \\ = (e_1 e_3)_{|4} \\ = (e_2 e_4)_{|1} \\ = (e_4 e_1)_{|2} \\ = (e_1 e_2)_{|4} \\ = (e_2 e_3)_{|1} \\ = (e_3 e_1)_{|2} \\ = (e_1 e_2)_{|3} \\ = \psi_5 \cdot \xi_5 = \pm 1 \end{aligned}$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\overline{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})} &=_{(\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}) \text{ conf } \{\vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3}; \vec{e_4}\}} \\ &=_{(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}) \text{ 3D}} \\ \psi_5 \cdot \xi_5 \cdot |\sin((O; \vec{e_1}), \vec{e_2})| \cdot |\sin((O; \vec{e_1}; \vec{e_2}), \vec{e_3})| \cdot |\sin((O; \vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3}), \vec{e_4})| \\ \cdot [v_{3|2} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3}) - v_{3|3} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2}) + v_{3|4} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2}) \\ + v_{3|1} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3}) - v_{3|3} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|1}) + v_{3|4} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1}) \\ + v_{3|1} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2}) - v_{3|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|1}) + v_{3|4} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}) \end{aligned}$$

$$+v_{3|1} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2}) - v_{3|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1}) + v_{3|3} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}) \Big] \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}} \right\|}$$

On calcule ensuite la séquence $\overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$, dont on sait qu'elle est un vecteur ordinaire confiné à $\overrightarrow{e'_5}$:

$$\overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) \stackrel{=}{=} \begin{matrix} (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}) \text{conf} \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\} \\ (0; \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{e'_5})_{5D} \\ (0; \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4})_{4D} \end{matrix}$$

$$\cdot (v_{4|1} \cdot \overrightarrow{e_1} + v_{4|2} \cdot \overrightarrow{e_2} + v_{4|3} \cdot \overrightarrow{e_3} + v_{4|4} \cdot \overrightarrow{e_4} + 0 \cdot \overrightarrow{e'_5}) \wedge (\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}))$$

On utilise le procédé suivant, précédemment mentionné dans les notes des polymixtes ≤ 3 . On distribue

l'envoûteur $\frac{\overrightarrow{env}_{\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}} \right\|}$ en une combinaison de $\frac{4!}{(4-3)!3!} = 4$ autres vecteurs envoûteurs $\overrightarrow{E_p} = \{\overrightarrow{E_1}, \overrightarrow{E_2}, \overrightarrow{E_3}, \overrightarrow{E_4}\}$

dans la matrice des coordonnées $M_{3 \times 4}(\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1})$ définies dans R^4 . On identifie dans cette matrice (en supprimant chaque fois une des 4 lignes de coordonnées) 4 déterminants $Det_{3 \times 3}(\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1})$ de 3 colonnes et 3 lignes, sur lesquels on peut greffer $\{\overrightarrow{E_1}, \overrightarrow{E_2}, \overrightarrow{E_3}, \overrightarrow{E_4}\}$ comme des vecteurs formés des combinaisons linéaires que l'on veut dans $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ lorsqu'ils se composent avec un des vecteurs de $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$:

$$\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) \stackrel{=}{=} \begin{matrix} (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) \text{conf} \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\} \\ (0; \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})_{3D} \end{matrix}$$

$$\psi_5 \cdot \xi_5 \cdot |\sin((0; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_2})| \cdot |\sin((0; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_3})| \cdot |\sin((0; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}), \overrightarrow{e_4})|$$

$$\begin{aligned} & \cdot [[v_{3|2} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3}) - v_{3|3} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2}) + v_{3|4} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2})] \cdot \overrightarrow{E_1} \\ & + [v_{3|1} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3}) - v_{3|3} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|1}) + v_{3|4} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1})] \cdot \overrightarrow{E_2} \\ & + [v_{3|1} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2}) - v_{3|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|1}) + v_{3|4} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1})] \cdot \overrightarrow{E_3} \\ & + [v_{3|1} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2}) - v_{3|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1}) + v_{3|3} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1})] \cdot \overrightarrow{E_4}] \end{aligned}$$

On allège en notant :

$$a = \psi_5 \cdot \xi_5 \cdot |\sin((0; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_2})| \cdot |\sin((0; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_3})| \cdot |\sin((0; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}), \overrightarrow{e_4})|$$

On liste 16 lignes polymixiales qui prennent chacune une valeur vectorielle $\pm \overrightarrow{e'_5}$ ou $\vec{0}$ puisque $\overrightarrow{v_4} \wedge (\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}))$ est un vecteur envoûteur dont les vecteurs sont confinés à $R^4 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$:

$$\{\vec{n}_i\}(4, \frac{4!}{(4-3)!3!}) = \{\vec{n}_1; \vec{n}_2; \dots; \vec{n}_{16}\}$$

Chaque vecteur $\vec{n}_i$ sera donc choisis avec l'aspect particulier $\vec{n}_i = \pm \overrightarrow{e'_5}$ ou $\vec{n}_i = \vec{0}$ puisque $\overrightarrow{pm}$ est confiné à $\frac{4//5}{R^5}$

$\overrightarrow{e'_5}$.

Soit :

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{E}_1 = \vec{n}_1 = \vec{e}'_5 ; \quad \vec{e}_2 \wedge \vec{E}_2 = \vec{n}_2 = -\vec{e}'_5 ; \quad \vec{e}_3 \wedge \vec{E}_3 = \vec{n}_3 = \vec{e}'_5 ; \quad \vec{e}_4 \wedge \vec{E}_4 = \vec{n}_4 = -\vec{e}'_5$$

$$\vec{0} =$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \wedge \vec{E}_2 = \vec{n}_5 = \vec{e}_1 \wedge \vec{E}_3 = \vec{n}_6 = \vec{e}_1 \wedge \vec{E}_4 = \vec{n}_7 = \vec{e}_2 \wedge \vec{E}_1 = \vec{n}_8 = \vec{e}_2 \wedge \vec{E}_3 = \vec{n}_9 = \vec{e}_2 \wedge \vec{E}_4 = \vec{n}_{10} = \\ \vec{e}_3 \wedge \vec{E}_1 = \vec{n}_{11} = \vec{e}_3 \wedge \vec{E}_2 = \vec{n}_{12} = \vec{e}_3 \wedge \vec{E}_4 = \vec{n}_{13} = \vec{e}_4 \wedge \vec{E}_1 = \vec{n}_{14} = \vec{e}_4 \wedge \vec{E}_2 = \vec{n}_{15} = \vec{e}_4 \wedge \vec{E}_3 = \vec{n}_{16} \end{aligned}$$

Note : On rappelle que $\{\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3, \vec{E}_4\}$ étant envoûteurs de $R^4 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$, les aspects qu'ils prennent (les combinaisons linéaires dans $\{\vec{e}_i\}_m$) en se composant avec un vecteur ordinaire de $\{\vec{e}_i\}_m$ (c'est à dire avec un vecteur envoûteur de R^1 de la famille $\{\vec{e}_i\}_m$), ne les force pas à conserver cet aspect quand ils se composent avec un autre vecteur ordinaire de $\{\vec{e}_i\}_m$.

D'où :

$$\begin{aligned} \vec{v}_4 \wedge \overrightarrow{\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)} &=_{(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4) \text{ conf } \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}} \\ &=_{(0; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4; \vec{e}'_5) 5D} \\ &=_{(0; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4) 4D} \end{aligned}$$

$$= a.$$

$$\begin{aligned} & \cdot [v_{4|1} \cdot [v_{3|2} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3}) - v_{3|3} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2}) + v_{3|4} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2})] \cdot \vec{e}'_5 \\ & + v_{4|2} \cdot [v_{3|1} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3}) - v_{3|3} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|1}) + v_{3|4} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1})] \cdot (-\vec{e}'_5) \\ & + v_{4|3} \cdot [v_{3|1} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2}) - v_{3|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|1}) + v_{3|4} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1})] \cdot \vec{e}'_5 \\ & + v_{4|4} \cdot [v_{3|1} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2}) - v_{3|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1}) + v_{3|3} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1})] \cdot (-\vec{e}'_5)] \end{aligned}$$

On obtient alors ce que l'on souhaitait, qui était de mettre en évidence un déterminant de matrice 4 colonnes et 4 lignes.

On précise la constante a dans sa forme complète avec $|\cos((0; \vec{e}_1), \vec{e}_1)| = 1$ et $|\sin((0; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}'_5), \vec{e}'_5)| = 1$. C'est une pure fourniture d'informations puisque $a \text{ complet} = a \text{ réduit} = a$:

$$\begin{aligned} a \text{ complet} &= \psi_5 \cdot \xi_5 \cdot |\cos((0; \vec{e}_1), \vec{e}_1)| \cdot |\sin((0; \vec{e}_1), \vec{e}_2)| \cdot |\sin((0; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3)| \\ &\cdot |\sin((0; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3), \vec{e}_4)| \cdot |\sin((0; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}'_5), \vec{e}'_5)| \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \vec{v}_4 \wedge \overrightarrow{\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)} &=_{(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4) \text{ conf } \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}} a \cdot \frac{\text{Det}(\vec{v}_4; \vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1)}{4 \times 4} \cdot \vec{e}'_5 \\ &=_{(0; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4; \vec{e}'_5) 5D} \\ &=_{(0; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4) 4D} \end{aligned}$$

Et ensuite on donne le polymixte $\overrightarrow{pm}_{4/5}$ qui est donc un envoûteur d'un objet 4D formé sur $R^5 =$

$\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}'_5\}$, il occupe toutes les directions de R^5 , chaque direction ayant 2 sens, et est borné à une norme :

$$\begin{array}{c} \overrightarrow{pm}_{4//5} \\ R^5 \end{array} \begin{array}{c} (\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}) \\ \text{conf}\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}\} \\ (0; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{e'_5})_{5D} \\ (0; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4})_{4D} \end{array} = \overrightarrow{e'_5} \boxtimes (\overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})) = \overrightarrow{e'_5} \boxtimes (\overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})). \frac{\overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e'_5}\}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e'_5}\}} \right\|}$$

Soit :

$$\begin{array}{c} \overrightarrow{pm}_{4//5} \\ R^5 \end{array} \begin{array}{c} (\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}) \\ \text{conf}\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}\} \\ (0; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{e'_5})_{5D} \\ (0; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4})_{4D} \end{array} = \left[a. Det_{4 \times 4}(\overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \cdot \overrightarrow{e'_5} \boxtimes \overrightarrow{e'_5} \right] \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e'_5}\}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e'_5}\}} \right\|}$$

Soit :

$$\begin{array}{c} \overrightarrow{pm}_{4//5} \\ R^5 \end{array} \begin{array}{c} (\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}) \\ \text{conf}\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}\} \\ (0; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{e'_5})_{5D} \\ (0; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4})_{4D} \end{array} = a. Det_{4 \times 4}(\overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e'_5}\}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e'_5}\}} \right\|}$$

$$a \text{ réduit} = \psi_5 \cdot \xi_5 \cdot |\sin((0; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_2})| \cdot |\sin((0; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_3})| \cdot |\sin((0; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}), \overrightarrow{e_4})|$$

$$a \text{ complet} = \psi_5 \cdot \xi_5 \cdot |\cos((0; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_1})| \cdot \psi_5 \cdot \xi_5 \cdot |\sin((0; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_2})| \cdot |\sin((0; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_3})| \cdot |\sin((0; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}), \overrightarrow{e_4})| \cdot |\sin((0; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e'_4}), \overrightarrow{e'_5})|$$

Sa coordonnée dans le repère $(0; \frac{\overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e'_5}\}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e'_5}\}} \right\|})$ unidimensionnel occupant virtuellement tout R^5 avec une norme 1 est la mesure orientée d'un objet 4D dans R^5 . Le polymixte envoûteur $\overrightarrow{pm}_{4//5}$ occupe virtuellement tout R^5 avec une norme $\|\overrightarrow{pm}_{4//5}\| = |a. Det_{4 \times 4}(\overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})|$. Pratiquement parlant, il envoûte un objet polymixial 4D de norme $|a. Det_{4 \times 4}(\overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})|$ dans le repère $(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e'_5})$.

Cet objet est mesuré en multiples d'objet polymixial 4D hypercubique de valeur 1.

Conclusion

On conclut que si $(0; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{e'_5})_{5D}$, $\overrightarrow{pm}_{4//5}$ est défini non nul. Le vecteur ordinaire $\overrightarrow{e'_5}$ et le vecteur ordinaire $\overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$ sont liés.

 $m = 4$; $n = 6$

Le repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5; \vec{e}_6)$ est 6D. L'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{e}_5; \vec{e}_6)$ est 6D ou 5D ou 4D ou 3D. Le vecteur $\vec{e}_6$ est orthogonal à tous les vecteurs formés par combinaisons linéaires sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5\}$ et n'est pas dans l'espace de l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{e}_5)$. Le vecteur ordinaire $\vec{e}_6$ et le vecteur envoûteur $\overrightarrow{e'_5 \boxtimes (\vec{v}_4 \wedge \vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1))}$ sont libres entre eux. On a alors dans R^6 deux occurrences :

1) Si l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{e}_5)$ est 4D ou 3D ou 2D alors l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{e}_5; \vec{e}_6)$ est 5D ou 4D ou 3D. On a conclu en $m = 4$; $n = 5$ que la séquence $\overrightarrow{e'_5 \boxtimes (\vec{v}_4 \wedge \vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1))}$ est alors indéfinie. Par suite le polymixte ordinaire construit avec $\vec{e}_6$ est indéfini :

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{pm}_{4//6} = \overrightarrow{(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4) conf \{ \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4 \}} = \overrightarrow{e'_6 \wedge \overrightarrow{e'_5 \boxtimes (\vec{v}_4 \wedge \vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1))}} = \text{indéfini} \\ R^6 \quad (O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{e}_5; \vec{e}_6) \text{ 5Dou4Dou3D} \\ \quad \quad \quad (O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{e}_5) \text{ 4Dou3Dou2D} \end{array}$$

Conclusion

On conclut que si l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{e}_5; \vec{e}_6)$ est 5D ou 4D ou 3D, $\overrightarrow{pm}_{4//6}$ n'est pas défini. Le vecteur ordinaire $\vec{e}_6$ et le vecteur envoûteur $\overrightarrow{e'_5 \boxtimes (\vec{v}_4 \wedge \vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1))}$ ne sont ni libres ni liés parce que $\overrightarrow{e'_5 \boxtimes (\vec{v}_4 \wedge \vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1))}$ est indéfinie.

2) Si l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{e}_5)$ est 5D alors l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{e}_5; \vec{e}_6)$ est 6D. On a conclu en $m = 4$; $n = 5$ que la séquence $\overrightarrow{e'_5 \boxtimes (\vec{v}_4 \wedge \vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1))}$ est alors définie non nulle. Mais il n'y a pas assez de dimensions dans R^6 pour définir un produit vectoriel des vecteurs non liés $\vec{e}_6$ et $\overrightarrow{e'_5 \boxtimes (\vec{v}_4 \wedge \vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1))}$ envoûteur d'un objet polymixial 5D formé sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5\}$, qui serait simultanément orthogonal à tous les vecteurs formés sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5\}$ et à $\vec{e}_6$.

Le polymixte ordinaire est donc indéfini :

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{pm}_{4//6} = \overrightarrow{(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4) conf \{ \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4 \}} = \overrightarrow{e'_6 \wedge \overrightarrow{e'_5 \boxtimes (\vec{v}_4 \wedge \vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1))}} = \text{indéfini} \\ R^6 \quad (O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{e}_5; \vec{e}_6) \text{ 6D} \\ \quad \quad \quad (O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{e}_5) \text{ 5D} \end{array}$$

Note : $\vec{e}_6$ et $\overrightarrow{e'_5 \boxtimes (\vec{v}_4 \wedge \vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1))}$ sont libres entre eux. On peut se reporter analogiquement aux considérations faites pour $\overrightarrow{pm}_{4//4}$ et $\overrightarrow{pm}_{2//2}$.

Conclusion

On conclut que si l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{e}'_5; \vec{e}'_6)$ est 6D, $\overrightarrow{pm}_{4//6}$ n'est pas défini par manque de dimensions.

Le vecteur ordinaire $\vec{e}'_6$ et le vecteur envoûteur $\overrightarrow{e'_5 \boxtimes (\vec{v}_4 \wedge \overrightarrow{\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)})}$ sont libres entre eux.

$m = 4; n = 7$

Le repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}'_5; \vec{e}'_6; \vec{e}'_7)$ est 7D. L'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{e}'_5; \vec{e}'_6; \vec{e}'_7)$ est 7D ou 6D ou 5D ou 4D. Le vecteur $\vec{e}'_7$ est orthogonal à tous les vecteurs formés par combinaisons linéaires sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}'_5; \vec{e}'_6\}$ et n'est pas dans l'espace de l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{e}'_5; \vec{e}'_6)$. Le vecteur ordinaire $\vec{e}'_7$ et le vecteur ordinaire $\overrightarrow{e'_6 \wedge \overrightarrow{e'_5 \boxtimes (\vec{v}_4 \wedge \overrightarrow{\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)})}}$ sont liés. On a alors dans R^7 deux occurrences :

1) Si l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{e}'_5; \vec{e}'_6)$ est 5D ou 4D ou 3D alors l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{e}'_5; \vec{e}'_6; \vec{e}'_7)$ est 6D ou 5D ou 4D. On a conclu en $m = 4; n = 6$ que la séquence $\overrightarrow{e'_6 \wedge \overrightarrow{e'_5 \boxtimes (\vec{v}_4 \wedge \overrightarrow{\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)})}}$ est alors indéfinie. Par suite le polymixte ordinaire construit avec $\vec{e}'_6$ est indéfini :

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{pm}_{4//7} \\ R^7 \end{array} \begin{array}{l} (\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4) \text{conf} \{ \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4 \} \\ (O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{e}'_5; \vec{e}'_6; \vec{e}'_7) \text{6Dou5Dou4D} \\ (O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{e}'_5; \vec{e}'_6) \text{5Dou4Dou3D} \end{array} = \overrightarrow{e'_7 \boxtimes (\overrightarrow{e'_6 \wedge \overrightarrow{e'_5 \boxtimes (\vec{v}_4 \wedge \overrightarrow{\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)})}})} = \text{indéfini}$$

Conclusion

On conclut que si l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{e}'_5; \vec{e}'_6; \vec{e}'_7)$ est 6D ou 5D ou 4D, $\overrightarrow{pm}_{4//7}$ n'est pas défini. Le vecteur

ordinaire $\vec{e}'_7$ et le vecteur ordinaire $\overrightarrow{e'_6 \wedge \overrightarrow{e'_5 \boxtimes (\vec{v}_4 \wedge \overrightarrow{\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)})}}$ ne sont libres ni liés entre eux puisque $\overrightarrow{e'_6 \wedge \overrightarrow{e'_5 \boxtimes (\vec{v}_4 \wedge \overrightarrow{\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)})}}$ est indéfinie.

1) Si l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{e}'_5; \vec{e}'_6)$ est 6D alors l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{e}'_5; \vec{e}'_6; \vec{e}'_7)$ est 7D. On a conclu en $m = 4; n = 6$ que la séquence $\overrightarrow{e'_6 \wedge \overrightarrow{e'_5 \boxtimes (\vec{v}_4 \wedge \overrightarrow{\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)})}}$ est alors indéfinie par manque de dimensions. Cependant il y a assez de dimensions dans R^7 pour pouvoir définir $\overrightarrow{e'_6 \wedge \overrightarrow{e'_5 \boxtimes (\vec{v}_4 \wedge \overrightarrow{\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)})}}$ orthogonal à $\vec{e}'_6$ et à $\overrightarrow{e'_5 \boxtimes (\vec{v}_4 \wedge \overrightarrow{\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)})}$ envoûteur de $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}'_5\}$. La séquence $\overrightarrow{e'_6 \wedge \overrightarrow{e'_5 \boxtimes (\vec{v}_4 \wedge \overrightarrow{\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)})}}$ ne peut donc être que confiné à $\vec{e}'_7$, la dimension supplémentaire d'espace orthogonale à tous les vecteurs de $R^6 = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}'_5; \vec{e}'_6\}$:

On a le repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}'_5; \vec{e}'_6; \vec{e}'_7)$ 7D. On choisit librement dans cet espace 5D la valeur d'opérateur $\psi_7 = 1$ ou $\psi_7 = -1$ pour y caractériser l'orientation directe ou indirecte du produit vectoriel. Si une valeur est choisie pour une des deux orientations, la valeur contraire s'applique à l'orientation contraire.

On choisit la valeur d'opérateur ξ_5 pour caractériser l'orientation directoïde ou indirectoïde de l'objet $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}'_5; \vec{e}'_6; \vec{e}'_7)$. Si l'objet est directoïde, alors ξ_7 est du signe qu'on a choisi pour ψ_7 qui caractérise l'orientation directe du produit vectoriel dans l'espace 7D. Si l'objet est indirectoïde, alors ξ_7 est du signe contraire à celui qu'on a choisi pour ψ_7 qui caractérise l'orientation directe du produit vectoriel dans l'espace 7D.

On précise la séquence :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{e'_6} \wedge \overrightarrow{e'_5} \boxtimes (\overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})) &= \\ &= (\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}) \text{conf} \{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4} \} \\ &= (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{e'_5}; \overrightarrow{e'_6}; \overrightarrow{e'_7})_{7D} \\ &= (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{e'_5}; \overrightarrow{e'_6})_{6D} \end{aligned}$$

$$\psi_5 \cdot \xi_5 \cdot |\sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3), \vec{e}_4)| \cdot \text{Det}_{4 \times 4}(\overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \cdot (\overrightarrow{e'_6} \wedge \frac{\overrightarrow{env}}{\left\| \frac{\overrightarrow{env}}{\{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e'_5} \}} \right\|})$$

Avec :

$$\psi_5 \cdot \xi_5 \cdot (\overrightarrow{e'_6} \wedge \frac{\overrightarrow{env}}{\left\| \frac{\overrightarrow{env}}{\{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e'_5} \}} \right\|}) = \pm 1 \cdot \overrightarrow{e'_7}$$

On pose alors que :

$$\psi_5 \cdot \xi_5 \cdot (\overrightarrow{e'_6} \wedge \frac{\overrightarrow{env}}{\left\| \frac{\overrightarrow{env}}{\{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e'_5} \}} \right\|}) =$$

$$\psi_7 \cdot \xi_7 \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4), \vec{e'_5})| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e'_5}), \vec{e'_6})| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e'_5}; \vec{e'_6}), \vec{e'_7})| \cdot \overrightarrow{e'_7}$$

On allège en symbolisant la constante a dans sa forme complète. C'est une pure fourniture d'informations puisque $a \text{ complet} = a \text{ réduit} = a$

$$\begin{aligned} a \text{ complet} &= \psi_7 \cdot \xi_7 \cdot |\cos((O; \vec{e}_1), \vec{e}_1)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3), \vec{e}_4)| \\ &\quad \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4), \vec{e'_5})| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e'_5}), \vec{e'_6})| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e'_5}; \vec{e'_6}), \vec{e'_7})| \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{e'_6} \wedge \overrightarrow{e'_5} \boxtimes (\overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})) &= \\ &= (\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}) \text{conf} \{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4} \} \cdot a \cdot \text{Det}_{4 \times 4}(\overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \cdot \overrightarrow{e'_7} \\ &= (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{e'_5}; \overrightarrow{e'_6}; \overrightarrow{e'_7})_{7D} \\ &= (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{e'_5}; \overrightarrow{e'_6})_{6D} \end{aligned}$$

Et ensuite on donne le polymixte $\overrightarrow{pm}_{4//7}^{R^7}$ qui est donc un envoûteur d'un objet 4D formé sur $R^7 = \{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e'_5}; \overrightarrow{e'_6}; \overrightarrow{e'_7}\}$, il occupe toutes les directions de R^7 , chaque direction ayant 2 sens, et est borné à une norme :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{pm}_{4//7}^{R^7} &= \overrightarrow{(0; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{e'_5}; \overrightarrow{e'_6}; \overrightarrow{e'_7})}^{7D} \text{conf}\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}\} \\ &= \overrightarrow{(0; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{e'_5}; \overrightarrow{e'_6})}^{6D} \overrightarrow{(e'_7 \boxtimes (e'_6 \wedge e'_5 \boxtimes (\overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}))))} \\ &= \left[\overrightarrow{(e'_7 \boxtimes (e'_6 \wedge e'_5 \boxtimes (\overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}))))} \right] \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e'_5}; \overrightarrow{e'_6}; \overrightarrow{e'_7}\}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e'_5}; \overrightarrow{e'_6}; \overrightarrow{e'_7}\}} \right\|}} \\ \overrightarrow{pm}_{4//7}^{R^7} &= \left[\overrightarrow{(e'_7 \boxtimes (e'_6 \wedge e'_5 \boxtimes (\overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}))))} \right] \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e'_5}; \overrightarrow{e'_6}; \overrightarrow{e'_7}\}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e'_5}; \overrightarrow{e'_6}; \overrightarrow{e'_7}\}} \right\|}} \end{aligned}$$

Soit :

$$\overrightarrow{pm}_{4//7}^{R^7} = \left[a \cdot \text{Det}_{4 \times 4}(\overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \cdot \overrightarrow{(e'_7 \boxtimes e'_7)} \right] \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e'_5}; \overrightarrow{e'_6}; \overrightarrow{e'_7}\}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e'_5}; \overrightarrow{e'_6}; \overrightarrow{e'_7}\}} \right\|}}$$

Donc :

$$\overrightarrow{pm}_{4//7}^{R^7} = a \cdot \text{Det}_{4 \times 4}(\overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e'_5}; \overrightarrow{e'_6}; \overrightarrow{e'_7}\}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e'_5}; \overrightarrow{e'_6}; \overrightarrow{e'_7}\}} \right\|}}$$

$$a \text{ réduit} = \psi_7 \cdot \xi_7 \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_2})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_3})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}), \overrightarrow{e_4})|$$

$$a \text{ complet} = \psi_7 \cdot \xi_7 \cdot |\cos((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_1})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_2})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_3})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}), \overrightarrow{e_4})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}), \overrightarrow{e'_5})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e'_5}), \overrightarrow{e'_6})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e'_5}; \overrightarrow{e'_6}), \overrightarrow{e'_7})|$$

Sa coordonnée dans le repère $(O; \frac{\overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e'_5}; \overrightarrow{e'_6}; \overrightarrow{e'_7}\}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e'_5}; \overrightarrow{e'_6}; \overrightarrow{e'_7}\}} \right\|}})$ unidimensionnel occupant virtuellement tout R^7 avec

une norme 1 est la mesure orientée d'un objet 4D dans R^7 . Le polymixte envoûteur $\overrightarrow{pm}_{4//7}^{R^7}$ occupe virtuellement tout R^7 avec une norme $\|\overrightarrow{pm}_{4//7}^{R^7}\| = |a \text{Det}_{4 \times 4}(\overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})|$. C'est en valeur absolue la même

mesure que dans R^5 . Pratiquement parlant, il envoûte un objet polymixial 4D de norme $|a \cdot \text{Det}_{4 \times 4}(\overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})|$ dans le repère $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e'_5}; \overrightarrow{e'_6}; \overrightarrow{e'_7})$.

Cet objet est mesuré en multiples d'objet polymixial 4D hypercubique de valeur 1.

Conclusion

On conclut que si l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{e}'_5; \vec{e}'_6; \vec{e}'_7)$ est 7D, $\overrightarrow{pm}$ est défini non nul. Le vecteur ordinaire $\vec{e}'_7$ et le vecteur ordinaire $\vec{e}'_6 \wedge \vec{e}'_5 \boxtimes \left(\overrightarrow{v_4 \wedge \vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)} \right)$ sont liés entre eux.

Conclusion pour $m = 4$; $n \geq 4$ et $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)4D$

On poursuit :

$$\overrightarrow{pm}_{4//8, R^8} = \vec{e}'_8 \wedge \vec{e}'_7 \boxtimes \left(\overrightarrow{e'_6 \wedge e'_5 \boxtimes \left(\overrightarrow{v_4 \wedge \vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)} \right)} \right) = \text{indéfini}$$

Et :

$$\overrightarrow{pm}_{4//9, R^9} = \vec{e}'_9 \boxtimes \left(\vec{e}'_8 \wedge \vec{e}'_7 \boxtimes \left(\overrightarrow{e'_6 \wedge e'_5 \boxtimes \left(\overrightarrow{v_4 \wedge \vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)} \right)} \right) \right) = a. \text{Det}_{4 \times 4}(\vec{v}_4; \vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1) \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}'_5; \\ \vec{e}'_6; \vec{e}'_7; \vec{e}'_8; \vec{e}'_9 \end{array} \right\}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}'_5; \\ \vec{e}'_6; \vec{e}'_7; \vec{e}'_8; \vec{e}'_9 \end{array} \right\}} \right\|}$$

Et ainsi de suite un objet défini dans la croissance des n impairs.

On peut donc conclure pour $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ et $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$ et $\vec{v}_3 \neq \vec{0}$ et $\vec{v}_4 \neq \vec{0}$ et pour des polymixtes définis sur des objets 4D :

$$\overrightarrow{pm}_{4//(n \text{ pair} \geq 4), R^n} = \text{indéfini}$$

$$\overrightarrow{pm}_{4//(n \text{ impair} > 4), R^n} = a. \text{Det}_{4 \times 4}(\vec{v}_4; \vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1) \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{R^n \text{ impair}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{R^n \text{ impair}} \right\|}$$

$$a \text{ réduit} = \psi_n \cdot \xi_n \cdot |\sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3), \vec{e}_4)|$$

$$a \text{ complet} = \psi_n \cdot \xi_n \cdot |\cos((O; \vec{e}_1), \vec{e}_1)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3), \vec{e}_4)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4), \vec{e}'_5)| \dots |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \dots; \vec{e}'_{n-1}), \vec{e}'_n)|$$

5.10e Croissance du vecteur polymixte dans $\{\vec{e}_i\}_5 \cup \{\vec{e}'_p\}(n-5)$

Présentation des acteurs :

$\vec{v}_1$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5\}$ et borné à une norme $||\vec{v}_1||$. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\vec{v}_2$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5\}$ et borné à une norme $||\vec{v}_2||$. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\vec{v}_3$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5\}$ et borné à une norme $||\vec{v}_3||$. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\vec{v}_4$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5\}$ et borné à une norme $||\vec{v}_4||$. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\vec{v}_5$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5\}$ et borné à une norme $||\vec{v}_5||$. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\vec{e}_1$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\vec{e}_1\}$ et borné à une norme 1. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\vec{e}_1\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\vec{e}_2$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\vec{e}_2\}$ et borné à une norme 1. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\vec{e}_2\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\vec{e}_3$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\vec{e}_3\}$ et borné à une norme 1. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\vec{e}_3\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\vec{e}_4$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\vec{e}_4\}$ et borné à une norme 1. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\vec{e}_4\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\vec{e}_5$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\vec{e}_5\}$ et borné à une norme 1. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\vec{e}_5\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\vec{e}'_6$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\vec{e}'_6\}$ et borné à une norme 1, orthogonal à tout autre vecteur de $\{\vec{e}_i\}_5 \cup \{\vec{e}'_p\}(n-5)$. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\vec{e}'_6\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5\}$ et borné à une norme $||\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1||$. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\overrightarrow{v_3 \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})}$ vecteur envoûteur d'un objet polymixial 3D formé sur $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e_5}\}$ et borné à une norme $|\overrightarrow{v_3 \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})}|$. C'est un vecteur qui peut changer d'aspect dans $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e_5}\}$ quand il se compose avec un vecteur ordinaire.

$\overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3 \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})}$ vecteur ordinaire générant un espace 1D, formé sur $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e_5}\}$ et borné à une norme $|\overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3 \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})}|$. C'est un vecteur qui ne peut pas changer d'aspect dans $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e_5}\}$ quand il se compose avec un autre vecteur ordinaire ou un vecteur envoûteur.

$\overrightarrow{pm}_{5//5} = \overrightarrow{v_5 \boxtimes (\overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3 \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})})}$ vecteur polymixte envoûteur d'un objet polymixial 5D formé sur R^5

$\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e_5}\}$ et borné à une norme $|\overrightarrow{v_5 \boxtimes (\overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3 \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})})}|$. C'est un vecteur qui peut changer d'aspect dans $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e_5}\}$ quand il se compose avec un vecteur ordinaire.

$\overrightarrow{pm}_{5//6} = \overrightarrow{e'_6} \wedge (\overrightarrow{v_5 \boxtimes (\overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3 \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})})})$ vecteur polymixte ordinaire générant un espace 1D, formé sur R^6

$\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e_5}; \overrightarrow{e'_6}\}$ et borné à une norme $|\overrightarrow{e'_6} \wedge (\overrightarrow{v_5 \boxtimes (\overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3 \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})})})|$. C'est un vecteur qui est soit nul, soit indéfini dans $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e_5}; \overrightarrow{e'_6}\}$ ou bien n'a qu'un seul aspect confiné à $\overrightarrow{e'_7}$ dans $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e_5}; \overrightarrow{e'_6}; \overrightarrow{e'_7}\}$.

Pour cette croissance on pose que chacun des vecteurs de la famille $\{\overrightarrow{v_5}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}\}$ est non nul. Si au moins un de ces vecteurs est nul, alors la séquence $\overrightarrow{v_5 \boxtimes (\overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3 \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})})}$ est soit polymixte de vecteur envoûteur nul, soit indéfini.

Par suite tous les polymixtes à partir de $\overrightarrow{pm}_{5//5} = \overrightarrow{e'_n} \wedge (\overrightarrow{v_5 \boxtimes (\overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3 \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})})})$ seraient aussi indéfinis.

On a :

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{v_1}(v_{1|1} \cdot \overrightarrow{e_1} + v_{1|2} \cdot \overrightarrow{e_2} + v_{1|3} \cdot \overrightarrow{e_3} + v_{1|4} \cdot \overrightarrow{e_4} + v_{1|5} \cdot \overrightarrow{e_5}) \text{conf} \{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e_5} \} \\ & \overrightarrow{v_2}(v_{2|1} \cdot \overrightarrow{e_1} + v_{2|2} \cdot \overrightarrow{e_2} + v_{2|3} \cdot \overrightarrow{e_3} + v_{2|4} \cdot \overrightarrow{e_4} + v_{2|5} \cdot \overrightarrow{e_5}) \text{conf} \{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e_5} \} \\ & \overrightarrow{v_3}(v_{3|1} \cdot \overrightarrow{e_1} + v_{3|2} \cdot \overrightarrow{e_2} + v_{3|3} \cdot \overrightarrow{e_3} + v_{3|4} \cdot \overrightarrow{e_4} + v_{3|5} \cdot \overrightarrow{e_5}) \text{conf} \{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e_5} \} \\ & \overrightarrow{v_4}(v_{4|1} \cdot \overrightarrow{e_1} + v_{4|2} \cdot \overrightarrow{e_2} + v_{4|3} \cdot \overrightarrow{e_3} + v_{4|4} \cdot \overrightarrow{e_4} + v_{4|5} \cdot \overrightarrow{e_5}) \text{conf} \{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e_5} \} \\ & \overrightarrow{v_5}(v_{5|1} \cdot \overrightarrow{e_1} + v_{5|2} \cdot \overrightarrow{e_2} + v_{5|3} \cdot \overrightarrow{e_3} + v_{5|4} \cdot \overrightarrow{e_4} + v_{5|5} \cdot \overrightarrow{e_5}) \text{conf} \{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e_5} \} \end{aligned}$$

$m = 5; n < 5$

l'objet $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_5})$ est forcément de dimension inférieure à 5. On ne détaille pas cette croissance dans ce cas. On se sert du théorème pour $m = 5$:

Si l'objet $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_5})$ est de dimension inférieure à 5, son polymixte est soit vecteur nul, soit vecteur indéfini.

$m = 5 ; n = 5$

Les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5$ sont confinés à la famille $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5\}$ qui est libre et génère R^5 . Il n'y a aucun vecteur $\vec{e}'_i$ et $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5$ occupent soit une droite, soit un plan, soit un volume, soit un objet 4D, soit un objet 5D. On distingue alors dans R^5 deux occurrences :

1) En application du théorème, si l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{v}_5)$ est de dimension inférieure à 5, son polymixte est soit vecteur nul, soit vecteur indéfini.

2) Si l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{v}_5)$ est 5D il y a assez de dimensions dans R^5 pour définir le polymixte envoûteur $\overrightarrow{v_5 \boxtimes (\vec{v}_4 \wedge \overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)})}$ qui est un envoûteur d'un objet polymixial 5D formé sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5\}$.

En effet, on a donc $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)$ 4D. Il y a assez de dimensions dans R^5 pour définir $\vec{v}_4 \wedge \overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)} \neq \vec{0}$ orthogonal à $\vec{v}_4$ et à $\overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ envoûteur d'un objet polymixial 3D formé sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5\}$. Le vecteur ordinaire $\vec{v}_5$ et le vecteur ordinaire $\vec{v}_4 \wedge \overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ sont liés si $\vec{v}_5$ est orthogonal à tous les vecteurs de l'objet polymixial 3D formé sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5\}$ et à $\vec{v}_4$. Dans le cas contraire, le vecteur ordinaire $\vec{v}_5$ et le vecteur ordinaire $\vec{v}_4 \wedge \overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$ sont libres entre eux.

On a le repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5)$ pentadimensionnel. On choisit librement dans cet espace 5D la valeur d'opérateur $\psi_5 = 1$ ou $\psi_5 = -1$ pour y caractériser l'orientation directe ou indirecte du produit vectoriel. Si une valeur est choisie pour une des deux orientations, la valeur contraire s'applique à l'orientation contraire.

On choisit la valeur d'opérateur ξ_5 pour caractériser l'orientation directoïde ou indirectoïde de l'objet $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5)$. Si l'objet est directoïde, alors ξ_5 est du signe qu'on a choisi pour ψ_5 qui caractérise l'orientation directe du produit vectoriel dans l'espace 5D. Si l'objet est indirectoïde, alors ξ_5 est du signe contraire à celui qu'on a choisi pour ψ_5 qui caractérise l'orientation directe du produit vectoriel dans l'espace 5D.

On liste les produits vectoriels non nuls avec des des angles quelconques entre les vecteurs de base de $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4\}$:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 &= (e_1 e_2)_{|1} \cdot \vec{e}_1 + (e_1 e_2)_{|2} \cdot \vec{e}_2 + (e_1 e_2)_{|3} \cdot \vec{e}_3 + (e_1 e_2)_{|4} \cdot \vec{e}_4 + (e_1 e_2)_{|5} \cdot \vec{e}_5 \\ \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 &= (e_1 e_3)_{|1} \cdot \vec{e}_1 + (e_1 e_3)_{|2} \cdot \vec{e}_2 + (e_1 e_3)_{|3} \cdot \vec{e}_3 + (e_1 e_3)_{|4} \cdot \vec{e}_4 + (e_1 e_3)_{|5} \cdot \vec{e}_5 \\ \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_4 &= (e_1 e_4)_{|1} \cdot \vec{e}_1 + (e_1 e_4)_{|2} \cdot \vec{e}_2 + (e_1 e_4)_{|3} \cdot \vec{e}_3 + (e_1 e_4)_{|4} \cdot \vec{e}_4 + (e_1 e_4)_{|5} \cdot \vec{e}_5 \\ \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_5 &= (e_1 e_5)_{|1} \cdot \vec{e}_1 + (e_1 e_5)_{|2} \cdot \vec{e}_2 + (e_1 e_5)_{|3} \cdot \vec{e}_3 + (e_1 e_5)_{|4} \cdot \vec{e}_4 + (e_1 e_5)_{|5} \cdot \vec{e}_5 \\ \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 &= (e_2 e_3)_{|1} \cdot \vec{e}_1 + (e_2 e_3)_{|2} \cdot \vec{e}_2 + (e_2 e_3)_{|3} \cdot \vec{e}_3 + (e_2 e_3)_{|4} \cdot \vec{e}_4 + (e_2 e_3)_{|5} \cdot \vec{e}_5 \\ \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_4 &= (e_2 e_4)_{|1} \cdot \vec{e}_1 + (e_2 e_4)_{|2} \cdot \vec{e}_2 + (e_2 e_4)_{|3} \cdot \vec{e}_3 + (e_2 e_4)_{|4} \cdot \vec{e}_4 + (e_2 e_4)_{|5} \cdot \vec{e}_5 \\ \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_5 &= (e_2 e_5)_{|1} \cdot \vec{e}_1 + (e_2 e_5)_{|2} \cdot \vec{e}_2 + (e_2 e_5)_{|3} \cdot \vec{e}_3 + (e_2 e_5)_{|4} \cdot \vec{e}_4 + (e_2 e_5)_{|5} \cdot \vec{e}_5 \\ \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_4 &= (e_3 e_4)_{|1} \cdot \vec{e}_1 + (e_3 e_4)_{|2} \cdot \vec{e}_2 + (e_3 e_4)_{|3} \cdot \vec{e}_3 + (e_3 e_4)_{|4} \cdot \vec{e}_4 + (e_3 e_4)_{|5} \cdot \vec{e}_5 \\ \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_5 &= (e_3 e_5)_{|1} \cdot \vec{e}_1 + (e_3 e_5)_{|2} \cdot \vec{e}_2 + (e_3 e_5)_{|3} \cdot \vec{e}_3 + (e_3 e_5)_{|4} \cdot \vec{e}_4 + (e_3 e_5)_{|5} \cdot \vec{e}_5 \\ \vec{e}_4 \wedge \vec{e}_5 &= (e_4 e_5)_{|1} \cdot \vec{e}_1 + (e_4 e_5)_{|2} \cdot \vec{e}_2 + (e_4 e_5)_{|3} \cdot \vec{e}_3 + (e_4 e_5)_{|4} \cdot \vec{e}_4 + (e_4 e_5)_{|5} \cdot \vec{e}_5 \end{aligned}$$

Mais on ne sait pas exprimer géométriquement leurs coordonnées comme on l'a fait dans l'espace euclidien. On commence donc par chercher une forme analytique de $\overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)}$, qui est un vecteur envoûteur d'un

objet polymixial3D formé sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5\}$. Son vecteur unitaire est donc $\frac{\overrightarrow{en\vec{v}}}{\|\overrightarrow{en\vec{v}}\|}$ qui représente

toutes les combinaisons linéaires possibles sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5\}$, et occupe donc toutes les directions dans R^5 , chaque direction ayant 2 sens.

L'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)$ est nécessairement 3D si l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{v}_5)$ est 5D. On donne ci-dessous son développé complet avec les formules que l'on connaît :

$$\overrightarrow{v_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)} \underset{(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3) \text{ 3D}}{=} \underset{(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3) \text{ 3D}}{conf\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5\}}$$

$$\begin{aligned} & [v_{3|1} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}) \cdot \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \cdot (e_1 e_2)_{|1} \\ & + v_{3|1} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1}) \cdot \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \cdot (e_1 e_3)_{|1} \\ & + v_{3|1} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|1}) \cdot \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \cdot (e_1 e_4)_{|1} \\ & + v_{3|1} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2}) \cdot \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \cdot (e_2 e_3)_{|1} \\ & + v_{3|1} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2}) \cdot \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \cdot (e_2 e_4)_{|1} \\ & + v_{3|1} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3}) \cdot \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \cdot (e_3 e_4)_{|1} \\ & + v_{3|1} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|1}) \cdot \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \cdot (e_1 e_5)_{|1} \\ & + v_{3|1} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|2}) \cdot \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \cdot (e_2 e_5)_{|1} \\ & + v_{3|1} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|3}) \cdot \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \cdot (e_3 e_5)_{|1} \\ & + v_{3|1} \cdot (v_{2|4} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|4}) \cdot \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \cdot (e_4 e_5)_{|1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + v_{3|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}) \cdot \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \cdot (e_1 e_2)_{|2} \\ & + v_{3|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1}) \cdot \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \cdot (e_1 e_3)_{|2} \\ & + v_{3|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|1}) \cdot \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \cdot (e_1 e_4)_{|2} \\ & + v_{3|2} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2}) \cdot \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \cdot (e_2 e_3)_{|2} \\ & + v_{3|2} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2}) \cdot \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \cdot (e_2 e_4)_{|2} \\ & + v_{3|2} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3}) \cdot \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \cdot (e_3 e_4)_{|2} \\ & + v_{3|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|1}) \cdot \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \cdot (e_1 e_5)_{|2} \\ & + v_{3|2} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|2}) \cdot \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \cdot (e_2 e_5)_{|2} \\ & + v_{3|2} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|3}) \cdot \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \cdot (e_3 e_5)_{|2} \\ & + v_{3|2} \cdot (v_{2|4} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|4}) \cdot \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \cdot (e_4 e_5)_{|2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + v_{3|3} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}) \cdot \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_3) \cdot (e_1 e_2)_{|3} \\ & + v_{3|3} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1}) \cdot \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_3) \cdot (e_1 e_3)_{|3} \\ & + v_{3|3} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|1}) \cdot \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_3) \cdot (e_1 e_4)_{|3} \\ & + v_{3|3} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2}) \cdot \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_3) \cdot (e_2 e_3)_{|3} \\ & + v_{3|3} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2}) \cdot \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_3) \cdot (e_2 e_4)_{|3} \\ & + v_{3|3} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3}) \cdot \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_3) \cdot (e_3 e_4)_{|3} \\ & + v_{3|3} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|1}) \cdot \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_3) \cdot (e_1 e_5)_{|3} \\ & + v_{3|3} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|2}) \cdot \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_3) \cdot (e_2 e_5)_{|3} \\ & + v_{3|3} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|3}) \cdot \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_3) \cdot (e_3 e_5)_{|3} \\ & + v_{3|3} \cdot (v_{2|4} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|4}) \cdot \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_3) \cdot (e_4 e_5)_{|3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + v_{3|4} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}) \cdot \cos(\vec{e}_4, \vec{e}_4) \cdot (e_1 e_2)_{|4} \\ & + v_{3|4} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1}) \cdot \cos(\vec{e}_4, \vec{e}_4) \cdot (e_1 e_3)_{|4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + v_{3|4} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}) \cdot \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_4) \cdot (e_1 e_2)_{|3} \\
& + v_{3|4} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1}) \cdot \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_4) \cdot (e_1 e_3)_{|3} \\
& + v_{3|4} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|1}) \cdot \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_4) \cdot (e_1 e_4)_{|3} \\
& + v_{3|4} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2}) \cdot \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_4) \cdot (e_2 e_3)_{|3} \\
& + v_{3|4} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2}) \cdot \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_4) \cdot (e_2 e_4)_{|3} \\
& + v_{3|4} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3}) \cdot \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_4) \cdot (e_3 e_4)_{|3} \\
& + v_{3|4} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|1}) \cdot \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_4) \cdot (e_1 e_5)_{|3} \\
& + v_{3|4} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|2}) \cdot \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_4) \cdot (e_2 e_5)_{|3} \\
& + v_{3|4} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|3}) \cdot \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_4) \cdot (e_3 e_5)_{|3} \\
& + v_{3|4} \cdot (v_{2|4} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|4}) \cdot \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_4) \cdot (e_4 e_5)_{|3}
\end{aligned}$$

$$\left. \frac{\overrightarrow{env}}{\left\{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e_5} \right\}} \right] \cdot \left\| \frac{\overrightarrow{env}}{\left\{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e_5} \right\}} \right\|$$

On réorganise cette écriture en faisant apparaître des termes contenus dans $Det_{5 \times 5}(\vec{v}_5; \vec{v}_4; \vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1)$. On considère le cas où $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5\}$ forment une base orthonormée pour affirmer que seules les termes surlignés en gris sont non nuls, et on conjecture que c'est aussi vrai dans une base $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5\}$ quelconque :

$$\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) \underset{(0; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}) \text{ 3D}}{=} \underset{(\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}) \text{ conf} \{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e_5} \}}{=}$$

$$\begin{aligned}
& [v_{3|1} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}) \cdot [\cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \cdot (e_1 e_2)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_1) \cdot (e_1 e_2)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_1) \cdot (e_1 e_2)_{|3} + \cos(\vec{e}_4, \vec{e}_1) \cdot (e_1 e_2)_{|4} \\
& \quad + \cos(\vec{e}_5, \vec{e}_1) \cdot (e_1 e_2)_{|5}] \\
& + v_{3|1} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1}) \cdot [\cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \cdot (e_1 e_3)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_1) \cdot (e_1 e_3)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_1) \cdot (e_1 e_3)_{|3} \\
& \quad + \cos(\vec{e}_4, \vec{e}_1) \cdot (e_1 e_3)_{|4} + \cos(\vec{e}_5, \vec{e}_1) \cdot (e_1 e_3)_{|5}] \\
& + v_{3|1} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|1}) \cdot [\cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \cdot (e_1 e_4)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_1) \cdot (e_1 e_4)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_1) \cdot (e_1 e_4)_{|3} + \cos(\vec{e}_4, \vec{e}_1) \cdot (e_1 e_4)_{|4} \\
& \quad + \cos(\vec{e}_5, \vec{e}_1) \cdot (e_1 e_4)_{|5}] \\
& + v_{3|1} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2}) \cdot [\cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \cdot (e_2 e_3)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_1) \cdot (e_2 e_3)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_1) \cdot (e_2 e_3)_{|3} + \cos(\vec{e}_4, \vec{e}_1) \cdot (e_2 e_3)_{|4} \\
& \quad + \cos(\vec{e}_5, \vec{e}_1) \cdot (e_2 e_3)_{|5}] \\
& + v_{3|1} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2}) \cdot [\cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \cdot (e_2 e_4)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_1) \cdot (e_2 e_4)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_1) \cdot (e_2 e_4)_{|3} + \cos(\vec{e}_4, \vec{e}_1) \cdot (e_2 e_4)_{|4} \\
& \quad + \cos(\vec{e}_5, \vec{e}_1) \cdot (e_2 e_4)_{|5}] \\
& + v_{3|1} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3}) \cdot [\cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \cdot (e_3 e_4)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_1) \cdot (e_3 e_4)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_1) \cdot (e_3 e_4)_{|3} + \cos(\vec{e}_4, \vec{e}_1) \cdot (e_3 e_4)_{|4} \\
& \quad + \cos(\vec{e}_5, \vec{e}_1) \cdot (e_3 e_4)_{|5}] \\
& + v_{3|1} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|1}) \cdot [\cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \cdot (e_1 e_5)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_1) \cdot (e_1 e_5)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_1) \cdot (e_1 e_5)_{|3} + \cos(\vec{e}_4, \vec{e}_1) \cdot (e_1 e_5)_{|4} \\
& \quad + \cos(\vec{e}_5, \vec{e}_1) \cdot (e_1 e_5)_{|5}] \\
& + v_{3|1} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|2}) \cdot [\cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \cdot (e_2 e_5)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_1) \cdot (e_2 e_5)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_1) \cdot (e_2 e_5)_{|3} + \cos(\vec{e}_4, \vec{e}_1) \cdot (e_2 e_5)_{|4} \\
& \quad + \cos(\vec{e}_5, \vec{e}_1) \cdot (e_2 e_5)_{|5}] \\
& + v_{3|1} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|3}) \cdot [\cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \cdot (e_3 e_5)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_1) \cdot (e_3 e_5)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_1) \cdot (e_3 e_5)_{|3} \\
& \quad + \cos(\vec{e}_4, \vec{e}_1) \cdot (e_3 e_5)_{|4} + \cos(\vec{e}_5, \vec{e}_1) \cdot (e_3 e_5)_{|5}] \\
& + v_{3|1} \cdot (v_{2|4} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|4}) \cdot [\cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \cdot (e_4 e_5)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_1) \cdot (e_4 e_5)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_1) \cdot (e_4 e_5)_{|3} \\
& \quad + \cos(\vec{e}_4, \vec{e}_1) \cdot (e_4 e_5)_{|4} + \cos(\vec{e}_5, \vec{e}_1) \cdot (e_4 e_5)_{|5}] \\
& + v_{3|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}) \cdot [\cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cdot (e_1 e_2)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \cdot (e_1 e_2)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_2) \cdot (e_1 e_2)_{|3} + \cos(\vec{e}_4, \vec{e}_2) \cdot (e_1 e_2)_{|4} \\
& \quad + \cos(\vec{e}_5, \vec{e}_2) \cdot (e_1 e_2)_{|5}]
\end{aligned}$$

[illegible]

[illegible]

En notant $((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4), \vec{e}_5)$ l'élévation du vecteur $\vec{e}_5$ au-dessus de l'objet $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4)$. On peut conjecturer l'égalité des termes non nuls :

[illegible]

$$\begin{aligned}
&= \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_3) \cdot (e_5 e_2)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3) \cdot (e_5 e_2)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_3) \cdot (e_5 e_2)_{|3} + \cos(\vec{e}_4, \vec{e}_3) \cdot (e_5 e_2)_{|4} + \cos(\vec{e}_5, \vec{e}_3) \cdot (e_5 e_2)_{|5} \\
&= \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_3) (e_4 e_5)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3) \cdot (e_4 e_5)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_3) \cdot (e_4 e_5)_{|3} + \cos(\vec{e}_4, \vec{e}_3) \cdot (e_4 e_5)_{|4} + \cos(\vec{e}_5, \vec{e}_3) \cdot (e_4 e_5)_{|5} \\
&= \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_4) \cdot (e_1 e_2)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_4) \cdot (e_1 e_2)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_4) \cdot (e_1 e_2)_{|3} + \cos(\vec{e}_4, \vec{e}_4) \cdot (e_1 e_2)_{|4} + \cos(\vec{e}_5, \vec{e}_4) \cdot (e_1 e_2)_{|5} \\
&= \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_4) \cdot (e_1 e_3)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_4) \cdot (e_1 e_3)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_4) \cdot (e_1 e_3)_{|3} + \cos(\vec{e}_4, \vec{e}_4) \cdot (e_1 e_3)_{|4} + \cos(\vec{e}_5, \vec{e}_4) \cdot (e_1 e_3)_{|5} \\
&= \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_4) \cdot (e_2 e_3)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_4) \cdot (e_2 e_3)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_4) \cdot (e_2 e_3)_{|3} + \cos(\vec{e}_4, \vec{e}_4) \cdot (e_2 e_3)_{|4} + \cos(\vec{e}_5, \vec{e}_4) \cdot (e_2 e_3)_{|5} \\
&= \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_4) \cdot (e_5 e_1)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_4) \cdot (e_5 e_1)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_4) \cdot (e_5 e_1)_{|3} + \cos(\vec{e}_4, \vec{e}_4) \cdot (e_5 e_1)_{|4} + \cos(\vec{e}_5, \vec{e}_4) \cdot (e_5 e_1)_{|5} \\
&= \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_4) \cdot (e_5 e_2)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_4) \cdot (e_5 e_2)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_4) \cdot (e_5 e_2)_{|3} + \cos(\vec{e}_4, \vec{e}_4) \cdot (e_5 e_2)_{|4} + \cos(\vec{e}_5, \vec{e}_4) \cdot (e_5 e_2)_{|5} \\
&= \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_4) (e_5 e_3)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_4) \cdot (e_5 e_3)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_4) \cdot (e_5 e_3)_{|3} + \cos(\vec{e}_4, \vec{e}_4) \cdot (e_5 e_3)_{|4} + \cos(\vec{e}_5, \vec{e}_4) \cdot (e_5 e_3)_{|5} \\
&= \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_5) \cdot (e_1 e_2)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_5) \cdot (e_1 e_2)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_5) \cdot (e_1 e_2)_{|3} + \cos(\vec{e}_4, \vec{e}_5) \cdot (e_1 e_2)_{|4} + \cos(\vec{e}_5, \vec{e}_5) \cdot (e_1 e_2)_{|5} \\
&= \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_5) \cdot (e_1 e_3)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_5) \cdot (e_1 e_3)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_5) \cdot (e_1 e_3)_{|3} + \cos(\vec{e}_4, \vec{e}_5) \cdot (e_1 e_3)_{|4} + \cos(\vec{e}_5, \vec{e}_5) \cdot (e_1 e_3)_{|5} \\
&= \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_5) \cdot (e_1 e_4)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_5) \cdot (e_1 e_4)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_5) \cdot (e_1 e_4)_{|3} + \cos(\vec{e}_4, \vec{e}_5) \cdot (e_1 e_4)_{|4} + \cos(\vec{e}_5, \vec{e}_5) \cdot (e_1 e_4)_{|5} \\
&= \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_5) \cdot (e_2 e_3)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_5) \cdot (e_2 e_3)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_5) \cdot (e_2 e_3)_{|3} + \cos(\vec{e}_4, \vec{e}_5) \cdot (e_2 e_3)_{|4} + \cos(\vec{e}_5, \vec{e}_5) \cdot (e_2 e_3)_{|5} \\
&= \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_5) \cdot (e_2 e_4)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_5) \cdot (e_2 e_4)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_5) \cdot (e_2 e_4)_{|3} + \cos(\vec{e}_4, \vec{e}_5) \cdot (e_2 e_4)_{|4} + \cos(\vec{e}_5, \vec{e}_5) \cdot (e_2 e_4)_{|5} \\
&= \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_5) \cdot (e_3 e_4)_{|1} + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_5) \cdot (e_3 e_4)_{|2} + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_5) \cdot (e_3 e_4)_{|3} + \cos(\vec{e}_4, \vec{e}_5) \cdot (e_3 e_4)_{|4} + \cos(\vec{e}_5, \vec{e}_5) \cdot (e_3 e_4)_{|5}
\end{aligned}$$

On en déduit alors :

$$\overrightarrow{v_3 \boxtimes (v_2 \wedge v_1)} \underset{(v_1; v_2; v_3) \text{ conf}\{e_1; e_2; e_3; e_4; e_5\} \quad (0; v_1; v_2; v_3) 3D}{=}$$

$$\psi_5 \cdot \xi_5 \cdot |\sin((0; \vec{e}_1), \vec{e}_2)| \cdot |\sin((0; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3)| \cdot |\sin((0; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3), \vec{e}_4)| \cdot |\sin((0; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4), \vec{e}_5)|$$

$$\begin{aligned}
&\cdot [(v_{3|3} \cdot (v_{2|4} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|4}) - v_{3|4} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|3}) + v_{3|5} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3})) \\
&+ (v_{3|2} \cdot (v_{2|4} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|4}) - v_{3|4} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|2}) + v_{3|5} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2})) \\
&+ (v_{3|2} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|3}) - v_{3|3} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|2}) + v_{3|5} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2})) \\
&+ (v_{3|2} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3}) - v_{3|3} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2}) + v_{3|4} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2})) \\
&+ (v_{3|1} \cdot (v_{2|4} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|4}) - v_{3|4} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|1}) + v_{3|5} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|1})) \\
&+ (v_{3|1} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|3}) - v_{3|3} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|1}) + v_{3|5} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1})) \\
&+ (v_{3|1} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3}) - v_{3|3} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|1}) + v_{3|4} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1})) \\
&+ (v_{3|1} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|2}) - v_{3|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|1}) + v_{3|5} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1})) \\
&+ (v_{3|1} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2}) - v_{3|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|1}) + v_{3|4} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1})) \\
&+ (v_{3|1} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2}) - v_{3|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1}) + v_{3|3} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}))] \cdot \frac{\overrightarrow{en\vec{v}}}{\left\| \frac{\overrightarrow{en\vec{v}}}{|\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5|} \right\|}
\end{aligned}$$

On calcule ensuite le vecteur ordinaire $\vec{v}_4 \wedge \overrightarrow{v_3 \boxtimes (v_2 \wedge v_1)}$ qui est une séquence de cette série $m = 5$.

$$\vec{v}_4 \wedge \overrightarrow{v_3 \boxtimes (v_2 \wedge v_1)} \underset{(v_1; v_2; v_3; v_4) \text{ conf}\{e_1; e_2; e_3; e_4; e_5\} \quad (0; v_1; v_2; v_3; v_4; v_5) 5D \quad (0; v_1; v_2; v_3; v_4) 4D}{=}$$

$$\cdot (v_{4|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{4|2} \cdot \vec{e}_2 + v_{4|3} \cdot \vec{e}_3 + v_{4|4} \cdot \vec{e}_4 + v_{4|5} \cdot \vec{e}_5) \wedge \left(\overrightarrow{v_3 \boxtimes (v_2 \wedge v_1)} \right)$$

On distribue $\overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e_5}\}}$ en une combinaison de $\frac{5!}{(5-3)!3!} = 10$ vecteurs envoûteurs $\overrightarrow{E}_p = \{\overrightarrow{E}_1, \overrightarrow{E}_2, \dots, \overrightarrow{E}_{10}\}$

dans la matrice des coordonnées $M_{3 \times 5}(\vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1)$ définies dans R^5 . On identifie dans cette matrice (en supprimant chaque fois une des 5 lignes de coordonnées) 10 déterminants $Det_{3 \times 3}(\vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1)$ de 3 colonnes et 3 lignes, sur lesquels on peut greffer $\{\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots, \vec{E}_{10}\}$ comme des vecteurs unitaires formés des combinaisons linéaires que l'on veut dans $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5\}$ lorsqu'ils se composent avec un des vecteurs de $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5\}$.

$$\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) \xrightarrow{(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) conf \{ \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_5} \} } = (0; \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) 3D$$

$$\psi_5, \xi_5. | \sin((0; \vec{e}_1), \vec{e}_2) |. | \sin((0; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3) |. | \sin((0; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3), \vec{e}_4) |. | \sin((0; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4), \vec{e}_5) |$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left(\left(v_{3|3} \cdot (v_{2|4} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|4}) - v_{3|4} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|3}) \right) + v_{3|5} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3}) \right) \cdot \overrightarrow{E_1} \\
& + \left(v_{3|2} \cdot (v_{2|4} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|4}) - v_{3|4} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|2}) + v_{3|5} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2}) \right) \cdot \overrightarrow{E_2} \\
& + \left(v_{3|2} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|3}) - v_{3|3} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|2}) + v_{3|5} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2}) \right) \cdot \overrightarrow{E_3} \\
& + (v_{3|2} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3}) - v_{3|3} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2}) + v_{3|4} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2})) \cdot \overrightarrow{E_4} \\
& + \left(v_{3|1} \cdot (v_{2|4} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|4}) - v_{3|4} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|1}) + v_{3|5} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|1}) \right) \cdot \overrightarrow{E_5} \\
& + \left(v_{3|1} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|3}) - v_{3|3} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|1}) + v_{3|5} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1}) \right) \cdot \overrightarrow{E_6} \\
& + (v_{3|1} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3}) - v_{3|3} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|1}) + v_{3|4} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1})) \cdot \overrightarrow{E_7} \\
& + \left(v_{3|1} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|2}) - v_{3|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|1}) + v_{3|5} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}) \right) \cdot \overrightarrow{E_8} \\
& + (v_{3|1} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2}) - v_{3|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|1}) + v_{3|4} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1})) \cdot \overrightarrow{E_9} \\
& + (v_{3|1} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2}) - v_{3|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1}) + v_{3|3} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1})) \cdot \overrightarrow{E_{10}}
\end{aligned}$$

On allège en notant :

$$a = \psi_{\xi_5} \cdot \xi_5 \cdot |\sin((0; \vec{e}_1), \vec{e}_2)| \cdot |\sin((0; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3)| \cdot |\sin((0; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3), \vec{e}_4)| \cdot |\sin((0; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4), \vec{e}_5)|$$

On liste les lignes polymixiales formées par les $\vec{E}_p$ dans leurs compositions avec les coordonnées portées par les vecteurs unitaires $\vec{e}_i$ de $\vec{v}_4$ dans :

$$\overrightarrow{v_4 \wedge v_3 \boxtimes (v_2 \wedge v_1)}}_{(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}) \text{conf} \{ \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_5} \}} = \begin{matrix} (0; \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}, \overrightarrow{v_5}) 5D \\ (0; \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}) 4D \end{matrix}$$

$$(v_{4|1}.\vec{e}_1 + v_{4|2}.\vec{e}_2 + v_{4|3}.\vec{e}_3 + v_{4|4}.\vec{e}_4 + v_{4|5}.\vec{e}_5) \wedge a. (\underset{\substack{3 \times 3 \\ 1}}{Det}(\vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1). \vec{E}_1 + \cdots + \underset{\substack{3 \times 3 \\ 10}}{Det}(\vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1). \vec{E}_{10})$$

On obtient alors une distribution des coordonnées de $\vec{v}_4$ sur les $\underset{p^5}{\underset{3 \times 3}{Det}}(\vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1)$ formant 50 lignes

polymixiales qui prennent chacune une valeur vectorielle puisque $\vec{v}_4 \wedge \left(\overrightarrow{\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)} \right)$ est un vecteur ordinaire:

$$\{\vec{n}_l\}(5.\frac{5!}{(5-3)!3!}) = \{\vec{n}_1; \vec{n}_2; \dots; \vec{n}_{50}\}$$

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 \wedge \vec{E}_1 &= \vec{n}_1 \\ \vec{e}_1 \wedge \vec{E}_2 &= \vec{n}_2 \\ \vec{e}_1 \wedge \vec{E}_3 &= \vec{n}_3 \\ \vec{e}_1 \wedge \vec{E}_4 &= \vec{n}_4\end{aligned}$$

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{E}_5 = \vec{e}_1 \wedge \vec{E}_6 = \vec{e}_1 \wedge \vec{E}_7 = \vec{e}_1 \wedge \vec{E}_8 = \vec{e}_1 \wedge \vec{E}_9 = \vec{e}_1 \wedge \vec{E}_{10} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned}\vec{e}_2 \wedge \vec{E}_1 &= \vec{n}_5 \\ \vec{e}_2 \wedge \vec{E}_5 &= -\vec{n}_6 \\ \vec{e}_2 \wedge \vec{E}_6 &= -\vec{n}_7 \\ \vec{e}_2 \wedge \vec{E}_7 &= -\vec{n}_8\end{aligned}$$

$$\vec{e}_2 \wedge \vec{E}_2 = \vec{e}_2 \wedge \vec{E}_3 = \vec{e}_2 \wedge \vec{E}_4 = \vec{e}_2 \wedge \vec{E}_8 = \vec{e}_2 \wedge \vec{E}_9 = \vec{e}_2 \wedge \vec{E}_{10} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned}\vec{e}_3 \wedge \vec{E}_2 &= -\vec{n}_9 \\ \vec{e}_3 \wedge \vec{E}_5 &= -\vec{n}_{10} \\ \vec{e}_3 \wedge \vec{E}_8 &= \vec{n}_{11} \\ \vec{e}_3 \wedge \vec{E}_9 &= \vec{n}_{12}\end{aligned}$$

$$\vec{e}_3 \wedge \vec{E}_1 = \vec{e}_3 \wedge \vec{E}_3 = \vec{e}_3 \wedge \vec{E}_4 = \vec{e}_3 \wedge \vec{E}_6 = \vec{e}_3 \wedge \vec{E}_7 = \vec{e}_3 \wedge \vec{E}_{10} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned}\vec{e}_4 \wedge \vec{E}_3 &= \vec{n}_{13} \\ \vec{e}_4 \wedge \vec{E}_6 &= \vec{n}_{14} \\ \vec{e}_4 \wedge \vec{E}_8 &= \vec{n}_{15} \\ \vec{e}_4 \wedge \vec{E}_{10} &= -\vec{n}_{16}\end{aligned}$$

$$\vec{e}_4 \wedge \vec{E}_1 = \vec{e}_4 \wedge \vec{E}_2 = \vec{e}_4 \wedge \vec{E}_4 = \vec{e}_4 \wedge \vec{E}_5 = \vec{e}_4 \wedge \vec{E}_7 = \vec{e}_4 \wedge \vec{E}_9 = \vec{0}$$

$$\begin{aligned}\vec{e}_5 \wedge \vec{E}_4 &= -\vec{n}_{17} \\ \vec{e}_5 \wedge \vec{E}_7 &= -\vec{n}_{18} \\ \vec{e}_5 \wedge \vec{E}_9 &= -\vec{n}_{19} \\ \vec{e}_5 \wedge \vec{E}_{10} &= -\vec{n}_{20}\end{aligned}$$

$$\vec{e}_5 \wedge \vec{E}_1 = \vec{e}_5 \wedge \vec{E}_2 = \vec{e}_5 \wedge \vec{E}_3 = \vec{e}_5 \wedge \vec{E}_5 = \vec{e}_5 \wedge \vec{E}_6 = \vec{e}_5 \wedge \vec{E}_8 = \vec{0}$$

D'où , en distribuant :

$$\vec{v}_4 \wedge \overrightarrow{\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)} \stackrel{\substack{(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4) \text{conf}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\} \\ (O; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5) 5D \\ (O; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4) 4D}}{=}}$$

$$(\vec{v}_{4|1} \cdot \vec{e}_1 + \vec{v}_{4|2} \cdot \vec{e}_2 + \vec{v}_{4|3} \cdot \vec{e}_3 + \vec{v}_{4|4} \cdot \vec{e}_4 + \vec{v}_{4|5} \cdot \vec{e}_5) \wedge \overrightarrow{(\vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1))}$$

$$= a.$$

$$\begin{aligned}& [+v_{4|2} \cdot (v_{3|3} \cdot (v_{2|4} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|4}) - v_{3|4} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|3}) + v_{3|5} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3})) \cdot \vec{n}_5 \\ & - v_{4|3} \cdot (v_{3|2} \cdot (v_{2|4} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|4}) - v_{3|4} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|2}) + v_{3|5} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2})) \cdot \vec{n}_9 \\ & + v_{4|4} \cdot (v_{3|2} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|3}) - v_{3|3} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|2}) + v_{3|5} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2})) \cdot \vec{n}_{13} \\ & - v_{4|5} \cdot (v_{3|2} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3}) - v_{3|3} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2}) + v_{3|4} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2})) \cdot \vec{n}_{17}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +v_{4|1} \cdot \left(v_{3|3} \cdot (v_{2|4} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|4}) - v_{3|4} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|3}) + v_{3|5} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3}) \right) \cdot \vec{n}_1 \\
& -v_{4|3} \cdot \left(v_{3|1} \cdot (v_{2|4} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|4}) - v_{3|4} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|1}) + v_{3|5} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|1}) \right) \cdot \vec{n}_{10} \\
& +v_{4|4} \cdot \left(v_{3|1} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|3}) - v_{3|3} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|1}) + v_{3|5} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1}) \right) \cdot \vec{n}_{14} \\
& -v_{4|5} \cdot \left(v_{3|1} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3}) - v_{3|3} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|1}) + v_{3|4} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1}) \right) \cdot \vec{n}_{18} \\
\\
& +v_{4|1} \cdot \left(v_{3|2} \cdot (v_{2|4} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|4}) - v_{3|4} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|2}) + v_{3|5} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2}) \right) \cdot \vec{n}_2 \\
& -v_{4|2} \cdot \left(v_{3|1} \cdot (v_{2|4} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|4}) - v_{3|4} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|1}) + v_{3|5} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|1}) \right) \cdot \vec{n}_6 \\
& +v_{4|4} \cdot \left(v_{3|1} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|2}) - v_{3|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|1}) + v_{3|5} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}) \right) \cdot \vec{n}_{15} \\
& -v_{4|5} \cdot \left(v_{3|1} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2}) - v_{3|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|1}) + v_{3|4} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}) \right) \cdot \vec{n}_{19} \\
\\
& +v_{4|1} \cdot \left(v_{3|2} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|3}) - v_{3|3} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|2}) + v_{3|5} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2}) \right) \cdot \vec{n}_3 \\
& -v_{4|2} \cdot \left(v_{3|1} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|3}) - v_{3|3} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|1}) + v_{3|5} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1}) \right) \cdot \vec{n}_7 \\
& +v_{4|3} \cdot \left(v_{3|1} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|2}) - v_{3|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|1}) + v_{3|5} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}) \right) \cdot \vec{n}_{11} \\
& -v_{4|5} \cdot \left(v_{3|1} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2}) - v_{3|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1}) + v_{3|3} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}) \right) \cdot \vec{n}_{20} \\
\\
& +v_{4|1} \cdot \left(v_{3|2} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3}) - v_{3|3} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2}) + v_{3|4} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2}) \right) \cdot \vec{n}_4 \\
& -v_{4|2} \cdot \left(v_{3|1} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3}) - v_{3|3} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|1}) + v_{3|4} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1}) \right) \cdot \vec{n}_8 \\
& +v_{4|3} \cdot \left(v_{3|1} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2}) - v_{3|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|1}) + v_{3|4} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}) \right) \cdot \vec{n}_{12} \\
& -v_{4|4} \cdot \left(v_{3|1} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2}) - v_{3|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1}) + v_{3|3} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}) \right) \cdot \vec{n}_{16}
\end{aligned}$$

On obtient alors ce que l'on souhaitait, qui était de mettre en évidence cinq déterminants de matrice de matrice 4 colonnes et 5 lignes.

On précise la constante a dans sa forme complète avec avec $|\cos((O; \vec{e}_1), \vec{e}_1)| = 1$ C'est une pure fourniture d'informations puisque $a \text{ complet} = a \text{ réduit} = a$:

$$\begin{aligned}
a \text{ complet} = & \psi_5 \cdot \xi_5 \cdot |\cos((O; \vec{e}_1), \vec{e}_1)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3)| \\
& \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3), \vec{e}_4)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4), \vec{e}_5)|
\end{aligned}$$

On donne ensuite le polymixte $\overrightarrow{pm}_{5//5}^{R^5}$ qui est donc un envoûteur d'un objet polymixial 5D formé sur $R^5 =$

$\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5\}$ et dont le vecteur unitaire $\frac{\overrightarrow{en\vec{v}}_{\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5\}}}{\left\| \overrightarrow{en\vec{v}}_{\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5\}} \right\|}$ représente toutes les combinaisons linéaires possibles sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5\}$,

On a donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{pm}_{5//5}^{R^5} &= \overrightarrow{v_5 \boxtimes (v_4 \wedge \overrightarrow{v_3 \boxtimes (v_2 \wedge v_1)})} \\ &\quad (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_5}) 5D \\ &\quad (\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_5}) conf\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e_5}\} \end{aligned}$$

On l'aborde par son développ   :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{pm}_{5//5}^{R^5} &= \overrightarrow{(v_{5|1} \cdot \overrightarrow{e_1} + v_{5|2} \cdot \overrightarrow{e_2} + v_{5|3} \cdot \overrightarrow{e_3} + v_{5|4} \cdot \overrightarrow{e_4} + v_{5|5} \cdot \overrightarrow{e_5}) \boxtimes (\overrightarrow{v_4 \wedge \overrightarrow{v_3 \boxtimes (v_2 \wedge v_1)}})} \\ &\quad (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_5}) 5D \\ &\quad (\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_5}) \\ &\quad conf\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e_5}\} \end{aligned}$$

Les lignes polymixiales $\overrightarrow{n_1}, \dots, \overrightarrow{n_{20}}$ en se combinant en produits scalaires avec $\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e_5}$ forment $5 \times 20 = 100$ nouvelles lignes polymixiales pour reformer un envo  teur de $R^5 = \{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e_5}\}$.

Elles prennent chacune une valeur vectorielle. On note $\frac{\overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e_5}\}}}{\left\| \frac{\overrightarrow{env}_{\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e_5}\}}}{R^5} \right\|} = \frac{\overrightarrow{env}_{R^5}}{\left\| \frac{\overrightarrow{env}_{R^5}}{R^5} \right\|}$:

$$1. \frac{\overrightarrow{env}_{R^5}}{\left\| \frac{\overrightarrow{env}_{R^5}}{R^5} \right\|} \text{ ou } -1. \frac{\overrightarrow{env}_{R^5}}{\left\| \frac{\overrightarrow{env}_{R^5}}{R^5} \right\|} \text{ ou } 0. \frac{\overrightarrow{env}_{R^5}}{\left\| \frac{\overrightarrow{env}_{R^5}}{R^5} \right\|}$$

puisque $\overrightarrow{v_5 \boxtimes (v_4 \wedge \overrightarrow{v_3 \boxtimes (v_2 \wedge v_1)})}$ est un vecteur envo  teur, on a ce qu'on souhaite voir :

$$\overrightarrow{e_1} \boxtimes \overrightarrow{n_5} = \overrightarrow{e_1} \boxtimes \overrightarrow{n_9} = \overrightarrow{e_1} \boxtimes \overrightarrow{n_{13}} = \overrightarrow{e_1} \boxtimes \overrightarrow{n_{17}} = 1. \frac{\overrightarrow{env}_{R^5}}{\left\| \frac{\overrightarrow{env}_{R^5}}{R^5} \right\|}$$

Note : $\overrightarrow{e_1} \boxtimes \overrightarrow{n_5}$ se lit comme la ligne polymixiale $\overrightarrow{e_1} \boxtimes (\overrightarrow{e_2} \wedge \overrightarrow{E_1}) = 1. \frac{\overrightarrow{env}_{R^5}}{\left\| \frac{\overrightarrow{env}_{R^5}}{R^5} \right\|}$

$$\overrightarrow{e_1} \boxtimes \overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{e_1} \boxtimes \overrightarrow{n_{10}} = \overrightarrow{e_1} \boxtimes \overrightarrow{n_{14}} = \overrightarrow{e_1} \boxtimes \overrightarrow{n_{18}} = 0. \frac{\overrightarrow{env}_{R^5}}{\left\| \frac{\overrightarrow{env}_{R^5}}{R^5} \right\|}$$

$$\overrightarrow{e_1} \boxtimes \overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{e_1} \boxtimes \overrightarrow{n_6} = \overrightarrow{e_1} \boxtimes \overrightarrow{n_{15}} = \overrightarrow{e_1} \boxtimes \overrightarrow{n_{19}} = 0. \frac{\overrightarrow{env}_{R^5}}{\left\| \frac{\overrightarrow{env}_{R^5}}{R^5} \right\|}$$

$$\overrightarrow{e_1} \boxtimes \overrightarrow{n_3} = \overrightarrow{e_1} \boxtimes \overrightarrow{n_7} = \overrightarrow{e_1} \boxtimes \overrightarrow{n_{11}} = \overrightarrow{e_1} \boxtimes \overrightarrow{n_{20}} = 0. \frac{\overrightarrow{env}_{R^5}}{\left\| \frac{\overrightarrow{env}_{R^5}}{R^5} \right\|}$$

$$\overrightarrow{e_1} \boxtimes \overrightarrow{n_4} = \overrightarrow{e_1} \boxtimes \overrightarrow{n_8} = \overrightarrow{e_1} \boxtimes \overrightarrow{n_{12}} = \overrightarrow{e_1} \boxtimes \overrightarrow{n_{16}} = 0. \frac{\overrightarrow{env}_{R^5}}{\left\| \frac{\overrightarrow{env}_{R^5}}{R^5} \right\|}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{e_4} \boxtimes \overrightarrow{n_2} &= \overrightarrow{e_4} \boxtimes \overrightarrow{n_6} = \overrightarrow{e_4} \boxtimes \overrightarrow{n_{15}} = \overrightarrow{e_4} \boxtimes \overrightarrow{n_{19}} = 0. \frac{\overrightarrow{env}_{R^5}}{\left| \overrightarrow{env}_{R^5} \right|} \\
\overrightarrow{e_4} \boxtimes \overrightarrow{n_4} &= \overrightarrow{e_4} \boxtimes \overrightarrow{n_8} = \overrightarrow{e_4} \boxtimes \overrightarrow{n_{12}} = \overrightarrow{e_4} \boxtimes \overrightarrow{n_{16}} = 0. \frac{\overrightarrow{env}_{R^5}}{\left| \overrightarrow{env}_{R^5} \right|} \\
\overrightarrow{e_5} \boxtimes \overrightarrow{n_4} &= \overrightarrow{e_5} \boxtimes \overrightarrow{n_8} = \overrightarrow{e_5} \boxtimes \overrightarrow{n_{12}} = \overrightarrow{e_5} \boxtimes \overrightarrow{n_{16}} = 1. \frac{\overrightarrow{env}_{R^5}}{\left| \overrightarrow{env}_{R^5} \right|} \\
\overrightarrow{e_5} \boxtimes \overrightarrow{n_5} &= \overrightarrow{e_5} \boxtimes \overrightarrow{n_9} = \overrightarrow{e_5} \boxtimes \overrightarrow{n_{13}} = \overrightarrow{e_5} \boxtimes \overrightarrow{n_{17}} = 0. \frac{\overrightarrow{env}_{R^5}}{\left| \overrightarrow{env}_{R^5} \right|} \\
\overrightarrow{e_5} \boxtimes \overrightarrow{n_1} &= \overrightarrow{e_5} \boxtimes \overrightarrow{n_{10}} = \overrightarrow{e_5} \boxtimes \overrightarrow{n_{14}} = \overrightarrow{e_5} \boxtimes \overrightarrow{n_{18}} = 0. \frac{\overrightarrow{env}_{R^5}}{\left| \overrightarrow{env}_{R^5} \right|} \\
\overrightarrow{e_5} \boxtimes \overrightarrow{n_2} &= \overrightarrow{e_5} \boxtimes \overrightarrow{n_6} = \overrightarrow{e_5} \boxtimes \overrightarrow{n_{15}} = \overrightarrow{e_5} \boxtimes \overrightarrow{n_{19}} = 0. \frac{\overrightarrow{env}_{R^5}}{\left| \overrightarrow{env}_{R^5} \right|} \\
\overrightarrow{e_5} \boxtimes \overrightarrow{n_3} &= \overrightarrow{e_5} \boxtimes \overrightarrow{n_7} = \overrightarrow{e_5} \boxtimes \overrightarrow{n_{11}} = \overrightarrow{e_5} \boxtimes \overrightarrow{n_{20}} = 0. \frac{\overrightarrow{env}_{R^5}}{\left| \overrightarrow{env}_{R^5} \right|}
\end{aligned}$$

On reconstitue donc :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{pm}_{5//5}^{R^5} = \\
&\quad (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_5}) 5D \\
&\quad (\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_5}) conf\{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e_5} \} \\
&= a. \\
&[v_{5|1} \cdot [v_{4|2} \cdot (v_{3|3} \cdot (v_{2|4} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|4}) - v_{3|4} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|3}) + v_{3|5} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3})) \\
&\quad - v_{4|3} \cdot (v_{3|2} \cdot (v_{2|4} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|4}) - v_{3|4} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|2}) + v_{3|5} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2})) \\
&\quad + v_{4|4} \cdot (v_{3|2} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|3}) - v_{3|3} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|2}) + v_{3|5} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2})) \\
&\quad - v_{4|5} \cdot (v_{3|2} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3}) - v_{3|3} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2}) + v_{3|4} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2}))] \\
&- v_{5|2} \cdot [v_{4|1} \cdot (v_{3|3} \cdot (v_{2|4} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|4}) - v_{3|4} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|3}) + v_{3|5} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3})) \\
&\quad - v_{4|3} \cdot (v_{3|1} \cdot (v_{2|4} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|4}) - v_{3|4} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|1}) + v_{3|5} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|1})) \\
&\quad + v_{4|4} \cdot (v_{3|1} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|3}) - v_{3|3} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|1}) + v_{3|5} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1})) \\
&\quad - v_{4|5} \cdot (v_{3|1} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3}) - v_{3|3} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|1}) + v_{3|4} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1}))] \\
&+ v_{5|3} \cdot [v_{4|1} \cdot (v_{3|2} \cdot (v_{2|4} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|4}) - v_{3|4} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|2}) + v_{3|5} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2})) \\
&\quad - v_{4|2} \cdot (v_{3|1} \cdot (v_{2|4} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|4}) - v_{3|4} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|1}) + v_{3|5} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|1})) \\
&\quad + v_{4|4} \cdot (v_{3|1} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|2}) - v_{3|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|1}) + v_{3|5} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -v_{4|5} \cdot \left(v_{3|1} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2}) - v_{3|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|1}) + v_{3|4} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}) \right) \\
& -v_{5|4} \cdot \left[v_{4|1} \cdot \left(v_{3|2} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|3}) - v_{3|3} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|2}) + v_{3|5} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2}) \right) \right. \\
& \quad -v_{4|2} \cdot \left(v_{3|1} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|3}) - v_{3|3} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|1}) + v_{3|5} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1}) \right) \\
& \quad +v_{4|3} \cdot \left(v_{3|1} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|2}) - v_{3|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|5} - v_{2|5} \cdot v_{1|1}) + v_{3|5} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}) \right) \\
& \quad \left. -v_{4|5} \cdot \left(v_{3|1} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2}) - v_{3|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1}) + v_{3|3} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}) \right) \right] \\
& +v_{5|5} \cdot \left[v_{4|1} \cdot \left(v_{3|2} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3}) - v_{3|3} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2}) + v_{3|4} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2}) \right) \right. \\
& \quad -v_{4|2} \cdot \left(v_{3|1} \cdot (v_{2|3} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|3}) - v_{3|3} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|1}) + v_{3|4} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1}) \right) \\
& \quad +v_{4|3} \cdot \left(v_{3|1} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|2}) - v_{3|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|4} - v_{2|4} \cdot v_{1|1}) + v_{3|4} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}) \right) \\
& \quad \left. -v_{4|4} \cdot \left(v_{3|1} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|2}) - v_{3|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|3} - v_{2|3} \cdot v_{1|1}) + v_{3|3} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{1|2} - v_{2|2} \cdot v_{1|1}) \right) \right] \cdot \frac{\overrightarrow{env}}{\left| \frac{\overrightarrow{env}}{\{e_1; e_2; e_3; e_4; e_5\}} \right|}
\end{aligned}$$

Qu'on écrit plus simplement :

$$\begin{aligned}
& \frac{\overrightarrow{pm}}{5//5} \quad R^5 \quad (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_5}) 5D \quad \left(\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_5} \right) conf \{ \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e_5} \} = a. Det_{5 \times 5}(\overrightarrow{v_5}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \cdot \frac{\overrightarrow{env}}{\left| \frac{\overrightarrow{env}}{\{e_1; e_2; e_3; e_4; e_5\}} \right|} \\
& a \text{ réduit} = \psi_5 \cdot \xi_5 \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_2})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_3})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}), \overrightarrow{e_4})| \\
& \quad \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}), \overrightarrow{e_5})| \\
& a \text{ complet} = \psi_5 \cdot \xi_5 \cdot |\cos((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_1})| \cdot \psi_5 \cdot \xi_5 \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_2})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_3})| \\
& \quad \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}), \overrightarrow{e_4})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}), \overrightarrow{e_5})|
\end{aligned}$$

Sa coordonnée dans le repère $(O; \frac{\overrightarrow{env}}{\left| \frac{\overrightarrow{env}}{\{e_1; e_2; e_3; e_4; e_5\}} \right|})$ unidimensionnel occupant virtuellement tout R^5 avec une norme 1 est la mesure orientée d'un objet 5D dans R^5 . Le polymixte envoûteur $\frac{\overrightarrow{pm}}{5//5}$ occupe virtuellement tout R^5 avec une norme $||\frac{\overrightarrow{pm}}{5//5}|| = |a. Det_{5 \times 5}(\overrightarrow{v_5}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})|$. Pratiquement parlant, il envoûte un objet polymixial 5D de norme $|a. Det_{5 \times 5}(\overrightarrow{v_5}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})|$ dans le repère $(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e_5})$.

Cet objet est mesuré en multiples d'objet polymixial 5D hypercubique de valeur 1.

Conclusion

On conclut que si $(O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_5}) 5D$, $\frac{\overrightarrow{pm}}{5//5}$ est défini non nul. Le vecteur ordinaire $\overrightarrow{v_5}$ et le vecteur ordinaire $\overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})$ sont liés si $\overrightarrow{v_5}$ est orthogonal à tous les vecteurs de l'objet polymixial 3D formé

sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5\}$ et à $\vec{v}_4$. Dans le cas contraire, Le vecteur ordinaire $\vec{v}_5$ et le vecteur ordinaire $\vec{v}_4 \wedge \vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)$ sont libres entre eux.

$m = 5; n = 6$

Le repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5; \vec{e}'_6)$ est 6D. On sait que si l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{v}_5)$ est de dimension inférieure à 5, le vecteur $\vec{e}'_6$ se composera avec un vecteur nul ou indéfini. Par conséquent le polymixte $\overrightarrow{pm}_{5//6}^{R^6}$

sera indéfini. On considère donc $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{v}_5)$ 5D. Donc l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{v}_5; \vec{e}'_6)$ est 6D. Le vecteur $\vec{e}'_6$ est orthogonal à tous les vecteurs formés par combinaisons linéaires sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5\}$ et n'est pas dans l'espace de l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{v}_5)$. Le vecteur ordinaire $\vec{e}'_6$ et le vecteur envoûteur $\vec{v}_5 \boxtimes (\vec{v}_4 \wedge \vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1))$ sont libres entre eux.

Cependant il n'y a pas assez de dimensions dans R^6 pour définir un produit vectoriel des vecteurs $\vec{e}'_6$ et $\vec{v}_5 \boxtimes (\vec{v}_4 \wedge \vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1))$ envoûteur d'un objet polymixial 5D formé sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5\}$. Le polymixte ordinaire est donc indéfini par manque de dimensions :

$$\overrightarrow{pm}_{5//6}^{R^6} = \vec{e}'_6 \wedge \vec{v}_5 \boxtimes (\vec{v}_4 \wedge \vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1)) = \begin{matrix} \text{indéfini} \\ (O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{v}_5; \vec{e}'_6) 6D \\ (\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{v}_5) \text{conf} \{ \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5 \} \\ (O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{v}_5) 5D \end{matrix}$$

Conclusion

On conclut que si l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{v}_5; \vec{e}'_6)$ est de dimension égale à 6, $\overrightarrow{pm}_{5//6}^{R^6}$ n'est pas défini par manque de dimensions. Le vecteur ordinaire $\vec{e}'_6$ et le vecteur envoûteur $\vec{v}_5 \boxtimes (\vec{v}_4 \wedge \vec{v}_3 \boxtimes (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1))$ sont libres entre eux.

$m = 5; n = 7$

Le repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5; \vec{e}'_6; \vec{e}'_7)$ est 7D. On sait que si l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{v}_5)$ est de dimension inférieure à 5, le vecteur $\vec{e}'_7$ se composera avec un vecteur nul ou indéfini. Par conséquent le polymixte $\overrightarrow{pm}_{5//7}^{R^7}$

sera indéfini. On considère donc $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{v}_5)$ 5D.

Donc l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{v}_5; \vec{e}'_6; \vec{e}'_7)$ est 7D. Le vecteur $\vec{e}'_7$ est orthogonal à tous les vecteurs formés par combinaisons linéaires sur $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5; \vec{e}'_6\}$ et n'est pas dans l'espace de l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{v}_5; \vec{e}'_6)$.

On allège en symbolisant la constante a dans sa forme complète. C'est une pure fourniture d'informations puisque $a \text{ complet} = a \text{ réduit} = a$

$$a \text{ complet} = \psi_7 \cdot \xi_7 \cdot |\cos((O; \vec{e}_1), \vec{e}_1)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3), \vec{e}_4)| \\ \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4), \vec{e}_5)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5), \vec{e}'_6)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5; \vec{e}'_6), \vec{e}'_7)|$$

Par suite :

$$\overrightarrow{e'_6} \wedge \overrightarrow{v_5} \boxtimes (\overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})) \xrightarrow{\quad} \begin{matrix} = \\ (O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{v}_5; \vec{e}'_6; \vec{e}'_7)_{7D} \\ (\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{v}_5) \text{conf} \{ \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5 \} \\ (O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{v}_5)_{5D} \end{matrix} a. \underset{5 \times 5}{Det}(\vec{v}_5; \vec{v}_4; \vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1) \cdot \overrightarrow{e'_7}$$

Et ensuite on donne le polymixte $\overrightarrow{pm}_{5//7}^{R^7}$ qui est donc un envoûteur d'un objet polymixial 5D formé sur $R^7 =$

$\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5; \vec{e}'_6; \vec{e}'_7\}$, il occupe toutes les directions de R^7 , chaque direction ayant 2 sens, et est borné à une norme :

$$\overrightarrow{pm}_{5//7}^{R^7} = \begin{matrix} \xrightarrow{\quad} \\ (O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{v}_5; \vec{e}'_6; \vec{e}'_7)_{7D} \\ (\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{v}_5) \text{conf} \{ \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5 \} \\ (O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{v}_5)_{5D} \end{matrix} \overrightarrow{e'_7} \boxtimes (\overrightarrow{e'_6} \wedge \overrightarrow{v_5} \boxtimes (\overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}))) \\ = \left[\overrightarrow{e'_7} \boxtimes (\overrightarrow{e'_6} \wedge \overrightarrow{v_5} \boxtimes (\overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}))) \right] \cdot \frac{\overrightarrow{env} \{ \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5; \vec{e}'_6; \vec{e}'_7 \}}{\left\| \overrightarrow{env} \{ \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5; \vec{e}'_6; \vec{e}'_7 \} \right\|} \\ \overrightarrow{pm}_{5//7}^{R^7} = [a. \underset{5 \times 5}{Det}(\vec{v}_5; \vec{v}_4; \vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1) \cdot \overrightarrow{e'_7} \boxtimes \overrightarrow{e'_7}] \cdot \frac{\overrightarrow{env} \{ \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5; \vec{e}'_6; \vec{e}'_7 \}}{\left\| \overrightarrow{env} \{ \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5; \vec{e}'_6; \vec{e}'_7 \} \right\|}$$

Donc

$$\overrightarrow{pm}_{5//7}^{R^7} = a. \underset{5 \times 5}{Det}(\vec{v}_5; \vec{v}_4; \vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1) \cdot \frac{\overrightarrow{env} \{ \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5; \vec{e}'_6; \vec{e}'_7 \}}{\left\| \overrightarrow{env} \{ \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5; \vec{e}'_6; \vec{e}'_7 \} \right\|}$$

$$a \text{ réduit} = \psi_7 \cdot \xi_7 \cdot |\sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3), \vec{e}_4)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4), \vec{e}_5)|$$

$$a_{complet} = \psi_7 \cdot \xi_7 \cdot |\cos((O; \vec{e}_1), \vec{e}_1)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3), \vec{e}_4)| \\ \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4), \vec{e}_5)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5), \vec{e}'_6)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5; \vec{e}'_6), \vec{e}'_7)|$$

Sa coordonnée dans le repère $(O; \overrightarrow{\left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e_5}; \overrightarrow{e'_6}; \overrightarrow{e'_7} \end{matrix} \right\}})$ unidimensionnel occupant virtuellement tout R^7

avec une norme 1 est la mesure orientée d'un objet 5D (volume orienté) dans R^7 . C'est en valeur absolue la même mesure que dans R^{57} . Le polymixte envoûteur $\overrightarrow{pm}_{5//7}$ occupe virtuellement tout R^7 avec une norme

$$||\overrightarrow{pm}_{5//7}|| = |a_{5 \times 5} \cdot Det(\overrightarrow{v_5}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})|. \text{ Pratiquement parlant, il envoûte un hyper objet 5D de norme } \\ ||\overrightarrow{pm}_{5//7}|| = |a_{5 \times 5} \cdot Det(\overrightarrow{v_5}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})| \text{ dans le repère } (O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5; \vec{e}'_6; \vec{e}'_7).$$

Cet objet est mesuré en multiples d'objet polymixial 5D hypercubique de valeur 1.

Conclusion

On conclut que si l'objet $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{v}_5; \vec{e}'_6; \vec{e}'_7)$ est de dimension égale à 7, $\overrightarrow{pm}_{5//7}$ est défini non nul.

Le vecteur ordinaire $\vec{e}'_7$ et le vecteur ordinaire $\vec{e}'_6 \wedge \overrightarrow{v_5} \boxtimes (\overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}))$ sont liés.

Conclusion pour $m = 5$; $n \geq 5$ et $(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{v}_5)5D$

On poursuit :

$$\overrightarrow{pm}_{5//8} = \overrightarrow{e'_8} \wedge \overrightarrow{e'_7} \boxtimes (\overrightarrow{e'_6} \wedge (\overrightarrow{e'_5} \boxtimes (\overrightarrow{e'_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})))) = \text{indéfini}$$

$$\overrightarrow{pm}_{5//9} = \overrightarrow{e'_9} \boxtimes (\overrightarrow{e'_8} \wedge \overrightarrow{e'_7} \boxtimes (\overrightarrow{e'_6} \wedge \overrightarrow{v_5} \boxtimes (\overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1})))) = a_{5 \times 5} \cdot Det(\overrightarrow{v_5}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{\left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \\ \overrightarrow{e_5}; \overrightarrow{e'_6}; \overrightarrow{e'_7}; \overrightarrow{e'_8}; \overrightarrow{e'_9} \end{matrix} \right\}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{\left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \\ \overrightarrow{e_5}; \overrightarrow{e'_6}; \overrightarrow{e'_7}; \overrightarrow{e'_8}; \overrightarrow{e'_9} \end{matrix} \right\}} \right\|}$$

Et ainsi de suite un objet défini dans la croissance des n impairs.

On peut donc conclure pour $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ et $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$ et $\vec{v}_3 \neq \vec{0}$ et $\vec{v}_4 \neq \vec{0}$ et $\vec{v}_5 \neq \vec{0}$ et pour des polymixtes définis sur des objets 5D :

$$\overrightarrow{pm}_{5/(n \text{ pair} > 2)} = \text{indéfini}$$

$$(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{v}_5)5D$$

$$(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{v}_5) \text{ conf } \{ \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5 \}$$

$$\begin{array}{c} \overrightarrow{pm} \\ 5//(n \text{ impair} \geq 5) \\ R^n \end{array} = \begin{array}{c} (O; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_5}) 5D \\ (\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_5}) conf\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e_5}\} \end{array} a. Det_{5 \times 5}(\overrightarrow{v_5}; \overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}). \frac{\overrightarrow{env}_{R^n \text{ impair}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{R^n \text{ impair}} \right\|}$$

$$a \text{ réduit} = \psi_7. \xi_7. \left| \sin((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_2}) \right|. \left| \sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_3}) \right|. \left| \sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}), \overrightarrow{e_4}) \right|. \left| \sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}), \overrightarrow{e_5}) \right|$$

$$a \text{ complet} = \psi_n. \xi_n. \left| \cos((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_1}) \right|. \left| \sin((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_2}) \right|. \left| \sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_3}) \right|. \left| \sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}), \overrightarrow{e_4}) \right| \\ . \left| \sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}), \overrightarrow{e_5}) \right|. \left| \sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}; \overrightarrow{e_5}), \overrightarrow{e'_6}) \right| \dots \left| \sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \dots; \overrightarrow{e'_{n-1}}), \overrightarrow{e'_n}) \right|$$

5.11 Tableau récapitulatif des formules des polymixtes

Polymixte dans un espace $\{\vec{e}_i\}m \cup \{\vec{e}'_p\}(n-m)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{pm}_{m//n}^{R^{x+n-m}} &= \overrightarrow{e'_n} [\wedge \boxtimes]^n (\dots (\overrightarrow{e'_{(m+1)}} [\wedge \boxtimes]^{m+1} (\overrightarrow{v_m} [\wedge \boxtimes]^m (\dots (\overrightarrow{v_4} \wedge (\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}))) \dots)) \dots) \\ &[\wedge \boxtimes]^{m \text{ pair}} = \wedge ; \quad [\wedge \boxtimes]^{m \text{ impair}} = \boxtimes \\ &[\wedge \boxtimes]^{n \text{ pair}} = \wedge ; \quad [\wedge \boxtimes]^{n \text{ impair}} = \boxtimes \end{aligned}$$

La flèche figurée en rouge est présente si m impair. La flèche figurée en vert est présente si $m+1$ impair. La flèche figurée en bleue est présente si n impair. Chaque vecteur de $\{\vec{e}_i\}m$ est quelconque. Chaque vecteur de $\{\vec{e}'_p\}(n-m)$ est orthogonal à tous les vecteurs formés par combinaisons linéaires dans la réunion des familles $\{\vec{e}_i\}m \cup \{\vec{e}'_p\}(n-m)$

Vecteur polymixte mesurant des objets polymixiaux mD confinés à R^m dans R^n impair

$$\overrightarrow{pm}_{m//n \geq m}^{R^n \text{ impair}} \underset{(\overrightarrow{v_m}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \text{ conf } \{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \dots; \overrightarrow{e_m}\}}{=} \underset{(\overrightarrow{v_m}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) mD}{=} a. \underset{R^n}{\overset{m \times m}{\text{Det}}} (\overrightarrow{v_m}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \cdot \frac{\overrightarrow{en\vec{v}}_{R^n \text{ impair}}}{\left\| \overrightarrow{en\vec{v}}_{R^n \text{ impair}} \right\|}$$

Avec :

$$a \text{ réduit} = \psi_n \cdot \xi_n \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_3})| \dots |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \dots; \overrightarrow{e_{m-1}}), \overrightarrow{e_m})|$$

$$a \text{ complet} = \psi_n \cdot \xi_n \cdot |\cos((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_1})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_2})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_3})| \dots |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \dots; \overrightarrow{e_{m-1}}), \overrightarrow{e_m})|$$

$$\cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \dots; \overrightarrow{e_m}), \overrightarrow{e'_{m+1}})| \cdot |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \dots; \overrightarrow{e_m}; \overrightarrow{e'_{m+1}}), \overrightarrow{e'_{m+2}})| \dots |\sin((O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \dots; \overrightarrow{e_m}; \overrightarrow{e'_{m+1}}; \dots; \overrightarrow{e'_{n-1}}), \overrightarrow{e'_n})|$$

$\psi_n = 1$ ou -1 caractérise l'orientation directe ou indirecte du produit vectoriel dans l'espace R^n impair

$\xi_n = 1$ ou -1 caractérise relativement au choix fait pour ψ_n l'orientation directoïde ou indirectoïde du repère $(O; \overrightarrow{e_1}; \dots; \overrightarrow{e_m}; \overrightarrow{e'_{m+1}}; \dots; \overrightarrow{e'_n})$

La coordonnée de $\overrightarrow{pm}$ dans le repère $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est la mesure orientée d'un objet mD dans R^n impair

$\frac{\overrightarrow{pm}}{\|\overrightarrow{pm}\|}$: vecteur unitaire envoûteur de norme 1 occupant toutes les directions dans R^n impair chaque direction ayant deux sens

Palinodie

Exposition des libertés conceptuelles qu'on a pu prendre pour établir une formule. Dans le cas des polymixtes, c'est la liberté prise dans les choix des valeurs des lignes polymixiales, de façon à obtenir la formule souhaitée

Mesures absolues d'objets polymixiaux mD confinés à R^m dans R^n impair par les normes de polymixtes

Un objet polymixial mD possède m groupes non identiques de 2^{m-1} arêtes parallèles entre elles. Il est mesuré par des normes de vecteurs polymixtes en multiples d'objets polymixiaux mD hypercubiques (segment, carré, cube, hypercube) de valeurs 1

$$\begin{aligned} \left\| \overrightarrow{pm} \right\|_{\substack{(m \geq 2)/n \\ R^n \text{ impair} \geq 1}} &= \left\| \overrightarrow{pm} \right\|_{\substack{(O; \overrightarrow{v_1}) 1D \\ (\overrightarrow{v_1}) \text{ conf} \{\overrightarrow{e_1}\}}} = \left| \text{Det}_{R^1}(\overrightarrow{v_1}) \right| \\ \left\| \overrightarrow{pm} \right\|_{\substack{(m \geq 2)/n \\ R^n \text{ impair} \geq m}} &= \left\| \overrightarrow{pm} \right\|_{\substack{(O; \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_m}) mD \\ (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_m}) \text{ conf} \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_m}\}}} = \left| \sin((O; \overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_2}) \right| \cdot \left| \sin((O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_3}) \right| \dots \left| \sin((O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_{m-1}}), \overrightarrow{e_m}) \right| \cdot \left| \text{Det}_{R^m}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_m}) \right| \end{aligned}$$

Si $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_{j-1}}, \overrightarrow{e_j}\}$ famille liée, alors $\sin((O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_{j-1}}), \overrightarrow{e_j}) = 0$

Norme du vecteur polymixte envoûteur avec les mesures locales dans la géométrie de l'objet polymixial $(O; \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_m})$

$$\left\| \overrightarrow{pm} \right\|_{\substack{(m \geq 2)/n \\ R^n \text{ impair} \geq m}} = \left\| \overrightarrow{pm} \right\|_{\substack{(O; \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_m}) mD \\ (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_m}) \text{ conf} \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_m}\}}} = \left\| \overrightarrow{v_1} \right\| \cdot \left\| \overrightarrow{v_2} \right\| \cdot \left\| \overrightarrow{v_3} \right\| \dots \left\| \overrightarrow{v_m} \right\| \cdot \left| \sin((O; \overrightarrow{v_1}), \overrightarrow{v_2}) \right| \cdot \left| \sin((O; \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}), \overrightarrow{v_3}) \right| \dots \left| \sin((O; \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_{m-1}}), \overrightarrow{v_m}) \right|$$

Si $\{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_{j-1}; \vec{v}_j\}$ famille liée, alors $\sin((O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_{j-1}), \vec{v}_j) = 0$ et donc $\underset{R^m}{\overset{m \times m}{\text{Det}}}(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m) = 0$

Vecteur produit mixte d'un objet 3D confiné à R^n impair dans R^n impair

Pour $n = 1$, les produits vectoriels sont indéfinis car il n'y a pas assez de dimensions dans R^1 , par conséquent le produit mixte l'est aussi.

$$\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) \underset{\substack{(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3) \text{ 3D} \\ (\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3) \in R^1}}}{=} \text{indéfini}$$

Pour n impair ≥ 3 :

$$\overrightarrow{v_3} \boxtimes (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) \underset{\substack{(O; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3) \text{ 3D} \\ (\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3) \in R^{n \text{ impair} \geq 3}}}{=}} \psi_n \cdot \xi_n \cdot |\cos((O; \vec{e}_1), \vec{e}_1)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1), \vec{e}_2)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2), \vec{e}_3)| \cdot |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3), \vec{e}_4)| \dots |\sin((O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3 \dots; \vec{e}_{(n-1)}), \vec{e}_n)|$$

$$\cdot \sum_{p=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-p} \left(\sum_{\substack{i \neq \{p; (p+k)\} \\ i \in [p; (p+k)] \Leftrightarrow c=1 \\ i \notin [p; (p+k)] \Leftrightarrow c=2}}^n (-1)^c \cdot (v_{3|i}) \cdot (v_{2|p} \cdot v_{1|(p+k)} - v_{2|(p+k)} \cdot v_{1|p}) \right) \right) \cdot \frac{\overrightarrow{env}_{R^{n \text{ impair} \geq 3}}}{\left\| \overrightarrow{env}_{R^{n \text{ impair} \geq 3}} \right\|}$$

Note : avec cette formule on prendra soin de réorganiser les termes qui sont ici dans le désordre, pour si on le veut distribuer $\frac{\overrightarrow{env}_{R^n}}{\left\| \overrightarrow{env}_{R^n} \right\|}$ sur les $\frac{n!}{(n-m)!m!}$ déterminants $m \times m$ formés sur la matrice des coordonnées de $\vec{v}_m, \dots, \vec{v}_2, \vec{v}_1$ dans R^n .

Chapitre 6

DETERMINANTS

6.1 Calcul de déterminant par somme de produits de permutations orientées

Un déterminant de vecteurs est aussi l'idée d'un déterminant de matrice de nombres. Mais un déterminant de matrice de nombre n'est pas toujours réciproquement le déterminant de ces mêmes vecteurs. Si on calcule le produit :

$$a. \underset{\substack{m \times m \\ \mathbb{R}^m}}{Det}(\vec{v}_m; \dots; \vec{v}_2; \vec{v}_1)$$

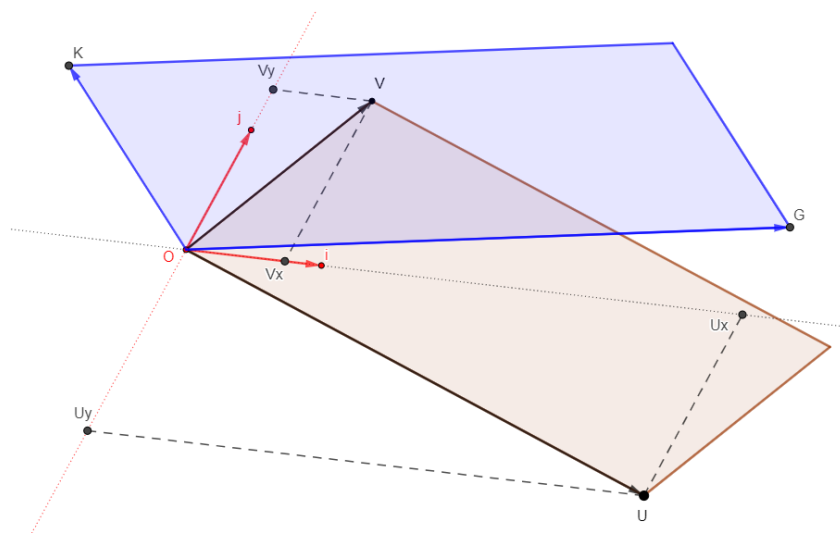
sur une matrice de nombres en le développant sur des colonnes représentant dans une base des coordonnées vectorielles, on obtient dans une base quelconque mD une mesure d'objet formée sur m vecteurs.

Note : dans l'espace 3D c'est un volume, et si le repère est orthonormé direct alors $a = 1$ et le volume orienté par un signe est directement donné par le déterminant.

Si on calcule dans ce produit le déterminant de la matrice de nombre en le développant sur des lignes ne représentant pas dans une base les coordonnées vectorielles des trois précédents vecteurs, c'est comme si on le calculait avec de nouvelles coordonnées disposées en colonnes. On obtient cependant la même mesure d'objet (à condition d'utiliser la même convention de calcul dans l'organisation des facteurs positifs et négatifs dans les deux cas), mais elle est formée sur m autres vecteurs de coordonnées différentes, les deux objets pouvant alors être de formes dissemblables

Exemple pour des vecteurs du plan

$$\text{Soit la matrice de nombres : } \begin{pmatrix} 4.11 & 0.73 \\ -1.51 & 1.34 \end{pmatrix}$$



Calcul de son déterminant sur la première colonne et interprétation géométrique :

$$\vec{u}(4.11.\vec{i}; -1.51.\vec{j}); \vec{v}(0.73.\vec{i}; 1.34.\vec{j})$$

$$Det(\vec{u}; \vec{v}) = 6.61 \text{ unités carrées}$$

$$\text{aire orientée (OUV)} = (\sin 68,13^\circ) \cdot 6.61 = 6.13 \text{ unités carrées}$$

Calcul de son déterminant sur la première ligne et interprétation géométrique :

$$\vec{g}(4,11.\vec{i}; 0,73.\vec{j}) ; \vec{k}(-1.51.\vec{i}; 1.34.\vec{j})$$

$$\text{Det}(\vec{g} ; \vec{k}) = \text{Det}(\vec{u} ; \vec{v}) = 6.61 \text{ unités carrées}$$

$$\text{aire orientée (OGK)} = (\sin 68,13^\circ) \cdot 6.61 = 6.13 \text{ unités carrées}$$

$$= \text{aire orientée (OUV)}$$

Si on permute deux colonnes et/ou deux lignes de nombres dans une matrice originale, le déterminant de la nouvelle matrice change de signe à chaque opération de permutation. Il s'agit simplement du déterminant des mêmes vecteurs qui sont énumérés dans un ordre différent.

Note : pour un déterminant formé sur 4 vecteurs $\vec{u} ; \vec{v} ; \vec{w} ; \vec{x}$ libres entre entre, on écrira si on a besoin d'être précis, la mesure 4D de cet objet comme (OUVWX). C'est-à-dire un ordre de lecture de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$, puis de $\vec{v}$ vers $\vec{w}$, puis de $\vec{w}$ vers $\vec{x}$.

(OVVUX) est donc une mesure de valeur absolue égale mais de signe contraire à (OUVWX) puisqu'il y a eu une permutation par rapport à cet objet.

(OWXUV) est donc une mesure de valeur absolue égale et de signe égal à (OUVWX) puisqu'il y a eu deux permutations par rapport à cet objet.

(OXWUV) est donc une mesure de valeur absolue égale mais de signe contraire à (OUVWX) puisqu'il y a eu une permutation par rapport à cet objet.

Etc. Le procédé est le même pour m vecteurs $(\vec{v}_m; \dots; \vec{v}_2; \vec{v}_1)$

Exemple pour des vecteurs du plan

$$\text{Soit la matrice de nombres : } \begin{pmatrix} 4.11 & 0.73 \\ -1.51 & 1.34 \end{pmatrix}$$

$$\text{On permute les colonnes 1 et 2 . On obtient la matrice de nombres : } \begin{pmatrix} 0.73 & 4.11 \\ 1.34 & -1.51 \end{pmatrix}$$

Même figure que précédemment

On calcule son déterminant sur la première colonne et on donne son interprétation géométrique :

$$\vec{v}(0,73.\vec{i}; 1.34.\vec{j}) ; \vec{u}(4,11.\vec{i}; -1.51.\vec{j})$$

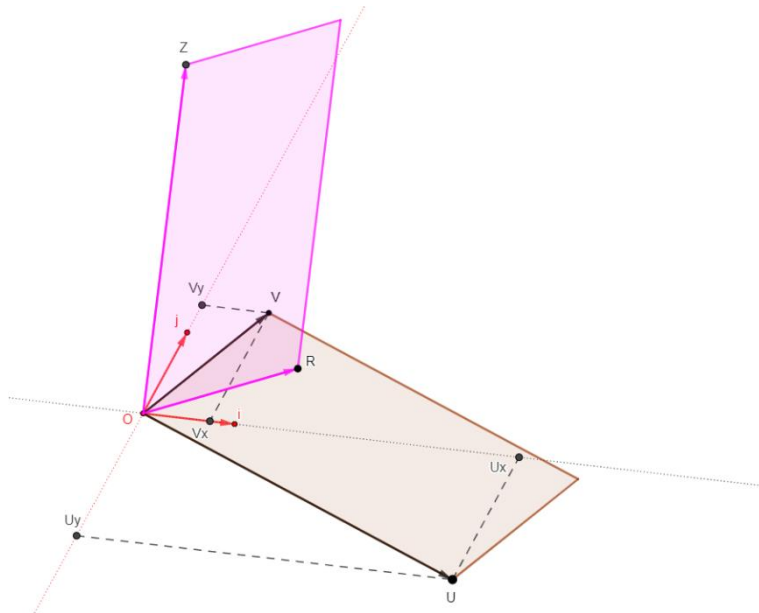
$$\text{Det}(\vec{v} ; \vec{u}) = -6.61 \text{ unités carrées}$$

$$\begin{aligned} \text{aire orientée } (OVU) &= -(\sin 68,13^\circ) \cdot 6.61 = -6.13 \text{ unités carrées} \\ &= -\text{aire orientée } (OUV) \end{aligned}$$

*

$$\text{Soit la matrice de nombres : } \begin{pmatrix} 4.11 & 0.73 \\ -1.51 & 1.34 \end{pmatrix}$$

On permute les colonnes 1 et 2 puis les lignes 1 et 2. On obtient la matrice de nombres : $\begin{pmatrix} 1.34 & -1.51 \\ 0.73 & 4.11 \end{pmatrix}$



On calcule son déterminant sur la première colonne et on donne son interprétation géométrique :

$$\vec{r}(1.34.\vec{i}; 0.73.\vec{j}) ; \vec{z}(-1.51.\vec{i}; 4.11.\vec{j})$$

$$\text{Det}(\vec{r} ; \vec{z}) = \text{Det}(\vec{u} ; \vec{v}) = 6.61 \text{ unités carrées}$$

$$\begin{aligned} \text{aire orientée du parrallélépipède } (ORZ) &= (\sin 68,13^\circ) \cdot 6.61 = 6.13 \text{ unités carrées} \\ &= \text{aire orientée } (OUV) \end{aligned}$$

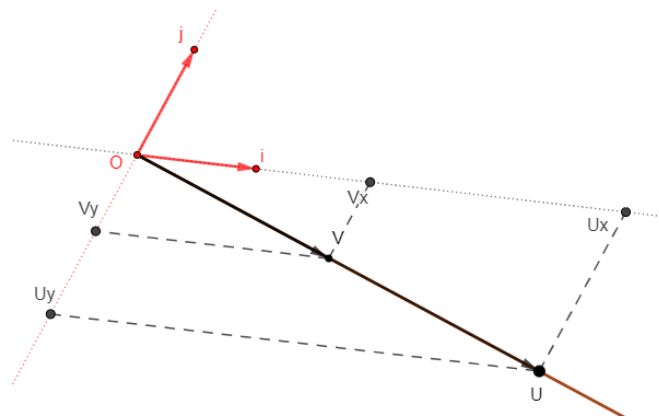
Si au moins deux lignes ou deux colonnes sont dans un rapport de proportionnalité (cas de vecteurs colinéaires), le déterminant est nul. Dans l'espace formé sur m vecteurs quelconques, il suffit que deux vecteurs soient colinéaires et non égaux et tous les autres libres entre eux pour qu'il existe deux objets différents de dimensions $m - 1$. Si les deux vecteurs sont colinéaires et égaux on voit deux objets différents de dimensions $m - 1$ (on peut aussi dire que c'est un même objet). Dans tous les cas, la mesure de l'objet

mD ne peut pas être celle d'un objet de dimension m , elle est donc calculée comme nulle par le déterminant, de la même façon qu'un volume nul peut être une surface ou une longueur ou un point.

Par le même raisonnement, il suffit qu'il y ait au moins un vecteur nul dans un ensemble de m vecteurs quelconques pour constater que la dimension maximum de l'objet formé sur ces m vecteurs soit $m - 1$. La mesure de l'objet mD ne peut donc pas être celle d'un objet de dimension m , elle est donc calculée comme nulle par le déterminant, de la même façon qu'un volume nul peut être une surface ou une longueur ou un point.

Exemple pour des vecteurs du plan

Soit la matrice de nombres : $\begin{pmatrix} 4.11 & 1.96 \\ -1.51 & -0.72 \end{pmatrix}$



Calcul de son déterminant sur la première colonne et interprétation géométrique :

$$\vec{u}(4,11.\vec{i} ; -1,51.\vec{j}) ; \vec{v}(1,96.\vec{i} ; -0,72.\vec{j})$$

$$\text{Det}(\vec{u} ; \vec{v}) = \text{Det}(\vec{v} ; \vec{u}) = 0 \text{ unités carrées}$$

$$\text{aire orientée} (OUV) = \text{aire orientée} (OVV) = 0 \text{ unités carrées}$$

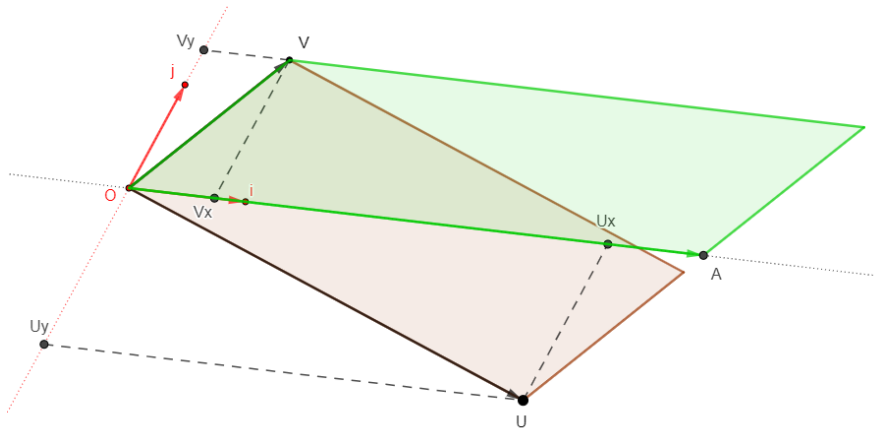
Une propriété remarquable est qu'on peut ajouter à une colonne (ou une ligne) un multiple d'une autre colonne (ou d'une autre ligne) pour obtenir une nouvelle matrice sans changer la valeur du déterminant (méthode du pivot de Gauss-Jordan) de façon, en se servant si besoin des permutations (dans ce cas changer le signe du déterminant pour chaque opération de permutation), à obtenir une matrice triangulaire qui est une matrice carrée dont une partie triangulaire des valeurs, délimitée par la diagonale principale, est nulle. Dans ce cas, le déterminant d'une matrice triangulaire mD est directement donné par le produit des nombres sur la diagonale. Le terme « pivot » (à mon sens) consiste à désigner un nombre de la matrice carrée situé dans un de ses quatre « coins » de façon à sectoriser en deux parts la matrice, tel qu'une part située sous la diagonale a tous ses nombres nuls.

Note : Les temps de calcul d'un déterminant obtenu par la méthode des permutations (historiquement établie par le mathématicien Liebnitz) et celle de la triangularisation doivent être comparés selon la dimension est la complexité de la matrice. Néanmoins on ne peut pas comprendre l'utilité du calcul des déterminants par le pivot de Gauss si on n'a pas compris la complexité du calcul des déterminants par le développé naturel de l'écriture, mettant en évidence des permutations.

Exemple pour des vecteurs du plan

Soit la matrice de nombres : $\begin{pmatrix} 4.11 & 0.73 \\ -1.51 & 1.34 \end{pmatrix}$

On substitue aux nombres de la colonne 1 les nombres obtenus en additionnant ceux de la colonne 1 additionnée de $\frac{1.51}{1.34}$ fois ceux de la colonne 2. On obtient alors une matrice $\begin{pmatrix} 4.93 & 0.73 \\ 0 & 1.34 \end{pmatrix}$



Le calcul du déterminant sur la première colonne d'une matrice triangulaire est directement le produit des nombres en diagonale et on en donne une interprétation géométrique :

$$\vec{a}(4,93.\vec{i}; 0.\vec{j}); \vec{v}(0,73.\vec{i}; 1,34.\vec{j})$$

$$\text{Det}(\vec{a}; \vec{v}) = \text{Det}(\vec{u}; \vec{v}) = 6.61 \text{ unités carrées}$$

$$\text{aire orientée (OAV)} = (\sin 68,13^\circ).6.61 = 6.13 \text{ unités carrées}$$

$$= \text{aire orientée (OUV)}$$

Soit $k(i_j)$ la série complète des valeurs des indices i_j , on a l'écriture suivante factorisée :

$$\begin{aligned} & \text{Det}_{\substack{m \times m \\ \mathbb{R}^m}}(\vec{v}_m; \dots; \vec{v}_j; \dots; \vec{v}_2; \vec{v}_1) = \\ & + v_{m|i_j=1} \cdot \left(\text{Det}_{\substack{(m-1) \times (m-1) \\ 1}}(\vec{v}_{(m-1)}; \dots; \vec{v}_2; \vec{v}_1) \right) - v_{m|i_j=2} \cdot \left(\text{Det}_{\substack{(m-1) \times (m-1) \\ 2}}(\vec{v}_{(m-1)}; \dots; \vec{v}_2; \vec{v}_1) \right) \\ & \quad \quad \quad + \dots \pm \\ & v_{m|i_j=m} \cdot \left(\text{Det}_{\substack{(m-1) \times (m-1) \\ m}}(\vec{v}_{(m-1)}; \dots; \vec{v}_2; \vec{v}_1) \right) \end{aligned}$$

Chaque indice i_j prend toutes les valeurs de la série complète $k_m(i_j) = \{1; 2; 3; \dots; m\}$, disposées en ordre des valeurs croissantes. La première ligne de produit est positive, la seconde négative, et ainsi de suite. Cette disposition est conventionnelle.

Note : ce premier développé est le seul cas où i_j prend toutes les valeurs de la série complète $k_m(i_j) = \{1; 2; \dots; m\}$

Dans un déterminant $m \times m$ on compte $\frac{m!}{(m-p)!}$ sous-déterminants $Det_{(m-p) \times (m-p)}(\overrightarrow{v_{m-p}}; \dots; \overrightarrow{v_j}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})$ d'indice x .

On a donc ensuite (on expliquera la règle des prises de valeurs des $i_1 \leq i_j \leq i_m$ un peu plus bas) :

$$\begin{aligned} & Det_{(m-1) \times (m-1)}(\overrightarrow{v_{m-1}}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \underset{1}{=} \\ & + v_{(m-1)|i_j=2} \cdot \left(Det_{(m-2) \times (m-2)}(\overrightarrow{v_{m-2}}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \right) - v_{(m-1)|i_j=3} \cdot \left(Det_{(m-2) \times (m-2)}(\overrightarrow{v_{m-2}}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \right) \\ & + \dots \pm \\ & v_{(m-1)|i_j=m} \cdot \left(Det_{(m-2) \times (m-2)}(\overrightarrow{v_{m-2}}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \right) \end{aligned}$$

Et ensuite :

$$\begin{aligned} & Det_{(m-1) \times (m-1)}(\overrightarrow{v_{m-1}}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \underset{2}{=} \\ & + v_{(m-1)|i_j=1} \cdot \left(Det_{(m-2) \times (m-2)}(\overrightarrow{v_{m-2}}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \right) - v_{(m-1)|i_j=3} \cdot \left(Det_{(m-2) \times (m-2)}(\overrightarrow{v_{m-2}}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \right) \\ & + \dots \pm \\ & v_{(m-1)|i_j=m} \cdot \left(Det_{(m-2) \times (m-2)}(\overrightarrow{v_{m-2}}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \right) \end{aligned}$$

Et enfin :

$$\begin{aligned} & Det_{(m-1) \times (m-1)}(\overrightarrow{v_{m-1}}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \underset{m}{=} \\ & + v_{(m-1)|i_j=1} \cdot \left(Det_{(m-2) \times (m-2)}(\overrightarrow{v_{m-2}}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \right) - v_{(m-1)|i_j=2} \cdot \left(Det_{(m-2) \times (m-2)}(\overrightarrow{v_{m-2}}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) \right) \end{aligned}$$

$$\pm \dots \pm v_{(m-1)|i_j=m-1} \cdot \left(\frac{Det_{(m-2) \times (m-2)}(\overrightarrow{v_{(m-2)}}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})}{\frac{m!}{(m-2)!}} \right)$$

Ainsi, chaque indice i_j dans $Det_{(m-1) \times (m-1)}^1$ prend toutes les valeurs de la série complète $k(i_j) = \{1; 2; 3; \dots; m\}$ à l'exception de $i_j = 1$. Donc on a une nouvelle série $k_{m-1}^1(i_j) = \{2; 3; 4; \dots; m\}$.

Chaque indice i_j dans $Det_{(m-1) \times (m-1)}^2$ prend toutes les valeurs de la série complète $k(i_j) = \{1; 2; 3; \dots; m\}$ à l'exception de $i_j = 2$. Donc on a une nouvelle série $k_{m-1}^2(i_j) = \{1; 3; 4; \dots; m\}$.

... ..

Chaque indice i_j dans $Det_{(m-1) \times (m-1)}^{\frac{m!}{(m-2)!}}$ prend toutes les valeurs de la série complète $k(i_j) = \{1; 2; 3; \dots; m\}$ à l'exception de $i_j = m$. Donc on a une nouvelle série $k_{m-1}^{\frac{m!}{(m-2)!}}(i_j) = \{1; 2; 3; \dots; (m-1)\}$.

On répète le processus partout jusqu'à aboutir aux $m!$ déterminants 1×1 impliqués dans la décomposition de $Det_{m \times m}^{\frac{m!}{(m-2)!}}(\overrightarrow{v_m}; \dots; \overrightarrow{v_j}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})$. On obtient alors une somme de $m!$ produits de coordonnées. On peut appeler ces produits des « ligne de coordonnées en produits ».

On simplifie maintenant l'écriture en présentant la décomposition complète du déterminant en somme de ligne de coordonnées en produits, chacune étant affecté d'un signe. On formalise l'écriture en initiant le calcul sur les coordonnées en colonne du vecteur $\overrightarrow{v_m}$, et selon le procédé présenté en annexe.

Chaque indice $i_j \in]i_1; i_m[$ existe en un seul exemplaire dans une ligne de coordonnées en produits et correspond à un ensemble de $m!$ permutations des valeurs des indices i_j prises dans la série de valeurs qui lui sont permises. Puisque à chaque valeur de i_j correspond un signe positif ou négatif et comme chaque ligne de coordonnées en produits comporte tous les indices $i_j = \{i_1; i_2; \dots; i_m\}$, la résultante est que chaque ligne prend la valeur 1 ou -1 . La somme de toutes ces lignes reconstitue $Det_{m \times m}^{\frac{m!}{(m-2)!}}(\overrightarrow{v_m}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})$.

Note : on a parlé précédemment de lignes polymixiales de valeur 0. Si il existe deux ou plus de deux indices $i_j \in]i_1; i_m[$ de valeurs identiques dans une ligne polymixiale, cette ligne prend la valeur 0. Cela correspond aux cas de produits scalaires et vectoriels nuls dans les lignes de produits de coordonnées.

Pour trouver le signe d'une ligne de coordonnées en produits, on considère que chaque vecteur $v_{1 \leq j \leq m}$ est affecté d'un coefficient $c_j = \pm 1$. On peut donc écrire :

$$Det_{m \times m}^{\frac{m!}{(m-2)!}}(\overrightarrow{v_m}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) =$$

$$c_m \cdot v_{m|i_m} \dots c_j \cdot v_{j|i_j} \dots c_3 \cdot v_{3|i_3} \cdot c_2 \cdot v_{2|i_2} \cdot v_{1|i_1}$$

$$+ \dots +$$

$$c_m \cdot v_{m|i_m} \dots c_j \cdot v_{j|i_j} \dots c_3 \cdot v_{3|i_3} \cdot c_2 \cdot v_{2|i_2} \cdot v_{1|i_1}$$

Exemple :

L'ensemble des valeurs permises prises par les $i_j \in] i_1; i_3[$ dans le triplet $\{1 ; 2; 3\}$ correspond à toutes les permutations du triplet $\{1 ; 2; 3\}$:

$$\begin{aligned} \underset{R^3}{\overset{3 \times 3}{\text{Det}}}(\vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1) = \\ c_3 \cdot v_{3|(i_3=1)} \cdot c_2 \cdot v_{2|(i_2=2)} \cdot v_{1|(i_1=3)} \\ + \\ c_3 \cdot v_{3|(i_3=1)} \cdot c_2 \cdot v_{2|(i_2=3)} \cdot v_{1|(i_1=2)} \\ + \\ c_3 \cdot v_{3|(i_3=2)} \cdot c_2 \cdot v_{2|(i_2=3)} \cdot v_{1|(i_1=1)} \\ + \\ c_3 \cdot v_{3|(i_3=2)} \cdot c_2 \cdot v_{2|(i_2=1)} \cdot v_{1|(i_1=3)} \\ + \\ c_3 \cdot v_{3|(i_3=3)} \cdot c_2 \cdot v_{2|(i_2=2)} \cdot v_{1|(i_1=1)} \\ + \\ c_3 \cdot v_{3|(i_3=3)} \cdot c_2 \cdot v_{2|(i_2=1)} \cdot v_{1|(i_1=2)} \end{aligned}$$

Note : on ne note pas l'indice c_1 , car $\underset{R^m}{\overset{1 \times 1}{\text{Det}}}(\vec{v}_1)$ est un déterminant ultime et ne se décompose pas. Son signe est celui d'une des coordonnées de $\vec{v}_1$.

On peut formaliser la formule générale comme :

$$\underset{R^m}{\overset{m \times m}{\text{Det}}}(\vec{v}_m; \dots; \vec{v}_2; \vec{v}_1) = \sum_{i=1}^{m!} \text{Perm} \{i_1; \dots; i_j; \dots i_m\} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ \text{à} \\ j=m}} c_j \cdot v_{j|i_j} \right)$$

$\text{Perm}\{i_1; \dots; i_j; \dots i_m\}$ est parmi $m !$ permutations un jeu de valeurs pour chaque indice i_j dans une ligne

$$c_m \cdot v_{m|i_m} \dots c_j \cdot v_{j|i_j} \dots c_3 \cdot v_{3|i_3} \cdot c_2 \cdot v_{2|i_2} \cdot v_{1|i_1} .$$

Note : c'est la formule de Leibniz, écrite ici avec un formalisme un peu différent.

On détermine alors, dans chaque ligne de coordonnées en produits, les signes des indices c_j , en remarquant la valeur que prend i_j dans la série $k_{2 \leq y \leq m}(i_j)$ des valeurs qui lui sont permises. Cela détermine le rang de i_j dans le rangement de signes $\{+; -; +; -; \dots (\pm)\}$.

Les valeurs $i_j; i_{j-1}; \dots; i_1$ sont les valeurs présentes dans la série $k_{2 \leq y \leq m}(i_j)$, et cette série doit être arrangée en ordre de valeurs croissantes, la plus petite valeur correspondant à un signe toujours positif dans un rangement de signes $\{+; -; +; -; \dots (\pm)\}$ fait d'alternance de signes positifs et négatifs.

c_j a alors le signe du rang de i_j dans le rangement de signes $\{+; -; +; -; \dots (\pm)\}$.

Si $i_j = i_m$ il n'y a aucune valeur absente et i_j prend une valeur dans la série complète $k_m(i_j) = \{1; 2; \dots; m\}$. En effet $\underset{R^m}{\underset{m \times m}{\text{Det}}}(\vec{v}_m; \dots; \vec{v}_2; \vec{v}_1)$ est un déterminant ultime et n'est pas contenu dans un autre. c_m a alors le signe du rang de i_m dans le rangement de m signes $\{+; -; +; -; \dots (\pm)\}$.

Note : il y a d'autres méthodes pour trouver les signes des lignes de produits de coordonnées. On peut utiliser la signature de la permutation. Mais on préfère présenter ici ce qu'on a trouvé soi-même.

Exemples

Soit la ligne $\pm v_{2|1} \cdot v_{1|2}$ issue de la décomposition d'un déterminant 2×2 . On cherche le signe de cette ligne. Elle s'écrit :

$$c_2 \cdot v_{2|1} \cdot v_{1|2}$$

La valeur de i_2 est dans la série complète $k_2(i_j) = \{1; 2\}$. En effet $\underset{R^2}{\underset{2 \times 2}{\text{Det}}}(\vec{v}_2; \vec{v}_1)$ est un déterminant ultime et n'est pas contenu dans un autre. Comme $i_2 = 1$, est en première position dans cette série, le coefficient c_2 prend le rang d'un signe positif dans l'alternance de signe $\{+; -\}$. On écrit alors $c_2 = 1$.

La ligne $\pm v_{2|1} \cdot v_{1|2}$ est donc de signe positif et s'écrit : $+v_{2|1} \cdot v_{1|2}$

Note : attention, le signe du calcul de cette ligne n'est pas le signe de la ligne de produits de coordonnées car il peut donner un résultat de signe différent, selon les valeurs des coordonnées.

Soit la ligne $\pm v_{4|3} \cdot v_{3|2} \cdot v_{2|1} \cdot v_{1|4}$ issue de la décomposition d'un déterminant 4×4 . On cherche le signe de cette ligne. Elle s'écrit :

$$c_4 \cdot v_{4|(i_4=3)} \cdot c_3 \cdot v_{3|(i_3=2)} \cdot c_2 \cdot v_{2|(i_2=1)} \cdot v_{1|(i_1=4)}$$

La valeur de i_2 est dans la série $k_2(i_j) = \{1; 4\}$. Comme $i_2 = 1$ est en première position dans cette série, le coefficient c_2 prend le rang d'un signe positif dans l'alternance de signe $\{+; -\}$. On écrit alors $c_2 = 1$.

La valeur de i_3 est dans la série $k_3(i_j) = \{1; 2; 4\}$. Comme $i_3 = 2$ est en deuxième position dans cette série, le coefficient c_3 prend le rang d'un signe négatif dans l'alternance de signe $\{+; -; +\}$. On écrit alors $c_3 = -1$.

La valeur de i_4 est dans la série complète $k(i_j) = \{1; 2; 3; 4\}$. En effet $\underset{R^4}{\overset{4 \times 4}{\text{Det}}}(\overrightarrow{v_4}; \overrightarrow{v_3}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1})$ est un déterminant ultime et n'est pas contenu dans un autre. Comme $i_4 = 3$, est en troisième position dans cette série, le coefficient c_4 prend le rang d'un signe positif dans l'alternance de signe $\{+; -; +; -\}$. On écrit alors $c_4 = 1$.

Donc $c_4 \cdot c_3 \cdot c_2 = -1$. La ligne $\pm v_{4|3} \cdot v_{3|2} \cdot v_{2|1} \cdot v_{1|4}$ est donc de signe négatif et s'écrit : $-v_{4|3} \cdot v_{3|2} \cdot v_{2|1} \cdot v_{1|4}$

On peut utiliser des méthodes informatiques pour trouver le rang de i_j . On donne ci-dessous un exemple de code :

```

                                ' initialisation des variables :
signeligne=1
incr=0
    FOR j=2 to n
c[j]=1
rangdei[j]=0

    ENDFOR

                                ' Fin initialisation des variables

    FOR j=2 To n                ' Boucle donnant le produit  $c_n \dots c_3 \cdot c_2$ 

For a=1 to j-1                ' Boucle comparant la valeur de  $i_j$  à chacune des valeurs prises par  $i_{j-1}; \dots; i_1$ 
    If i[j]<i[j-a] then
incr=0
    Else
incr=1
    endif
rangdei[j]=rangdei[j]+incr
c[j]=math.power(-1, rangdei[j])

    ENDFOR                    ' Fin boucle comparant la valeur de  $i_j$  à chacune des valeurs prises par  $i_{j-1}; \dots; i_1$ 

signeligne = signeligne *c[j]

    ENDFOR                    ' Fin boucle donnant le produit  $c_n \dots c_3 \cdot c_2$ 
```

Note : penser qu'un code informatique puisse avoir moins de « valeur mathématique » qu'une fonction serait faire preuve d'étroitesse d'esprit. Et l'étroitesse d'esprit ne permet pas de se libérer de la prison des faux problèmes en mathématiques. C'est en terme de praticité que ces deux écritures logiques se comparent, mais toutes deux ont la même beauté logique

6.2 Tableau récapitulatif des formules

Décomposition d'un déterminant en somme de produits de coordonnées

$$\underset{R^m}{\overset{m \times m}{\text{Det}}}(\overrightarrow{v_m}; \dots; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_1}) = \sum_{i=1}^{m!} \overset{Perm}{\{i_1; \dots; i_j; \dots i_m\}} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ \text{à} \\ j=m}} c_j \cdot v_{j|i_j} \right)$$

$Perm\{i_1; \dots; i_j; \dots i_m\}$ est parmi $m !$ permutations un jeu de valeurs pour chaque indice i_j dans une ligne $c_m \cdot v_{m|i_m} \dots c_j \cdot v_{j|i_j} \dots c_3 \cdot v_{3|i_3} \cdot c_2 \cdot v_{2|i_2} \cdot v_{1|i_1}$

c_j a le signe du rang de i_j dans l'ensemble des valeurs $\{i_j; i_{j-1}; \dots; i_1\}$ réorganisées en suite croissante correspondante à la suite $\{+; -; +; -; \dots (\pm)\}$.

ANNEXES

PROGRAMMES INFORMATIQUES

Des programmes écrits en langage Small Basic automatisent la plupart des calculs de l'étude. Ils sont librement téléchargeables sur le site guillaumbardou.com :

- Opérations de géométrie euclidienne dans un repère quelconque
- Jeux d'écritures dans l'espace nD
- Calcul de déterminant par somme de produits de lignes de coordonnées

ANGLES ET COORDONNEES

Note : je réécris cet article environ deux ans après sa première mouture, parce que j'y vois plus clairement maintenant, et j'ai davantage de confiance.

On donne ci-dessous une méthode de compréhension des mesures dans un espace 2D basée sur les orientations d'objets et d'espace. Elle utilise les mêmes concepts que ceux utilisés dans les espaces nD. Nous souhaitons mettre en évidence que les mathématiques ne reposent pas sur des vérités mais sur un choix de règles arbitraires fondant une interdépendance des choses vues dans une relativité logique. C'est donc la richesse de contenus des énoncés qui est le meilleur rempart de l'esprit contre les faux problèmes qu'il se pose, lorsqu'il ne peut pas voir cette interdépendance et qu'il la remplace par de la rigidité mentale.

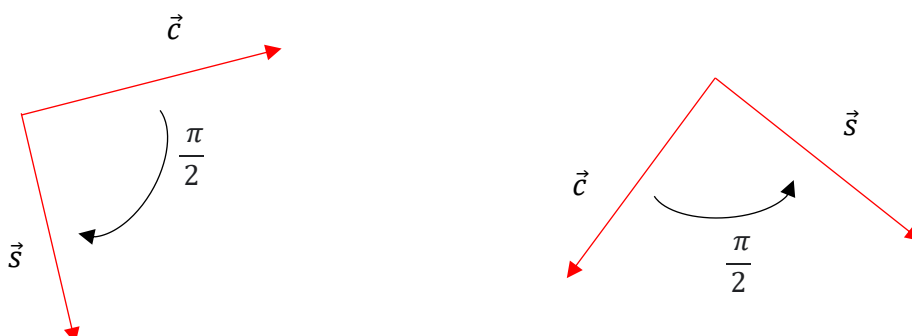
Note du 14/02/22 : ce manque de flexibilité mentale, qui n'est pas dans la nature de l'esprit chercheur - cherchant à recouvrir son intégrité - mais dans celle des mensonges cachés du monde qu'il perçoit. Cette rigidité le fera souffrir tôt ou tard, quand il verra qu'il ne fait pas d'œuvres. Puis davantage de souplesse dans une possible évolution le mènera à faire et défaire sans cesse son œuvre imparfaite. Puis davantage de souplesse moissonnant le savoir-faire acquis lui permettra d'en arriver à pouvoir écrire du vrai et l'améliorer du jour au lendemain. Et enfin il y aura les goûts des débordements sur tout autre chose.

Précisons tout de suite que, plongé dans un espace de dimensions supérieur, le plan peut être vu de tous les côtés sans que cela change quoi que ce soit à la réussite des opérations de mesures dans le plan par un raisonnement véritablement mathématique. Si on regarde un plan en recto puis verso dans l'espace, le sens subjectif de « rotation » associé à la lecture d'un premier objet nommé vers un second s'inverse, mais pas l'écart entre les vecteurs et le signe de la mesure de cet écart. Il est suffisant alors de constater cela pour recréer l'orientation d'un plan de quelque côté du plan que l'on se trouve, et on sait comment additionner dans tous les cas les mesures pour qu'elles correspondent aux apparences.

On définit donc un opérateur ψ_2 qui caractérise l'orientation de l'espace 2D. On peut lui donner les valeurs $\psi_2 = 1$ ou $\psi_2 = -1$, ces valeurs n'ont aucun sens si elles ne sont pas relatives à l'orientation des objets de cet espace. On retient le concept du plus court chemin allant d'un premier objet nommé à un second. Ce concept s'applique à tous les objets du plan : le plan lui-même comme les objets qu'il contient. On aurait pu retenir le concept du long chemin, quel que soit le concept retenu, il faut qu'il ait une valeur globale pour que l'esprit réussisse à distinguer une chose d'une autre. On remarque que c'est un concept du même genre que l'on utilise lorsqu'on oriente l'espace 3D par la règle des trois doigts.

Le plus court chemin allant d'un premier objet nommé à un second, quand il s'applique à des angles, est un angle saillant. Un angle est dit saillant si les secteurs angulaires qui le représentent sont convexes, et rentrant sinon. L'angle saillant a une mesure positive comprise entre $]0, \pi[$, ou négative comprise entre $]0, -\pi[$. Les opérations de mesures trigonométriques reposent sur des tables pour lesquelles on a choisi arbitrairement un angle $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ dans une lecture où l'origine de l'angle le vecteur pointant le demi-axe des valeurs positives des cosinus.

C'est donc le repère trigonométrique qui oriente le plan pour y faire des mesures. On peut le disposer de deux façons si on distingue les axes des sinus et des cosinus. Ci-dessous on montre donc des orientations contraires du plan :



$\vec{c}$ est le vecteur pointant le demi-axe des valeurs positives des cosinus

$\vec{s}$ est le vecteur pointant le demi-axe des valeurs positives des sinus

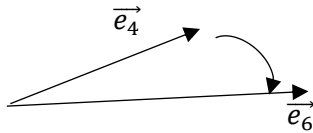
On choisit donc arbitrairement l'une d'elles, par exemple celle de gauche, et on lui attribue arbitrairement une valeur, par exemple $\psi_2 = -1$

On fait la même opération mentale pour des objets-angles saillants du plan. On définit donc un opérateur $\xi_{2|i}$ qui caractérise l'orientation d'un objet i du plan. On peut lui donner les valeurs $\xi_{2|i} = 1$ ou $\xi_{2|i} = -1$ en relation avec la valeur retenue pour ψ_2 .

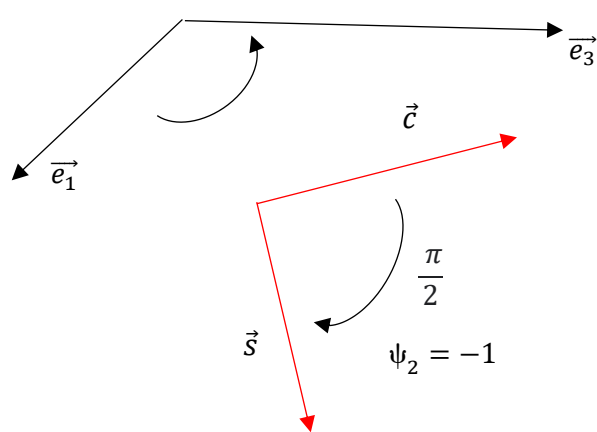
Si l'orientation de l'angle saillant est la même que celle du repère trigonométrique, alors $\xi_{2|i}$ est du même signe que ψ_2 et on a $\psi_2 \cdot \xi_{2|i} = 1$.

Si l'orientation de l'angle saillant est contraire à celle du repère trigonométrique, alors $\xi_{2|i}$ est de signe contraire à ψ_2 et on a $\psi_2 \cdot \xi_{2|i} = -1$.

mesure d'angle saillant $(\vec{e}_4, \vec{e}_6)$



mesure d'angle saillant $(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$



$(\vec{e}_4, \vec{e}_6)$ est de même orientation que $(\vec{c}, \vec{s})$, sa mesure en radians est donc comptée positivement et on a $\xi_{2|(\vec{e}_4, \vec{e}_6)} = -1$. La donnée de l'information $\psi_2 \cdot \xi_{2|(\vec{e}_4, \vec{e}_6)} = 1$ permet de dire que l'angle $(\vec{e}_4, \vec{e}_6)$ et l'espace 2D sont orientés de la même façon.

$(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$ est d'orientation contraire à $(\vec{c}, \vec{s})$, sa mesure en radians est donc comptée négativement et on a $\xi_{2|(\vec{e}_1, \vec{e}_3)} = 1$. La donnée de l'information $\psi_2 \cdot \xi_{2|(\vec{e}_1, \vec{e}_3)} = -1$ permet de dire que l'angle $(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$ et l'espace 2D sont orientés de façon contraire.

On peut d'ailleurs réécrire ces angles et les fonctions trigonométriques de leurs sinus en extrayant les opérateurs d'orientations :

$$(\vec{e}_4, \vec{e}_6) = \psi_2 \cdot \xi_{2|(\vec{e}_4, \vec{e}_6)} \cdot |(\vec{e}_4, \vec{e}_6)| = 1 \cdot |(\vec{e}_4, \vec{e}_6)|$$

$$\sin(\vec{e}_4, \vec{e}_6) = \sin(\psi_2 \cdot \xi_{2|(\vec{e}_4, \vec{e}_6)} \cdot |(\vec{e}_4, \vec{e}_6)|) = \psi_2 \cdot \xi_{2|(\vec{e}_4, \vec{e}_6)} \cdot |\sin(\vec{e}_4, \vec{e}_6)| = 1 \cdot |\sin(\vec{e}_4, \vec{e}_6)|$$

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = \psi_2 \cdot \xi_{2|(\vec{e}_1, \vec{e}_3)} \cdot |(\vec{e}_1, \vec{e}_3)| = -1 \cdot |(\vec{e}_1, \vec{e}_3)|$$

$$\sin(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = \sin(\psi_2 \cdot \xi_{2|(\vec{e}_1, \vec{e}_3)} \cdot |(\vec{e}_1, \vec{e}_3)|) = \psi_2 \cdot \xi_{2|(\vec{e}_1, \vec{e}_3)} \cdot |\sin(\vec{e}_1, \vec{e}_3)| = -1 \cdot |\sin(\vec{e}_1, \vec{e}_3)|$$

L'axe des sinus peut en effet se situer de part et d'autre des deux demi-plans délimités par l'axe des cosinus, c'est sa disposition qui oriente le plan.

Mais l'axe des cosinus ne peut pas se situer de part et d'autre des deux demi-plans délimités par l'axe des cosinus. Ainsi dans les fonctions trigonométriques de leurs cosinus on ne peut pas extraire les opérateurs d'orientations, car le signe du cosinus dépend de l'écart angulaire entre les vecteurs et qu'ils ne peuvent pas le caractériser. On se borne à écrire :

$$\cos(\vec{e}_4, \vec{e}_6) = \cos(\psi_2 \cdot \xi_{2|(\vec{e}_4, \vec{e}_6)} \cdot |(\vec{e}_4, \vec{e}_6)|) = \cos(\vec{e}_4, \vec{e}_6)$$

$$\cos(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = \cos(\psi_2 \cdot \xi_{2|(\vec{e}_1, \vec{e}_3)} \cdot |(\vec{e}_1, \vec{e}_3)|) = \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$$

On peut aussi comparer directement $(\vec{e}_4, \vec{e}_6)$ et $(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$:

Si $\xi_{2|(\vec{e}_4, \vec{e}_6)} \cdot \xi_{2|(\vec{e}_1, \vec{e}_3)} = 1$, ces angles sont orientés de la même façon.

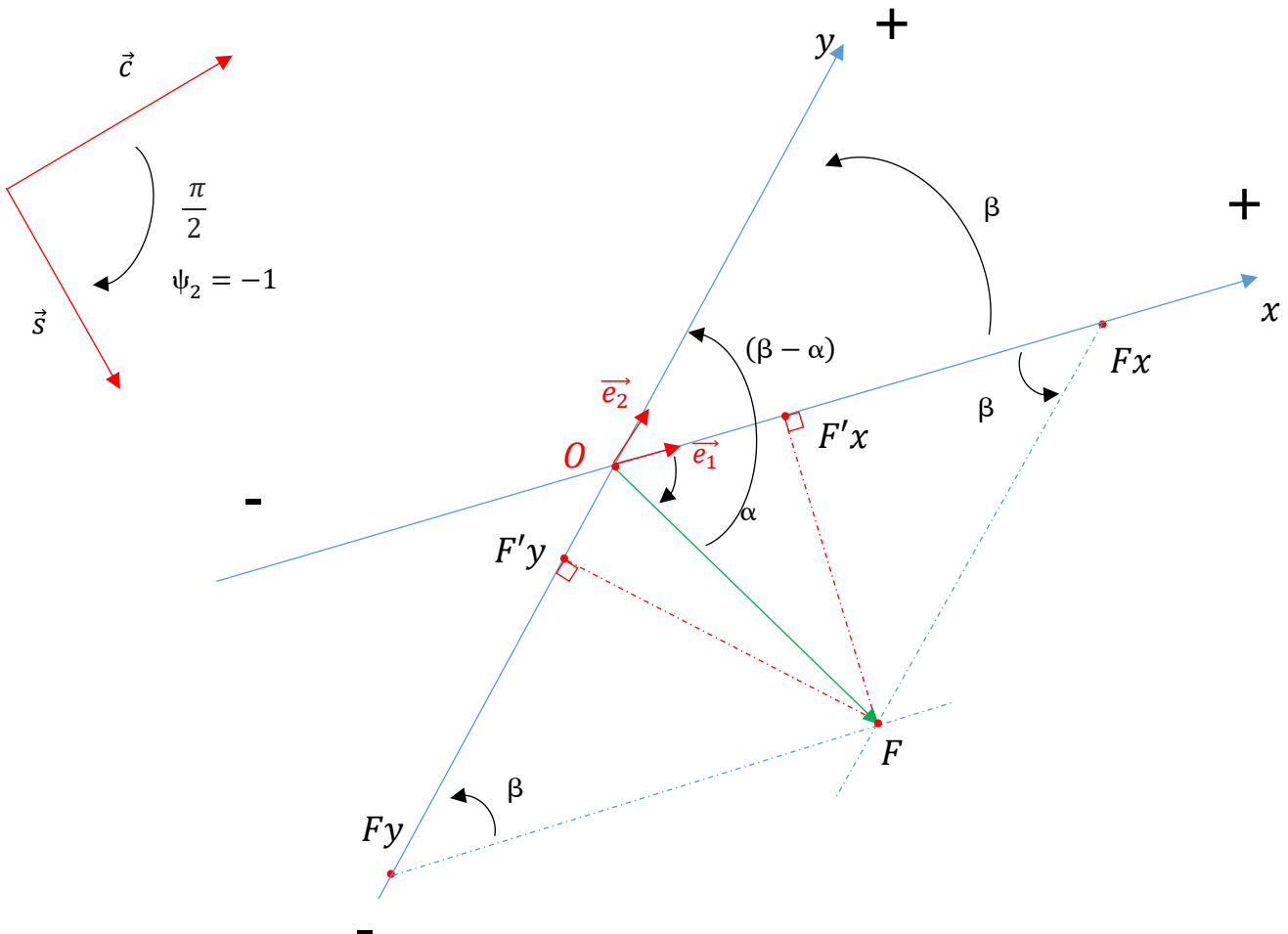
Si $\xi_{2|(\vec{e}_4, \vec{e}_6)} \cdot \xi_{2|(\vec{e}_1, \vec{e}_3)} = -1$, ces angles sont orientés de façon contraire.

Dans l'enseignement classique, on définit un sens direct ou indirect d'orientation du plan dans lesquels on compte les angles positivement ou négativement. C'est une méthode intuitive et rapide, mais elle est moins riche conceptuellement et soulève donc beaucoup d'interrogations.

On va maintenant retrouver ces concepts dans un calcul de coordonnées

Ci-dessous OFy , $OF'y$ et FxF mesures algébriques négatives et OFx , $OF'x$ et FyF mesures algébriques positives dans le repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ dont les coordonnées sont placées sur des axes orientés. La mesure OF reste en valeur absolue. Les mesures $F'xF$ et $F'yF$ ne sont pas évaluées.

On cherche les coordonnées $(x = OFx; y = OFy)$ du vecteur $\vec{OF}$ dans le repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$. La première opération consiste à placer le repère trigonométrique qui oriente le plan.



On attribue donc des mesures aux lectures des angles saillants allant d'un premier objet nommé à un second. Si elles suivent l'orientation du repère trigonométrique, elles sont positives. Dans le cas contraire elles sont négatives. On liste donc les angles entre vecteurs dessinés sur la figure :

$(\vec{e}_1; \vec{OF})$ mesuré positivement, $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ mesuré négativement, $(\vec{OF}; \vec{e}_2)$ mesuré négativement

$(\vec{FyF}; \vec{FyO})$ mesuré négativement, $(\vec{Fx F'x}; \vec{Fx F})$ mesuré négativement, $(\vec{OF}; \vec{e}_2)$ mesuré négativement.

Bien évidemment, les autres lectures sont en accord. Par exemple si $(\vec{FyF}; \vec{FyO})$ mesuré négativement, alors $(\vec{FyO}; \vec{FyF})$ est mesuré positivement, $(\vec{OFy}; \vec{FyF})$ est mesuré négativement.

Pour toutes ces mesures, la mesure de l'angle rentrant (lecture du plus long chemin allant d'un premier objet nommé à un second) est de signe contraire.

De plus, certains angles sont les mêmes, car les vecteurs qui les portent sont parallèles et de même sens :

$$\beta = (\vec{e}_1; \vec{e}_2) = (\vec{FyF}; \vec{FyO}) = (\vec{Fx F'x}; \vec{Fx F})$$

Et on a une composition additive par la loi de Chasles pour les angles :

$$\beta - \alpha = (\vec{e}_1; \vec{e}_2) - (\vec{e}_1; \vec{OF}) = (\vec{e}_1; \vec{e}_2) + (\vec{OF}; \vec{e}_1) = (\vec{OF}; \vec{e}_2)$$

Qui met simplement en accord la mesure négative de l'angle saillant $(\vec{OF}; \vec{e}_2)$ avec l'orientation du plan (celle du repère trigonométrique).

On a les relations entre les mesures algébriques suivantes :

$$OFx = OF'x + F'xFx = OF'x - FxF'x$$

Avec :

$$OF'x = |OF|. \cos \alpha$$

$$FxF'x = FxF. \cos \beta = OFy. \cos \beta$$

Soit :

$$OFx = |OF|. \cos \alpha - OFy. \cos \beta$$

On a aussi :

$$OFy = OF'y + F'yFy$$

Avec :

$$OF'y = |OF|. \cos(\beta - \alpha)$$

$$F'yFy = -FyF'y = -FyF. \cos \beta = -OFx. \cos \beta$$

Soit :

$$OFy = |OF|. \cos(\beta - \alpha) - OFx. \cos \beta$$

Si on décrit correctement un dessin particulier où s'applique un ensemble de méthodes bien définies, la force de la logique fait que les descriptions de tous les dessins où s'applique le même ensemble de méthodes sont possibles par les formules abstraites que sont les équations.

On peut maintenant résoudre le système de deux équations à deux inconnues qui décrit désormais dans le repère n'importe quel point F de coordonnées (x, y) :

$$x = OFx = |OF|. \cos \alpha - y. \cos \beta$$

$$y = OFy = |OF|. \cos(\beta - \alpha) - x. \cos \beta$$

Soit :

$$x = \frac{|OF| \cdot [\cos \alpha - \cos \beta \cdot \cos (\beta - \alpha)]}{1 - \cos^2 \beta}$$

$$y = \frac{|OF| \cdot [\cos (\beta - \alpha) - \cos \beta \cdot \cos \alpha]}{1 - \cos^2 \beta}$$

Puis, en utilisant les identités trigonométriques :

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos \beta \cdot \cos \alpha + \sin \beta \cdot \sin \alpha$$

$$\sin(\beta - \alpha) = \sin \beta \cdot \cos \alpha - \cos \beta \cdot \sin \alpha$$

$$\cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1$$

On résout :

$$x = \frac{|OF| \cdot \sin(\beta - \alpha)}{\sin \beta}$$

$$y = \frac{|OF| \cdot \sin \alpha}{\sin \beta}$$

On revient maintenant sur l'utilisation du couple $\psi_2 \cdot \xi_{2|i}$ pour en tirer les éclaircissements conceptuels nécessaires, en reprenant les notations :

$$\beta = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) ; \alpha = (\vec{e}_1, \vec{OF}) ; \beta - \alpha = (\vec{OF}, \vec{e}_2)$$

Comme on l'a vu, on peut écrire

$$\sin \beta = \sin(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \psi_2 \cdot \xi_{2|(\vec{e}_1, \vec{e}_2)} \cdot |\sin(\vec{e}_1, \vec{e}_2)|$$

$$\sin \alpha = \sin(\vec{e}_1, \vec{OF}) = \psi_2 \cdot \xi_{2|(\vec{e}_1, \vec{OF})} \cdot |\sin(\vec{e}_1, \vec{OF})|$$

$$\sin(\beta - \alpha) = \sin(\vec{OF}, \vec{e}_2) = \psi_2 \cdot \xi_{2|(\vec{OF}, \vec{e}_2)} \cdot |\sin(\vec{OF}, \vec{e}_2)|$$

On réécrit donc les coordonnées de $\vec{OF}$:

$$x = \frac{|OF| \cdot \psi_2 \cdot \xi_{2|(\vec{OF}, \vec{e}_2)} \cdot |\sin(\vec{OF}, \vec{e}_2)|}{\psi_2 \cdot \xi_{2|(\vec{e}_1, \vec{e}_2)} \cdot |\sin(\vec{e}_1, \vec{e}_2)|} = \frac{|OF| \cdot \xi_{2|(\vec{OF}, \vec{e}_2)} \cdot |\sin(\vec{OF}, \vec{e}_2)|}{\xi_{2|(\vec{e}_1, \vec{e}_2)} \cdot |\sin(\vec{e}_1, \vec{e}_2)|}$$

$$y = \frac{|OF| \cdot \psi_2 \cdot \xi_{2|(\vec{e}_1, \vec{OF})} \cdot |\sin(\vec{e}_1, \vec{OF})|}{\psi_2 \cdot \xi_{2|(\vec{e}_1, \vec{e}_2)} \cdot |\sin(\vec{e}_1, \vec{e}_2)|} = \frac{|OF| \cdot \xi_{2|(\vec{e}_1, \vec{OF})} \cdot |\sin(\vec{e}_1, \vec{OF})|}{\xi_{2|(\vec{e}_1, \vec{e}_2)} \cdot |\sin(\vec{e}_1, \vec{e}_2)|}$$

On comprend qu'elles ne dépendent pas directement de l'orientation du plan, mais des orientations relatives des lectures d'angles saillants qui vont du premier objet nommé au second.

Sur la figure ci-dessus on répertorie :

$$\xi_{2|(\vec{OF}, \vec{e}_2)} = -1$$

$$\xi_{2|(\vec{e}_1, \vec{OF})} = 1$$

$$\xi_{2|(\vec{e}_1, \vec{e}_2)} = -1$$

Ce qui correspond à $x > 0$ et $y < 0$. Donc la positivité de la coordonnée est en réalité une même orientation de l'objet mesuré et du repère dans lequel on le mesure. Cela signifie que les vecteurs unitaires du repère sont obligés de pointer des coordonnées neutres pour cette description. Et les coordonnées neutres sont alors positives.

Cela signifie aussi que l'angle saillant $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ entre les vecteurs de base du repère $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ peut-être mesuré négativement : cela conserve la justesse du calcul des coordonnées de $\vec{OF}$.

On peut alors, avec un outil théorique riche, répondre à différentes interrogations :

1) Le calcul des coordonnées de $\vec{e}_2$ dans le repère $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est vérifié :

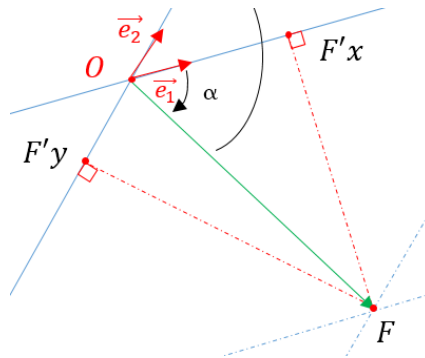
On pose $\vec{e}_2 = \vec{OF}$. On a $|OE_2|=1$. On donne alors les coordonnées de $\vec{e}_2$.

Pour une notation propre on peut noter $e_{2|1}$ la coordonnée de $\vec{e}_2$ sur l'axe de $\vec{e}_1$ et $e_{2|2}$ la coordonnée de $\vec{e}_2$ sur l'axe de $\vec{e}_2$:

$$e_{2|1} = x = \frac{|1| \cdot \xi_{2|(\vec{e}_2; \vec{e}_2)} \cdot |\sin(\vec{e}_2; \vec{e}_2)|}{\xi_{2|(\vec{e}_1, \vec{e}_2)} \cdot |\sin(\vec{e}_1, \vec{e}_2)|} = 0$$

$$e_{2|2} = y = \frac{|1| \cdot \xi_{2|(\vec{e}_1; \vec{e}_2)} \cdot |\sin(\vec{e}_1; \vec{e}_2)|}{\xi_{2|(\vec{e}_1, \vec{e}_2)} \cdot |\sin(\vec{e}_1, \vec{e}_2)|} = 1$$

2) Le calcul des coordonnées de $\vec{OF'x}$ dans le repère $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ permet de comprendre une propriété de la fonction cosinus :



$\vec{OF'x}$ est toujours lié à $\vec{e}_1$. On utilise la relation trigonométrique $OF'x = |OF| \cos(\vec{e}_1, \vec{OF})$:

$$OF'x_{|1} = \frac{|OF'x| \cdot \xi_{2|(\vec{OF'x}; \vec{e}_2)} \cdot |\sin(\vec{OF'x}; \vec{e}_2)|}{\xi_{2|(\vec{e}_1, \vec{e}_2)} \cdot |\sin(\vec{e}_1, \vec{e}_2)|} = |OF| \cos(\vec{e}_1, \vec{OF})$$

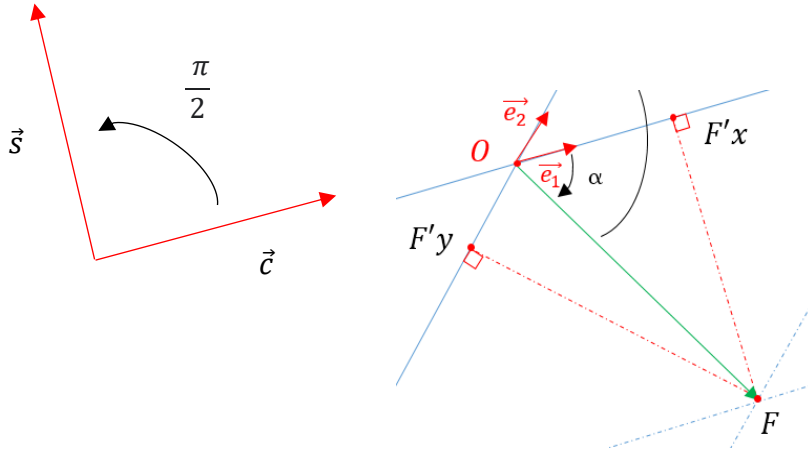
$$OF'x_{|2} = \frac{|OF'x| \cdot \xi_{2|(\vec{e}_1; \vec{OF'x})} \cdot |\sin(\vec{e}_1; \vec{OF'x})|}{\xi_{2|(\vec{e}_1, \vec{e}_2)} \cdot |\sin(\vec{e}_1, \vec{e}_2)|} = 0$$

Si $F'x > 0$, alors $\frac{\xi_{2|(\vec{OF'x}; \vec{e}_2)}}{\xi_{2|(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}} = 1$. Les angles saillants $(\vec{OF'x}; \vec{e}_2)$ et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ sont de même orientation, ce qui correspond à $(\vec{e}_1, \vec{OF})$ inférieur à l'angle droit.

Si $F'x < 0$, alors $\frac{\xi_{2|(\overrightarrow{OF'}x; \overrightarrow{e_2})}}{\xi_{2|(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})}} = -1$. Les angles saillants $(\overrightarrow{OF'}x; \overrightarrow{e_2})$ et $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ sont d'orientations contraires, ce qui correspond à $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OF})$ supérieur à l'angle droit.

Note : on a $|\sin(\overrightarrow{OF'}x; \overrightarrow{e_2})| = |\sin(\pm\pi + (\overrightarrow{OF'}x; \overrightarrow{e_2}))|$

3) la mesure algébrique $F'xF$ dans le repère $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est toujours en accord avec l'orientation du repère trigonométrique quand son vecteur $\vec{c}$ est superposé à $\overrightarrow{e_1}$. Il est impossible de la déduire des formules précédentes.



On utilise la relation trigonométrique $F'xF = |OF|. \sin(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OF})$. $\overrightarrow{F'xF}$ est toujours orthogonal à $\overrightarrow{e_1}$. Si la mesure de l'angle saillant $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OF})$ est négative, le vecteur $\overrightarrow{F'xF}$ se superpose à la direction de l'axe des sinus du repère trigonométrique mais pointe en sens inverse du vecteur $\vec{s}$. la mesure algébrique $F'xF$ sera alors négative.

Si la mesure de l'angle saillant $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OF})$ est positive (ce n'est pas le cas de la figure), le vecteur $\overrightarrow{F'xF}$ se superpose à la direction de l'axe des sinus du repère trigonométrique et pointe dans le même sens que le vecteur $\vec{s}$. la mesure algébrique $F'xF$ sera alors positive.

On donne maintenant les coordonnées de $\overrightarrow{F'xF}$:

$$F'xF_{|1} = \frac{|F'xF|. \xi_{2|(\overrightarrow{F'xF}; \overrightarrow{e_2})} \cdot |\sin(\overrightarrow{F'xF}; \overrightarrow{e_2})|}{\xi_{2|(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})} \cdot |\sin(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})|}$$

$$F'xF_{|2} = \frac{|F'xF|. \xi_{2|(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{F'xF})} \cdot |\sin(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{F'xF})|}{\xi_{2|(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})} \cdot |\sin(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})|}$$

On donne ci-dessous ses coordonnées simplifiées avec $|\sin(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{F'xF})| = 1$ et $(\overrightarrow{F'xF}; \overrightarrow{e_1}) = \pm \frac{\pi}{2}$ qui est en accord avec la mesure de l'angle saillant $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$:

$$(\overrightarrow{F'xF}; \overrightarrow{e_1}) + (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) = \pm \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$$

$$|\sin(\overrightarrow{F'xF}; \overrightarrow{e_2})| = \left| \sin\left(\pm \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})\right) \right| = |\cos(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})|$$

Soit :

$$F'xF_{|1} = \frac{\xi_{2|(\overrightarrow{F'xF}; \overrightarrow{e_2})} \cdot |F'xF|}{\xi_{2|(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})} \cdot |\tan(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})|}$$

$$F'xF_{|2} = \frac{\xi_{2|(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{F'xF})} \cdot |F'xF|}{\xi_{2|(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})} \cdot |\sin(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})|}$$

Attention, si on évacue les opérateurs, on peut écrire :

$$F'xF_{|1} = \frac{|F'xF| \cdot \sin(\overrightarrow{F'xF}; \overrightarrow{e_2})}{\sin(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})}$$

$$F'xF_{|2} = \frac{|F'xF| \cdot \sin(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{F'xF})}{\sin(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})}$$

Mais on ne peut pas écrire $F'xF_{|1} = \frac{|F'xF|}{\tan(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})}$, car $\sin(\overrightarrow{F'xF}; \overrightarrow{e_2}) = \cos(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ si la mesure de l'angle saillant $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est positive, mais $\sin(\overrightarrow{F'xF}; \overrightarrow{e_2}) = -\cos(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ si la mesure de l'angle saillant $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est négative. Le fait de simplifier fait toujours courir le risque d'erreur par des oublis d'informations

Note : pour $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) = 0 \text{ modulo } \pi$ le repère $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ n'est plus utilisable, on ne peut donner de coordonnées cartésiennes finies x et y . Leurs valeurs tendent vers l'infini quand $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ tend vers l'angle plat. On supprime donc une dimension, pour identifier un point de l'espace réduit à une droite, on écrit dans le repère $(O; \overrightarrow{e_1})$:

$$\overrightarrow{OF} = OF \cdot \overrightarrow{e_1} ; (x \text{ ou } y) = OF_{|1} ; ||\overrightarrow{OF}|| = |OF|$$

Ou dans le repère $(O; \overrightarrow{e_2})$:

$$\overrightarrow{OF} = OF \cdot \overrightarrow{e_2} ; (x \text{ ou } y) = OF_{|2} ; ||\overrightarrow{OF}|| = |OF|$$

On utilise la variable x ou y puisque les distinguer n'a alors plus de sens .

Les vecteurs sont des notions premières et n'ont en eux même pas de signe. Ils sont, en relation avec des repères, des normes $||\vec{v}||$ qui ont leurs longueurs mesurées par des nombres toujours positifs.

PERMUTATIONS DE VECTEURS ET ORIENTATIONS D'OBJETS

Soit une famille $\{\vec{v}_j\}_m = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m\}$ de m vecteurs libres entre eux confinés à un espace mD , et mesurés dans un repère de cet espace $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_m)$.

On forme le déterminant $\underset{R^m}{\overset{m \times m}{Det}}(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m)$ sur une énumération $\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m$.

On effectue dans $\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m$ une série de permutations entre deux vecteurs, ces vecteurs ayant déjà pu permuter ou non.

Note : on pourrait en effet considérer des permutations de groupes de vecteurs, mais l'état final de la suite initiale $\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m$ se ramènerait à une série de permutations entre deux vecteurs, ces vecteurs ayant déjà pu permuter ou non.

Chaque permutation entre deux vecteurs, c'est-à-dire tout dérangement par rapport à l'énumération précédente, change le signe du déterminant et conserve sa mesure en valeur absolue.

En particulier toutes les permutations circulaires d'une énumération de vecteurs $\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m$ ont un déterminant de même signe et sont selon m un sous ensemble plus petit ou égal de l'ensemble de toutes les permutations de $\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m$ qui ont un déterminant de même signe.

Exemple

$$\underset{R^4}{\overset{4 \times 4}{Det}}(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4) \text{ est de signe } +$$

$$\underset{R^4}{\overset{4 \times 4}{Det}}(\vec{v}_4; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_1) \text{ est de signe } -$$

$$\underset{R^4}{\overset{4 \times 4}{Det}}(\vec{v}_4; \vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1) \text{ est de signe } + \text{ et } \vec{v}_4; \vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1 \text{ est permutation circulaire de } \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)$$

$$\underset{R^4}{\overset{4 \times 4}{Det}}(\vec{v}_4; \vec{v}_1; \vec{v}_3; \vec{v}_2) \text{ est de signe } + \text{ et } \vec{v}_4; \vec{v}_1; \vec{v}_3; \vec{v}_2 \text{ n'est pas permutation circulaire de } \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4)$$

Interprétation analytique du changement de signe par permutation

On peut justifier le fait qu'une permutation entre deux vecteurs change le signe du déterminant en décomposant celui-ci en somme de lignes de coordonnées en produits :

$$\underset{R^m}{\overset{m \times m}{Det}}(\vec{v}_m; \dots; \vec{v}_2; \vec{v}_1) = \sum_{i=1}^{m!} \underset{\{i_1; \dots; i_j; \dots; i_m\}}{Perm} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ \text{à} \\ j=m}} c_j \cdot v_{j|i_j} \right)$$

Si deux vecteurs permutent entre eux dans $\underset{R^m}{\overset{m \times m}{Det}}(\vec{v}_m; \dots; \vec{v}_2; \vec{v}_1)$, ils permutent aussi dans toutes les lignes

de produits de coordonnées dont la somme donne alors le même résultat mais de signe contraire, car les signes de toutes les lignes de coordonnées en produit sont devenus contraires. On peut le montrer sur un exemple.

Note : j'ai conscience que ce n'est pas vraiment une démonstration, mais le temps presse, on est le 16/02, il est 14h12, et j'accepte que le temps me presse pour laisser la place à l'évènement de ce soir, où je compte donner un exemplaire papier de ce livre à Jean-Pierre Luminet pendant sa conférence à Issy les Moulineaux. Il est temps. Donc aller chez Bureau Vallée pour imprimer, et après ça si j'ai le temps aller dans la chambre du fils à Neuilly pour récupérer ses affaires. Ah, mon Victor, bon élève dans sa math spé, qui prépare les grands concours, ce que son papa farouchement distrait ne pouvait pas faire !

Exemple

Si on examine de près une des lignes dans $\underset{R^4}{\overset{4 \times 4}{\text{Det}}}(\vec{v}_4; \vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1)$, par exemple :

$$c_4 \cdot v_{4|(i_4=3)} \cdot c_3 \cdot v_{3|(i_3=2)} \cdot c_2 \cdot v_{2|(i_2=1)} \cdot v_{1|(i_1=4)}$$

Elle met en produit la coordonnée de $\vec{v}_4$ sur $\vec{e}_3$, $\vec{v}_3$ sur $\vec{e}_2$, $\vec{v}_2$ sur $\vec{e}_1$ et $\vec{v}_1$ sur $\vec{e}_4$

La valeur de i_2 est dans la série $k_2(i_j) = \{1; 4\}$. Comme $i_2 = 1$ est en première position dans cette série, le coefficient c_2 prend le rang d'un signe positif dans l'alternance de signe $\{+; -\}$. On écrit alors $c_2 = 1$.

La valeur de i_3 est dans la série $k_3(i_j) = \{1; 2; 4\}$. Comme $i_3 = 2$ est en deuxième position dans cette série, le coefficient c_3 prend le rang d'un signe négatif dans l'alternance de signe $\{+; -; +\}$. On écrit alors $c_3 = -1$.

La valeur de i_4 est dans la série complète $k_4(i_j) = \{1; 2; 3; 4\}$. Comme $i_4 = 3$, est en troisième position dans cette série, le coefficient c_4 prend le rang d'un signe positif dans l'alternance de signe $\{+; -; +; -\}$. On écrit alors $c_4 = 1$.

Donc $c_4 \cdot c_3 \cdot c_2 = -1$. La ligne $\pm v_{4|3} \cdot v_{3|2} \cdot v_{2|1} \cdot v_{1|4}$ est donc de signe négatif et s'écrit : $-v_{4|3} \cdot v_{3|2} \cdot v_{2|1} \cdot v_{1|4}$

Permutons maintenant $\vec{v}_3$ et $\vec{v}_2$. On a $\underset{R^4}{\overset{4 \times 4}{\text{Det}}}(\vec{v}_4; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_1)$, qui comporte la ligne

$$c_4 \cdot v_{4|(i_4=3)} \cdot c_3 \cdot v_{2|(i_2=1)} \cdot c_2 \cdot v_{3|(i_3=2)} \cdot v_{1|(i_1=4)}$$

La valeur de i_3 est dans la série $k_2(i_j) = \{2; 4\}$. Comme $i_3 = 2$ est en première position dans cette série, le coefficient c_2 prend le rang d'un signe positif dans l'alternance de signe $\{+; -\}$. On écrit alors $c_2 = 1$.

La valeur de i_2 est dans la série $k_3(i_j) = \{1; 2; 4\}$. Comme $i_2 = 1$ est en première position dans cette série, le coefficient c_3 prend le rang d'un signe positif dans l'alternance de signe $\{+; -; +\}$. On écrit alors $c_3 = 1$.

La valeur de i_4 est dans la série complète $k_4(i_j) = \{1; 2; 3; 4\}$. En effet $\underset{R^4}{\overset{4 \times 4}{\text{Det}}}(\vec{v}_4; \vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1)$ est un déterminant ultime et n'est pas contenu dans un autre. Comme $i_4 = 3$ est en troisième position dans cette série, le coefficient c_4 prend le rang d'un signe positif dans l'alternance de signe $\{+; -; +; -\}$. On écrit alors $c_4 = 1$.

Donc $c_4 \cdot c_3 \cdot c_2 = 1$. La ligne $\pm v_{4|3} \cdot v_{2|1} \cdot v_{3|2} \cdot v_{1|4}$ est donc de signe positif et s'écrit : $+v_{4|3} \cdot v_{2|1} \cdot v_{3|2} \cdot v_{1|4}$

Permutons maintenant $\vec{v}_4$ et $\vec{v}_2$. On a $\underset{R^4}{\overset{4 \times 4}{\text{Det}}}(\vec{v}_2; \vec{v}_4; \vec{v}_3; \vec{v}_1)$, qui comporte la ligne

$$c_4 \cdot v_{2|(i_2=1)} \cdot c_3 \cdot v_{4|(i_4=3)} \cdot c_2 \cdot v_{3|(i_3=2)} \cdot v_{1|(i_1=4)}$$

La valeur de i_3 est dans la série $k_2(i_j) = \{2; 4\}$. Comme $i_3 = 2$ est en première position dans cette série, le coefficient c_2 prend le rang d'un signe positif dans l'alternance de signe $\{+; -\}$. On écrit alors $c_2 = 1$.

La valeur de i_4 est dans la série $k_3(i_j) = \{2; 3; 4\}$. Comme $i_4 = 3$ est en deuxième position dans cette série, le coefficient c_3 prend le rang d'un signe négatif dans l'alternance de signe $\{+; -; +\}$. On écrit alors $c_3 = -1$.

La valeur de i_2 est dans la série complète $k_4(i_j) = \{1; 2; 3; 4\}$. Comme $i_2 = 1$ est en première position dans cette série, le coefficient c_4 prend le rang d'un signe positif dans l'alternance de signe $\{+; -; +; -\}$. On écrit alors $c_4 = 1$.

Donc $c_4 \cdot c_3 \cdot c_2 = -1$. La ligne $\pm v_{2|1} \cdot v_{4|3} \cdot v_{3|2} \cdot v_{1|4}$ est donc de signe négatif et s'écrit : $-v_{2|1} \cdot v_{4|3} \cdot v_{3|2} \cdot v_{1|4}$

On le voit sur cet exemple, deux permutations successives retrouve le signe initial de la ligne. Il en va de même pour toutes les lignes, donc deux permutations successives retrouve le signe initial du déterminant.

Note : j'aurai aimé me convaincre mieux par la preuve que je donne, ça me fait un peu mal...

Interprétation géométrique du changement de signe par permutation

Dans l'objet polymixial $(O; \vec{v}_1; \dots; \vec{v}_j; \dots; \vec{v}_m)$ défini dans un repère $(O; \vec{e}_1; \dots; \vec{e}_m)$, un vecteur $\vec{v}_j$ s'élève au-dessus du sous-objet polymixial formé sur tous les autres vecteurs $\{\vec{v}_m; \dots; \vec{v}_2; \vec{v}_1\} \setminus \vec{v}_j$ en n'étant pas combinaison linéaire de ces vecteurs.

Il y a donc un sous-espace vectoriel sur lequel est construit ce sous-objet polymixial (dans lequel son envoûteur prend toutes les directions combinaisons linéaires de $\{\vec{v}_m; \dots; \vec{v}_2; \vec{v}_1\} \setminus \vec{v}_j$).

Ce sous-objet polymixial est alors comme un séparateur d'espace, analogue d'un plan de symétrie $(O; \vec{v}_2; \vec{v}_1)$, pour $\vec{v}_3$ non combinaison linéaire de $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ dans l'objet $(O; \vec{v}_3; \vec{v}_2; \vec{v}_1)$ défini dans un repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$.

Le vecteur qui s'élève dans un espace de dimension supérieur est donc soit « devant », soit « derrière » le séparateur, mais où qu'il soit il embrasse une des deux moitiés d'espace dans $(O; \vec{e}_1; \dots; \vec{e}_m)$.

Si on effectue une permutation entre deux vecteurs dans $(O; \vec{v}_1; \dots; \vec{v}_j; \dots; \vec{v}_m)$, le séparateur d'espace prend un autre ensemble de directions dans $(O; \vec{e}_1; \dots; \vec{e}_m)$. Le vecteur qui a permuté se retrouve toujours soit « devant », soit « derrière » le séparateur, et où qu'il soit il embrasse un des deux moitiés d'espace dans $(O; \vec{e}_1; \dots; \vec{e}_m)$, mais ce n'est pas la même qu'avant.

En effet, si il existe m directions dans un espace ou un objet mD , il n'existe que deux sens d'orientation. On les discrimine par $+$ et $-$:

Exemple

Tous les angles saillants entre deux vecteurs dans un plan peuvent se construire avec des vecteurs dans toutes les directions du plan, mais l'orientation de l'angle ne peut être que $+$ ou $-$

Note : il y a confusion facile entre la notion d'orientation selon toutes les directions et ce dont on parle malheureusement mathématiquement ici avec le même mot « orientation » ne décrit pas la même réalité. C'est sûrement la faute à mon ignorance de ce qui se fait de correct en mathématiques. Mais je continue de jouer le jeu avec moi-même. Pour ce qui nous préoccupe mon envoûteur et moi, car je ne veux pas jouer tout seul, « orientation intrinsèque » me semble mieux, mais on devrait pouvoir trouver un meilleur mot.

LE CIEL EST MA FAMILLE

Quand on lève les yeux vers la voûte étoilée, une attirance porte à comprendre ce que l'on voit. On peut saisir les astres avec un télescope, on peut aussi les saisir avec les mathématiques. Je ne sais pas si la joie est plus intense, mais certainement celui qui regarde est devenu différent et davantage capable de vision. Lorsqu'il y a deux ans je regardais le ciel je ne savais pas que je deviendrais capable de le lire. Aussi, je propose ici une méthode tirée du chapitre « conversion de coordonnées entre repères quelconques euclidiens », pour convertir les coordonnées cartésiennes d'un objet céleste d'un repère cosmique à un autre. Je sais très bien d'une part que tout cela n'est pas nouveau, d'autre part que la méthode est une approximation qui ne tient ni compte des mouvements célestes ni des marges d'erreur énormes liées aux mesures, qu'il existe d'autres systèmes de coordonnées, et que sais-je encore... mais l'essentiel est là : le ciel est ma famille car je l'ai saisi par un vrai petit bout.

On forme donc un repère d'origine O formé sur trois étoiles prises au hasard mais non coplanaires, et on va convertir les coordonnées d'un objet M de ce repère dans un repère d'origine O' formé sur les trois mêmes étoiles.

Il y a la condition qu'elles ne paraissent pas là-bas coplanaires non plus, et que O et O' soit astronomiquement assez éloignés pour que des mesures significativement différentes puissent être faites et diminuer ainsi les imprécisions des mesures.

Je choisis donc les étoiles E_1, E_2, E_3 . L'opérateur situé en O mesure les écarts angulaires entre ces étoiles, ce qui est facile à faire avec un cercle gradué, et doit pouvoir en évaluer la distance, ce dont nous supposons qu'il le peut avec certaines techniques dont nous ne traiterons pas ici.

L'opérateur utilise une unité de mesure pour définir ses vecteurs de base de longueurs apparentes identiques valant 1 unité de ce qu'il voudra prendre pour référence de distance (son pied, un mètre, une année-lumière...), tel que :

$$\frac{\overrightarrow{OE_1}}{\left\| \overrightarrow{OE_1} \right\|} = \vec{e}_1 ; \frac{\overrightarrow{OE_2}}{\left\| \overrightarrow{OE_2} \right\|} = \vec{e}_2 ; \frac{\overrightarrow{OE_3}}{\left\| \overrightarrow{OE_3} \right\|} = \vec{e}_3$$

Avec son cercle gradué il a donc mesuré les angles $(\vec{e}_1, \vec{e}_2), (\vec{e}_2, \vec{e}_3), (\vec{e}_3, \vec{e}_1)$. Peu importe le signe qu'il donne à ces angles pour le calcul qu'il se propose de faire, car ces angles seront traités par des fonctions cosinus, lesquelles discriminent les signes positifs et négatifs des mesures selon l'écartement angulaire et sans référence aux orientations des plans contenant les angles, donnés par le signe choisi pour la mesure.

Note : contrairement à la fonction sinus qui discrimine les signes positifs et négatifs des mesures selon l'écartement angulaire et avec référence à l'orientation du plan.

Cela forme son repère local d'origine $O : (O ; \vec{e}_1 ; \vec{e}_2 ; \vec{e}_3)$. Il peut donc renseigner les coordonnées de chacune des étoiles qui sont très faciles à donner puisqu'elles orientent le repère local :

$$\overrightarrow{OE_1} (\left\| \overrightarrow{OE_1} \right\| \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3)$$

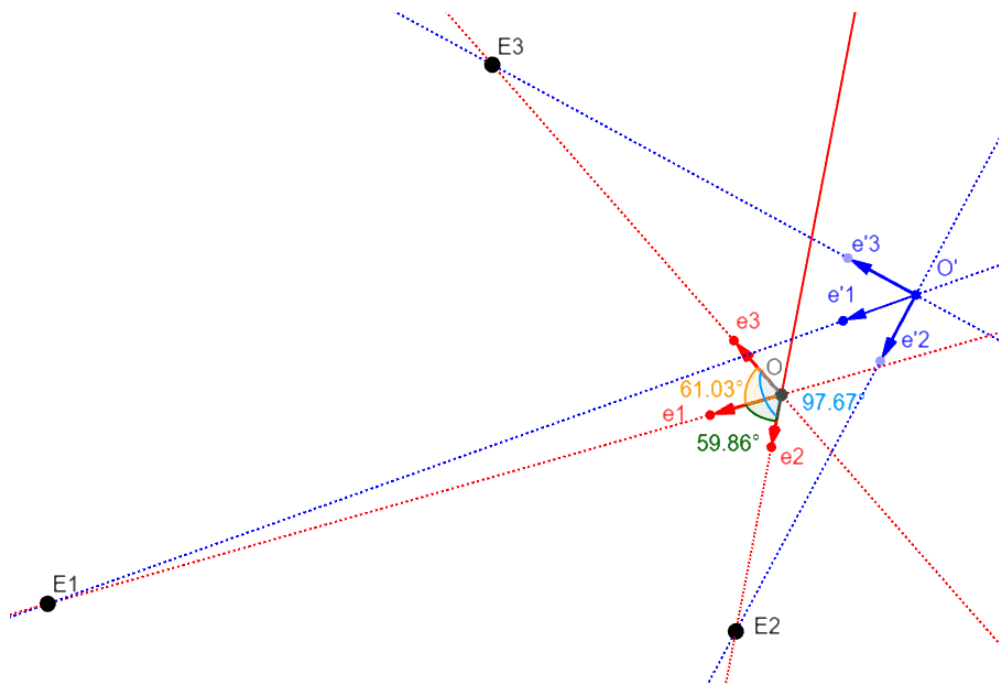
$$\overrightarrow{OE_2} (0 \cdot \vec{e}_1 + \left\| \overrightarrow{OE_2} \right\| \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3)$$

$$\overrightarrow{OE_3} (0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + \left\| \overrightarrow{OE_3} \right\| \cdot \vec{e}_3)$$

Il pointe ensuite dans le ciel un point O' . Il prend dans son repère $(O ; \vec{e}_1 ; \vec{e}_2 ; \vec{e}_3)$ les coordonnées de O' pour connaître $\overrightarrow{OO'}$:

$$\overrightarrow{OO'} (OO'_{|1} \cdot \vec{e}_1 + OO'_{|2} \cdot \vec{e}_2 + OO'_{|3} \cdot \vec{e}_3)$$

Note : puisque $O(0. \vec{e}_1 + 0. \vec{e}_2 + 0. \vec{e}_3)$, on peut alléger l'écriture en $O'(O'_{|1} ; O'_{|2} ; O'_{|3})$

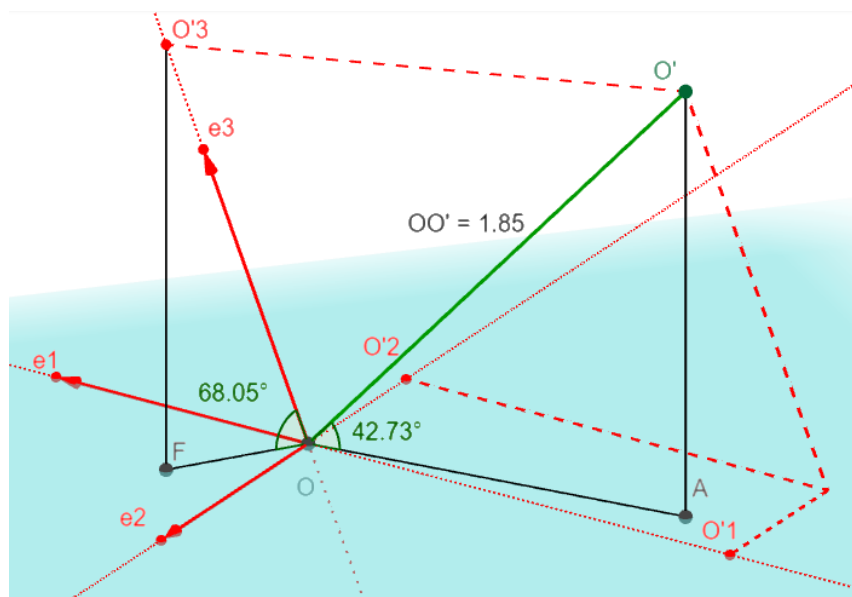


Pour trouver les coordonnées de O' , on suppose là aussi que l'opérateur sait en donner la distance (disons simplement qu'une mesure précise $|\overline{OO'}|$ peut être donner par radar ou laser sur des objets proches mais que dans ce cas il faudra choisir autre chose que de lointaines étoiles pour dégager une utilité à des formules de conversions de coordonnées dans des repères qui seront alors trop semblables).

Pour trouver les coordonnées de O' dans $(O ; \vec{e}_1 ; \vec{e}_2 ; \vec{e}_3)$, on procède comme suit :

La coordonnée $O'_{|3}$ est situé à l'intersection du plan parallèle au plan $(O ; \vec{e}_1 ; \vec{e}_2)$ passant par le point O' .

L'opérateur mesure l'élévation angulaire du point O' au-dessus du plan $(O ; \vec{e}_1 ; \vec{e}_2)$ et celle du point E_3 au-dessus du plan $(O ; \vec{e}_1 ; \vec{e}_2)$. Il a donc les mesures d'angle $(\overline{OA} ; \overline{OO'})$ et $(\overline{OF} ; \overline{e}_3)$.



On a l'égalité :

$$|FO'_{|3}| = |AO'| = |OO'| \cdot |\sin(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OO'})| = |OO'_{|3}| \cdot |\sin(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{e_3})|$$

Note : la notation prête un peu à confusion. il s'agit de la distance du point F au point $O'_{|3}$, et non pas de la coordonnée sur $\overrightarrow{e_3}$ du vecteur $\overrightarrow{FO'}$, même s'il se trouve que c'est la même en valeur absolue dans ce cas de figure. Le logiciel GeoGebra, qui par ailleurs m'a tellement aidé à réfléchir, ne m'a pas permis d'écrire $O'_{|3}$ mais seulement $O'3$.

Le signe de la coordonnée $OO'_{|3}$ s'évalue si le point O' est du même coté que le point E_3 (ou le vecteur $\overrightarrow{e_3}$ qui pointe E_3), dans l'espace délimité par le plan $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$. Si c'est le cas, la coordonnée est positive, sinon elle est négative. On peut donc écrire une équation avec cet opérateur de jugement observationnel. On peut aussi mesurer les angles saillants $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OO'})$ et $(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{e_3})$ avec un même signe pour formaliser ce fait. On peut enfin formaliser ce fait de manière plus mathématique, en utilisant un opérateur $\xi_{3|(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3})}$ qui prend la valeur 1 si $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3})$ est directoïde et la valeur -1 si $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3})$ est indirectoïde.

Note : c'est la méthode que nous retiendrons, bien que la moins simple, car elle est la plus proche d'un lendemain où voltigent des concepts généraux mal distingués, mes objets polymixiaux, les formules de Cramer etc.

De même, donc, on utilise un opérateur $\xi_{3|(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{OO'})}$ qui prend la valeur 1 si $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{OO'})$ est directoïde et la valeur -1 si $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{OO'})$ est indirectoïde. Dans ce cas on a :

$$OO'_{|3} = \xi_{3|(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3})} \cdot \xi_{3|(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{OO'})} \cdot \frac{|OO'| \cdot |\sin(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OO'})|}{|\sin(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{e_3})|}$$

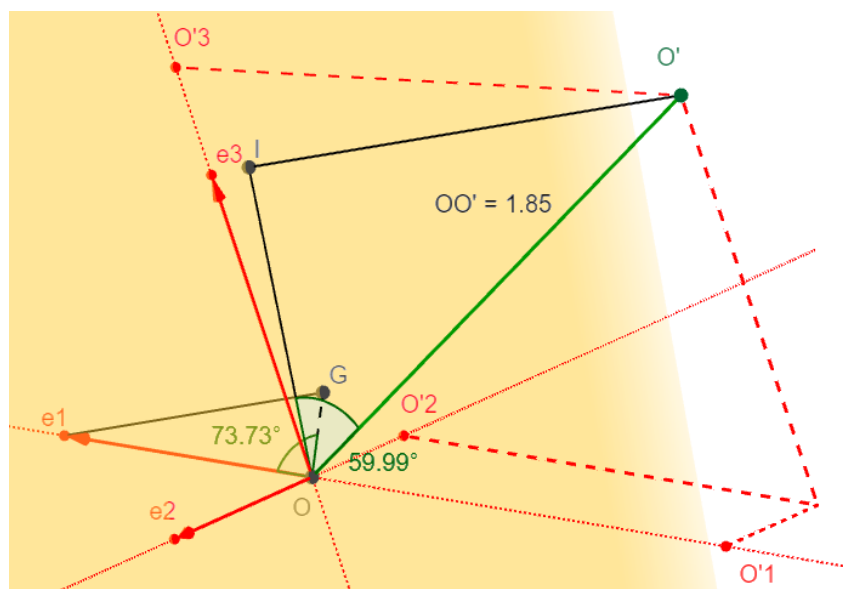
Si $\xi_{3|(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3})} \cdot \xi_{3|(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{OO'})} = 1$, la coordonnée est positive car $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3})$ et $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{OO'})$ sont orientés alors de la même façon.

Note : si on avait comparé $(O; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_3})$ et $(O; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{OO'})$ on aurait eu les mêmes conditions de validité :

$$\xi_{3|(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3})} \cdot \xi_{3|(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{OO'})} = \xi_{3|(O; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_3})} \cdot \xi_{3|(O; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{OO'})}$$

Plus généralement, quelle que soit la permutation des vecteurs dans $(O; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_3})$, elle est à comparer avec sa copie dans laquelle les vecteurs du plan séparatif subsistent, alors que le vecteur $\overrightarrow{OO'}$ se substitue au troisième vecteur situé hors de ce plan.

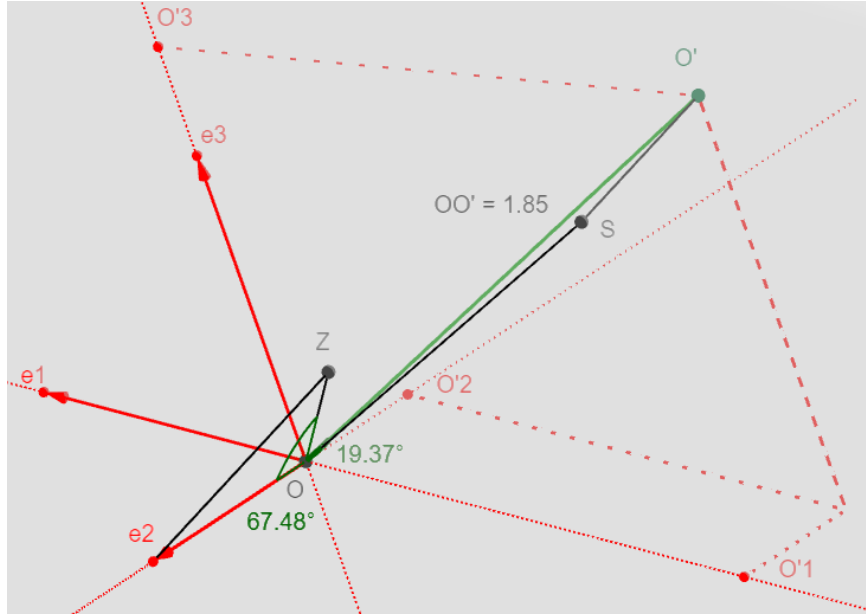
On cherche ensuite la coordonnée $OO'_{|2}$:



On raisonne de la même manière. L'opérateur situe O' et $\vec{e}_1$ par rapport au plan $(O ; \vec{e}_2 ; \vec{e}_3)$, mais il compare cette fois-ci les objets $(O ; \vec{e}_2 ; \vec{e}_3 ; \vec{e}_1)$ et $(O ; \vec{e}_2 ; \vec{e}_3 ; \vec{OO'})$. Il aboutit à :

$$OO'_{|2} = \xi_{3|(O ; \vec{e}_2 ; \vec{e}_3 ; \vec{e}_1)} \cdot \xi_{3|(O ; \vec{e}_2 ; \vec{e}_3 ; \vec{OO'})} \cdot \frac{|\vec{OO'}| \cdot |\sin(\vec{OI} ; \vec{OO'})|}{|\sin(\vec{OG} ; \vec{e}_1)|}$$

On cherche ensuite la coordonnée $OO'_{|1}$:



On raisonne de la même manière. L'opérateur situe O' et $\vec{e}_2$ par rapport au plan $(O ; \vec{e}_1 ; \vec{e}_3)$, mais il compare cette fois-ci les objets $(O ; \vec{e}_3 ; \vec{e}_1 ; \vec{e}_2)$ et $(O ; \vec{e}_3 ; \vec{e}_1 ; \vec{OO'})$. Il aboutit à :

$$OO'_{|1} = \xi_{3|(O ; \vec{e}_3 ; \vec{e}_1 ; \vec{e}_2)} \cdot \xi_{3|(O ; \vec{e}_3 ; \vec{e}_1 ; \vec{OO'})} \cdot \frac{|\vec{OO'}| \cdot |\sin(\vec{OS} ; \vec{OO'})|}{|\sin(\vec{OZ} ; \vec{e}_2)|}$$

L'opérateur peut donc maintenant former les coordonnées des vecteurs $\vec{O'E_1}$, $\vec{O'E_2}$, $\vec{O'E_3}$:

$$\vec{O'E_1} (|\vec{OE_1}| - OO'_{|1}) \cdot \vec{e_1} - OO'_{|2} \cdot \vec{e_2} - OO'_{|3} \cdot \vec{e_3}$$

$$O'E_{1|1} = |\vec{OE_1}| - OO'_{|1} ; O'E_{1|2} = -OO'_{|2} ; O'E_{1|3} = -OO'_{|3}$$

$$\vec{O'E_2} (-OO'_{|1} \cdot \vec{e_1} + (|\vec{OE_2}| - OO'_{|2}) \cdot \vec{e_2} - OO'_{|3} \cdot \vec{e_3})$$

$$O'E_{2|1} = -OO'_{|1} ; O'E_{2|2} = |\vec{OE_2}| - OO'_{|2} ; O'E_{2|3} = -OO'_{|3}$$

$$\vec{O'E_3} (-OO'_{|1} \cdot \vec{e_1} - OO'_{|2} \cdot \vec{e_2} + (|\vec{OE_3}| - OO'_{|3}) \cdot \vec{e_3})$$

$$O'E_{3|1} = -OO'_{|1} ; O'E_{3|2} = -OO'_{|2} ; O'E_{3|3} = |\vec{OE_3}| - OO'_{|3}$$

Il sait calculer leurs normes en fonction des angles entre les vecteurs de base de son repère :

$$\left| \overrightarrow{O'E_1} \right| = [O'E_{1|1}^2 + O'E_{1|2}^2 + O'E_{1|3}^2 + 2.O'E_{1|1}.O'E_{1|2}.cos(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) + 2.O'E_{1|3}.O'E_{1|2}.cos(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) + 2.O'E_{1|3}.O'E_{1|1}.cos(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1})]^{1/2}$$

$$\left| \overrightarrow{O'E_2} \right| = [O'E_{2|1}^2 + O'E_{2|2}^2 + O'E_{2|3}^2 + 2.O'E_{2|1}.O'E_{2|2}.cos(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) + 2.O'E_{2|3}.O'E_{2|2}.cos(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) + 2.O'E_{2|3}.O'E_{2|1}.cos(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1})]^{1/2}$$

$$\left| \overrightarrow{O'E_3} \right| = [O'E_{3|1}^2 + O'E_{3|2}^2 + O'E_{3|3}^2 + 2.O'E_{3|1}.O'E_{3|2}.cos(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) + 2.O'E_{3|3}.O'E_{3|2}.cos(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) + 2.O'E_{3|3}.O'E_{3|1}.cos(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1})]^{1/2}$$

Cela forme son repère distant d'origine O' : $(O' ; \frac{\overrightarrow{O'E_1}}{\left| \overrightarrow{O'E_1} \right|} ; \frac{\overrightarrow{O'E_2}}{\left| \overrightarrow{O'E_2} \right|} ; \frac{\overrightarrow{O'E_3}}{\left| \overrightarrow{O'E_3} \right|})$, que l'on peut renommer pour alléger l'écriture en : $(O' ; \overrightarrow{e'_1} ; \overrightarrow{e'_2} ; \overrightarrow{e'_3})$

Il pointe ensuite dans le ciel un point M. Il prend dans son repère local $(O ; \overrightarrow{e_1} ; \overrightarrow{e_2} ; \overrightarrow{e_3})$ les coordonnées de M pour connaître $\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{OM}(OM_{|1}.\overrightarrow{e_1} ; OM_{|2}.\overrightarrow{e_2} ; OM_{|3}.\overrightarrow{e_3})$$

$$M(M_{|1} ; M_{|2} ; M_{|3})$$

Pour trouver les coordonnées de M dans $(O ; \overrightarrow{e'_1} ; \overrightarrow{e'_2} ; \overrightarrow{e'_3})$, On procède de la même manière que pour O' .

L'opérateur peut ensuite calculer les coordonnées $\overrightarrow{O'M}$ dans le repère $(O' ; \overrightarrow{e'_1} ; \overrightarrow{e'_2} ; \overrightarrow{e'_3})$:

$$\overrightarrow{O'M}(O'M'_{|1}.\overrightarrow{e'_1} ; O'M'_{|2}.\overrightarrow{e'_2} ; O'M'_{|3}.\overrightarrow{e'_3})$$

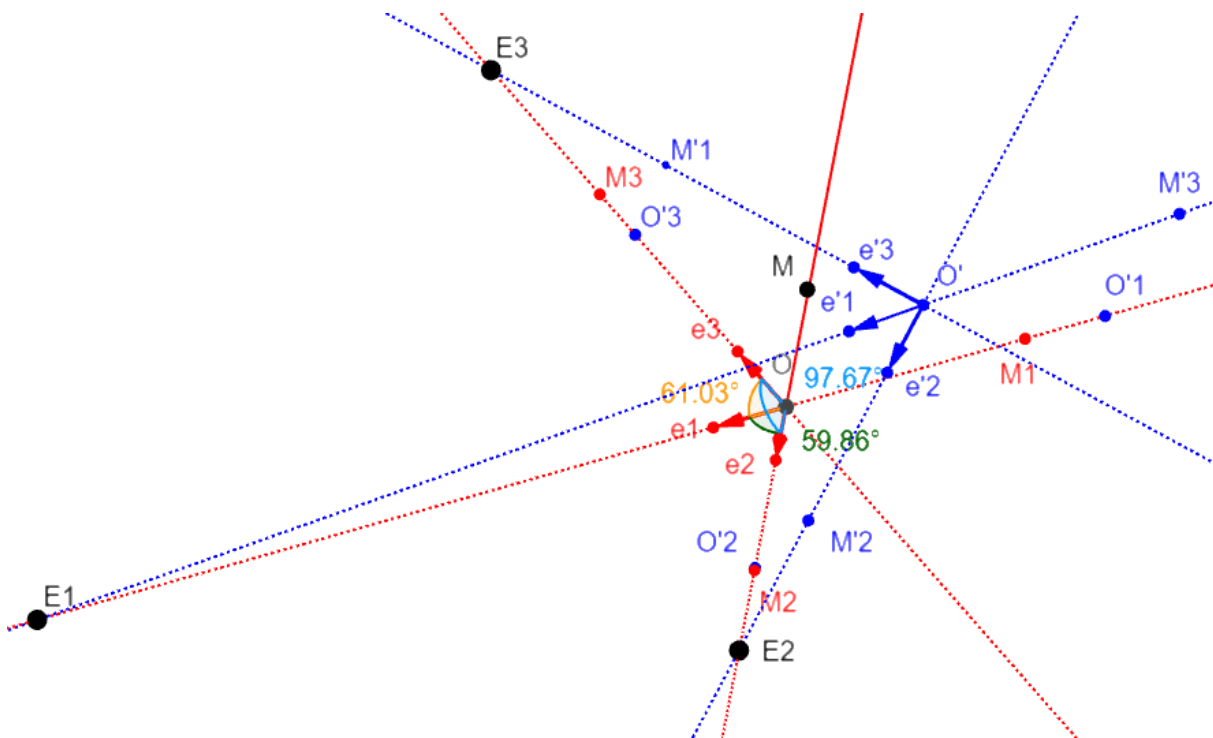
$$M(M'_{|1} ; M'_{|2} ; M'_{|3})$$

Elles sont données par des quotients d'objets polymixiaux 3D orientés (des parallélépipèdes). La constante a caractérisant la configuration du repère quelconque $(O ; \overrightarrow{e_1} ; \overrightarrow{e_2} ; \overrightarrow{e_3})$ étant effacée par division. Toutes les valeurs à droite des signes « = » sont des mesures algébriques dans $(O ; \overrightarrow{e_1} ; \overrightarrow{e_2} ; \overrightarrow{e_3})$:

$$O'M'_{|1} = \frac{a. \begin{vmatrix} O'E_{3|1} & (OM_{|1} - OO'_{|1}) & O'E_{2|1} \\ O'E_{3|2} & (OM_{|2} - OO'_{|2}) & O'E_{2|2} \\ O'E_{3|3} & (OM_{|3} - OO'_{|3}) & O'E_{2|3} \end{vmatrix}}{a. \begin{vmatrix} O'E_{3|1} & O'E_{1|1} & O'E_{2|1} \\ O'E_{3|2} & O'E_{1|2} & O'E_{2|2} \\ O'E_{3|3} & O'E_{1|3} & O'E_{2|3} \end{vmatrix}} \cdot \left| \overrightarrow{O'E_1} \right|$$

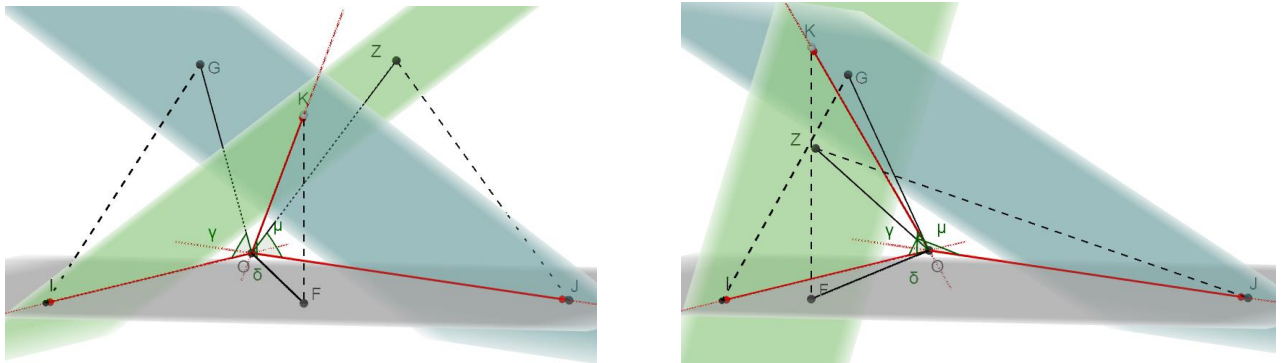
$$O'M'_{|2} = \frac{a. \begin{vmatrix} O'E_{3|1} & O'E_{1|1} & (OM_{|1} - OO'_{|1}) \\ O'E_{3|2} & O'E_{1|2} & (OM_{|2} - OO'_{|2}) \\ O'E_{3|3} & O'E_{1|3} & (OM_{|3} - OO'_{|3}) \end{vmatrix}}{a. \begin{vmatrix} O'E_{3|1} & O'E_{1|1} & O'E_{2|1} \\ O'E_{3|2} & O'E_{1|2} & O'E_{2|2} \\ O'E_{3|3} & O'E_{1|3} & O'E_{2|3} \end{vmatrix}} \cdot \left\| \overrightarrow{O'E_2} \right\|$$

$$O'M'_{|3} = \frac{a. \begin{vmatrix} (OM_{|1} - OO'_{|1}) & O'E_{1|1} & O'E_{2|1} \\ (OM_{|2} - OO'_{|2}) & O'E_{1|2} & O'E_{2|2} \\ (OM_{|3} - OO'_{|3}) & O'E_{1|3} & O'E_{2|3} \end{vmatrix}}{a. \begin{vmatrix} O'E_{3|1} & O'E_{1|1} & O'E_{2|1} \\ O'E_{3|2} & O'E_{1|2} & O'E_{2|2} \\ O'E_{3|3} & O'E_{1|3} & O'E_{2|3} \end{vmatrix}} \cdot \left\| \overrightarrow{O'E_3} \right\|$$



JUSTIFICATION DE LA REFERENCE LOGIQUE DU MODELE AUX MESURES DE $(O; \vec{i}; \vec{j})$ 2D

Note , ce 12/02/2022 : cet article a été écrit il y a environ un an et demi, je crois que j'y parle beaucoup de choses que je ne vois pas clairement. C'est une excellente méthode pour progresser, surtout si on n'en a pas d'autres. Mais peut-être pourra-t-on lire à la place l'article « Angles et mesures algébriques en référence logique à un objet orienté », qui est tout récent.



Sur les images ci-dessus, si on choisit le signe de $\sin(\vec{j}, \vec{k})$ identique au signe de $\sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF})$ comme possibilité d'orientation du plan $(O; \vec{j}; \vec{k})$, on a alors le choix entre deux modèles possibles.

Le premier modèle est celui d'une référence logique aux variables du plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Dans ce cas l'orientation du plan $(O; \vec{k}; \vec{i})$ est directement donnée par celle du plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$, et $\sin(\vec{k}, \vec{i})$ est identique au signe de $-\sin(\vec{i}, \overrightarrow{OF})$. De même l'orientation du plan $(O; \vec{i}; \vec{j})'$ ne se déduit pas des autres plans. Dans ce cas $\sin(\vec{i}, \vec{j})'$ est du signe de $\sin(\vec{i}, \vec{j})$, et $(O; \vec{i}; \vec{j})'$ est orienté de la même façon que $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Le second modèle, concevable par permutation circulaire des vecteurs $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$, est celui d'une référence du plan $(O; \vec{k}; \vec{i})$ au plan $(O; \vec{j}; \vec{k})$. Dans ce cas $\sin(\vec{k}, \vec{i})$ est identique au signe de $\sin(\vec{k}, \overrightarrow{OG})$, et $\sin(\vec{i}, \vec{j})'$ est de signe identique au signe de $\sin(\vec{i}, \overrightarrow{OZ})$, ce qui détermine l'orientation du plan $(O; \vec{i}; \vec{j})'$.

Chacun de ces modèles oriente convenablement les plans $(O; \vec{j}; \vec{k})$, $(O; \vec{k}; \vec{i})$ et $(O; \vec{i}; \vec{j})'$. Mais dans le modèle de permutation circulaire, l'orientation du plan $(O; \vec{i}; \vec{j})'$ n'est pas systématiquement identique à celle de $(O; \vec{i}; \vec{j})$. C'est-à-dire que les calculs donnent parfois une valeur de $\sin(\vec{i}, \vec{j})'$ de signe contraire à $\sin(\vec{i}, \vec{j})$.

On voit sur les images ci-dessus que, les paramètres $(\vec{i}, \vec{j})$, δ et $(\vec{j}, \overrightarrow{OF})$ ayant été choisis, si l'on fait varier $(\vec{j}, \overrightarrow{OF})$ tel que $\sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF})$ soit toujours de mêmes signes dans l'intervalle $] -\pi ; \pi]$, il arrive que le point G passe de part et d'autre du vecteur $\vec{k}$ dans le plan $(O; \vec{j}; \vec{k})$.

Dans ce cas $\sin(\vec{k}, \overrightarrow{OG})$ change de signe, et par conséquent $\sin(\vec{k}, \vec{i})$ change de signe, et donc $\sin(\vec{i}, \overrightarrow{OZ})$ change aussi de signe. Or $\sin(\vec{i}, \overrightarrow{OZ})$ reste dans l'intervalle $] -\pi ; \pi]$ comme on le voit sur les images, son changement de signe n'a donc aucune raison géométrique de se produire.

On en conclut que puisque $\sin(\vec{i}, \vec{j})'$ est du signe de $\sin(\vec{i}, \overrightarrow{OZ})$, il peut dans certains cas être de signe contraire à $\sin(\vec{i}, \vec{j})$ à cause d'une variation de la quantité $|\sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF})|$. On choisira donc d'utiliser le premier modèle.

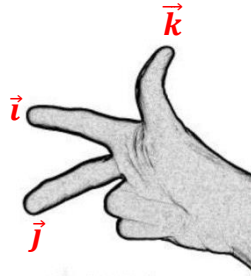
Remarque : les deux modèles permettent de retrouver les paramètres dans le cas particulier où $\sin(\vec{i}, \vec{j}) = 0$, c'est-à-dire quand le plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$ n'existe pas. On ne distinguera donc pas la pertinence des modèles sur ce critère. La référence logique à la droite (OIJ) n'est pas indispensable quand le repère est en deux dimensions.

Le raisonnement ci-dessus n'est pas convaincant dans tous les cas. Peut-être peut-on construire un modèle plus élaboré, dans lequel l'orientation des plans $(O; \vec{j}; \vec{k})$, $(O; \vec{k}; \vec{i})$ et $(O; \vec{i}; \vec{j})'$ ne soit pas simplement donné par les signes de $\sin(\vec{j}, \overrightarrow{OF})$, $\sin(\vec{k}, \overrightarrow{OG})$ et $\sin(\vec{i}, \overrightarrow{OZ})$. Ce ne sera pas alors ce modèle qui sera intéressant, puisqu'il sera plus complexe que le premier pour aboutir éventuellement à la même utilité. Ce qui sera intéressant sera de savoir si un tel modèle est possible, conditionnant la façon dont on raisonne sur les paramètres.

La justification est simultanée à la modification de la volonté personnelle, mais la modification non trompeuse de la volonté est au-delà de soi. C'est à dire, pour donner une image à ce mot, la sensibilité au réel ouverte à la forme d'un inconnu, ce qui au cœur de soi est l'élaboration d'une scrutation non mentale, donc de nature complètement différente et précédant tous types de créations volontaires. Cette vision intérieure préserve l'être des chaos spontanés de sa volonté.

TECHNIQUES D'ORIENTATION DE L'ESPACE

Les produits vectoriels de tous les vecteurs d'un espace vectoriel sont orthogonaux au plan des Deux vecteurs en produit définissent un troisième vecteur nommé « produit vectoriel » dont la norme est la valeur absolue du sinus de l'angle entre les deux vecteurs mis en produit, dont la direction est orthogonale au plan contenant les vecteurs en produit et dont le sens dépend du choix de l'observateur suivant une loi d'orientation de l'espace. On présente ici la technique des trois doigts de la main droite (il existe d'autres techniques) qu'on utilise de façon classique pour identifier l'orientation des repères orthonormés.



La paume d'une main (capable de s'orienter dans tous les sens de l'espace euclidien) étant à l'origine du repère, l'index montre $\vec{i}$, le majeur montre $\vec{j}$, le pouce montre $\vec{k}$ (ou toutes autres permutations des trois vecteurs dans un ordre circulaire). Les repères qui suivent cette orientation sont dits directs, les autres sont indirects. Cette technique identifie donc deux sens contraires dans l'espace, ce qui permet d'orienter en référence à l'un ou l'autre certains objets s'y trouvant.

Cette règle d'orientation est aussi valable pour les repères quelconques, à condition d'imaginer des doigts très élastiques. Dans ce cas si entre deux vecteurs l'angle entre l'index et le majeur est plus petit que l'angle plat, et que l'angle entre le pouce figurant le troisième vecteur et le plan formé par les deux premiers vecteurs est à peu près faisable par une main, alors le repère est directoïde. Si l'angle entre le pouce figurant le troisième vecteur et le plan formé par les deux premiers vecteurs est en sens contraire, alors le repère est indirectoïde.

Une autre façon de voir les choses est la suivante, si on sait utiliser l'orientation de l'espace directe ou indirecte. Le plan $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ sépare deux régions de l'espace, et on pose que si le vecteur $\vec{k}$ est dans la région où l'on définit $\vec{i} \wedge \vec{j}$ d'orientation directe, alors $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ est d'orientation « directoïde ».

Si le vecteur $\vec{k}$ est dans la région où l'on définit $\vec{i} \wedge \vec{j}$ d'orientation indirecte, alors $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ est d'orientation « indirectoïde ».

Si le vecteur $\vec{k}$ est dans le plan $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ on ne définit pas d'orientation dans l'espace pour le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$. On peut par contre lui donner une orientation par le signe d'une mesure d'angle orienté dans le plan qu'il occupe.

L'orientation directe ou indirecte de $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ orthonormé est un cas particulier du repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ directoïde ou indirectoïde.

Si $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ est directoïde, ses permutations $(O ; \vec{j} ; \vec{k} ; \vec{i})$ et $(O ; \vec{k} ; \vec{i} ; \vec{j})$ le sont aussi (on les appelle circulaires) mais les permutations $(O ; \vec{i} ; \vec{k} ; \vec{j})$ $(O ; \vec{j} ; \vec{i} ; \vec{k})$ et $(O ; \vec{k} ; \vec{j} ; \vec{i})$ sont indirectoïdes. Ce sont cependant 6 définitions caractérisant une même distribution des vecteurs $\vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k}$ dans l'espace.

Si $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ est indirectoïde, ses permutations circulaires $(O ; \vec{j} ; \vec{k} ; \vec{i})$ et $(O ; \vec{k} ; \vec{i} ; \vec{j})$ le sont aussi mais $(O ; \vec{i} ; \vec{k} ; \vec{j})$ $(O ; \vec{j} ; \vec{i} ; \vec{k})$ et $(O ; \vec{k} ; \vec{j} ; \vec{i})$ sont directoïdes. Ce sont cependant 6 définitions caractérisant une même distribution des vecteurs $\vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k}$ dans l'espace.

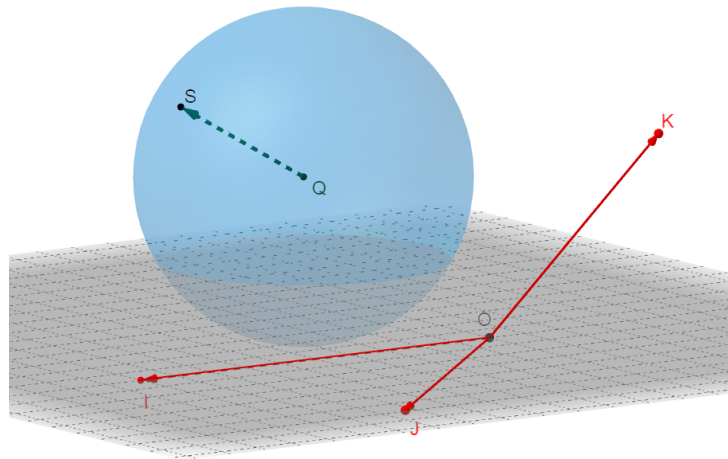
Les permutations sont un ordre de lecture des éléments d'un objet. Le produit vectoriel dépend de l'ordre de lecture : $\vec{i} \wedge \vec{j} = -(\vec{j} \wedge \vec{i})$.

ÉQUATIONS D'OBJETS ET APPARENCES

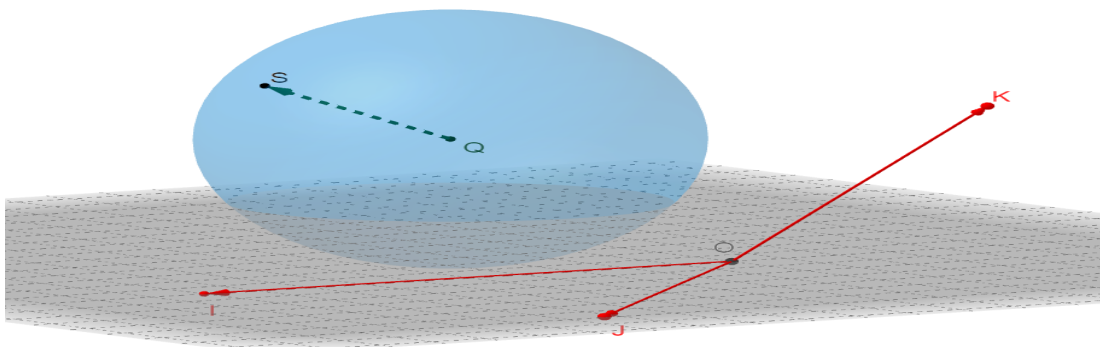
En posant $E \{S(x.\vec{i} ; y.\vec{j} ; z.\vec{k})\}$ un ensemble de points de $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ 3D et $Q(a.\vec{i} ; b.\vec{j} ; c.\vec{k})$ n'importe quel point fixe, en posant $\|\overrightarrow{QS}\|^2 = \lambda^2 = \text{constante}$ on a :

$$\lambda^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 + 2(x - a).(y - b).\cos(\vec{i}, \vec{j}) + 2.(z - c).(y - b).\cos(\vec{j}, \vec{k}) + 2.(z - c).(x - a).\cos(\vec{k}, \vec{i})$$

qui est l'équation décrivant la surface d'une sphère de centre Q et de rayon $\|\overrightarrow{QS}\| = |\lambda|$ dans le repère quelconque $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ 3D (quelconque selon les écartements angulaires des axes du repère, mais les vecteurs unitaires de ce repère sont tous de norme 1 et de longueurs apparentes identiques). Dans ce cas ce qui définit la sphère est l'ensemble des points à égale distance d'un centre. L'apparence sphérique est en géométrie euclidienne l'apparence des points à égale distance d'un centre.



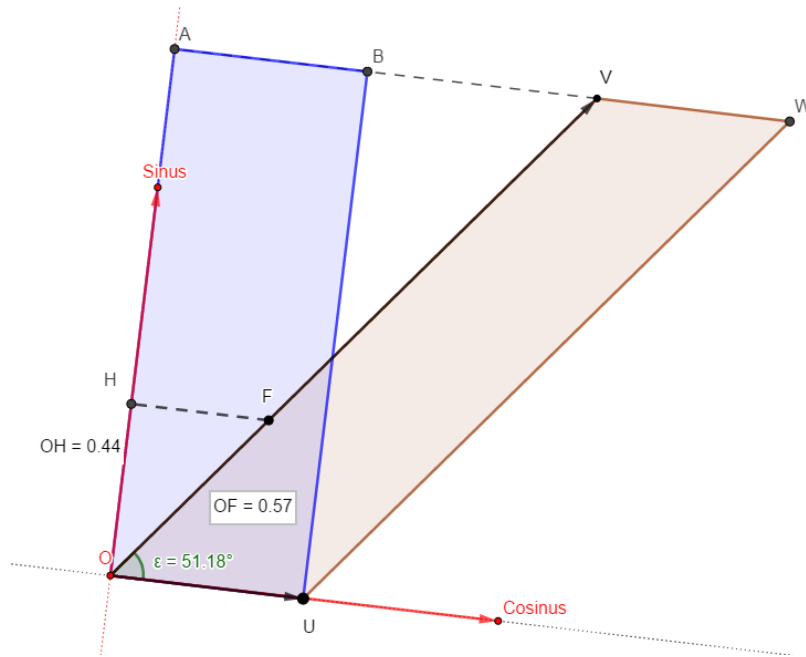
Si les vecteurs unitaires de $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ 3D sont tous de norme 1 mais de longueurs apparentes différentes, on ne peut pas donner une valeur à $\|\overrightarrow{QS}\| = \text{constante}$, car on ne sait pas en fonction de quelle mesure d'apparence on peut calculer ce rayon. On obtient une équation de sphère avec une apparence déformée. On ne peut pas faire de mesures de géométrie euclidienne dans un tel repère.



POURQUOI LE PRODUIT VECTORIEL EST-IL ORTHOGONAL ?

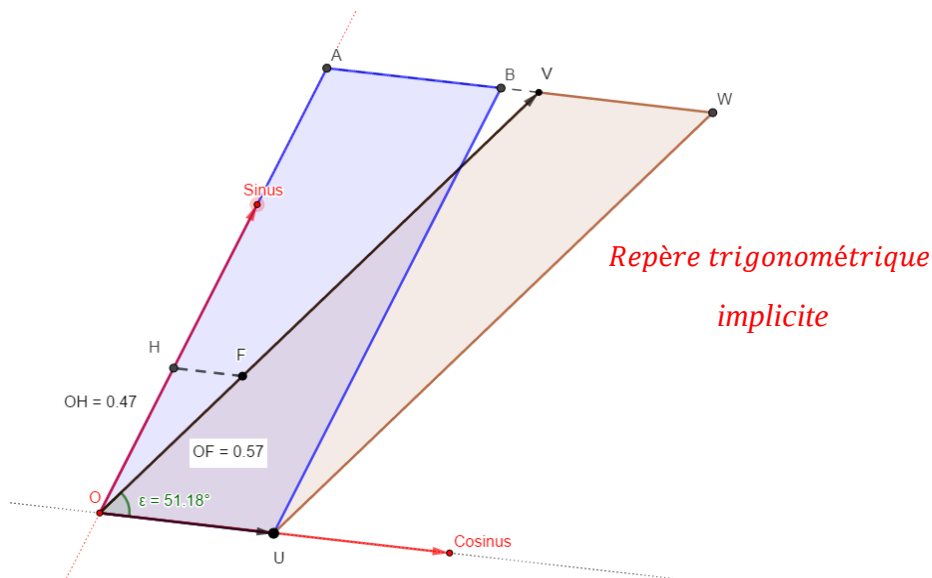
Note , ce 12/02/2022 : c'est un outil qui a été fait comme ça.

Pourquoi le produit vectoriel, qui diffère du produit scalaire par le sinus de l'angle en lieu et place du cosinus, est-il un vecteur et pas un nombre ? Pourquoi de plus un vecteur orthogonal au plan des deux vecteurs en produit ? Je pense qu'on s'est historiquement aperçu que les rapports de longueurs (à l'origine en valeurs absolues) OH/OF et OA/OV étaient les mêmes, et que par conséquent l'aire du rectangle OUBA était la même que celle du parallélogramme OUWV. Si l'aire OUBA peut facilement se voir comme le produit d'une surface carrée par un nombre non entier, et que l'aire OUWV peut se voir facilement comme une surface de parallélogramme, il a dû paraître remarquable aux premiers géomètres que l'aire OUWV soit elle aussi le produit d'une surface carrée par un nombre non entier, parce qu'elle ne ressemble ni au rectangle ni au carré.



On a ensuite introduit les nombres négatifs, les mesures algébriques, nommé un rapport OA/OV comme « sinus d'un angle » dans le repère orthonormé (qui me semble hérité de la mesure de surfaces en unités carrées), etc. de nos jours on formule $||\vec{u} \wedge \vec{v}|| = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$ l'aire géométrique en valeurs absolues d'unités carrées du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

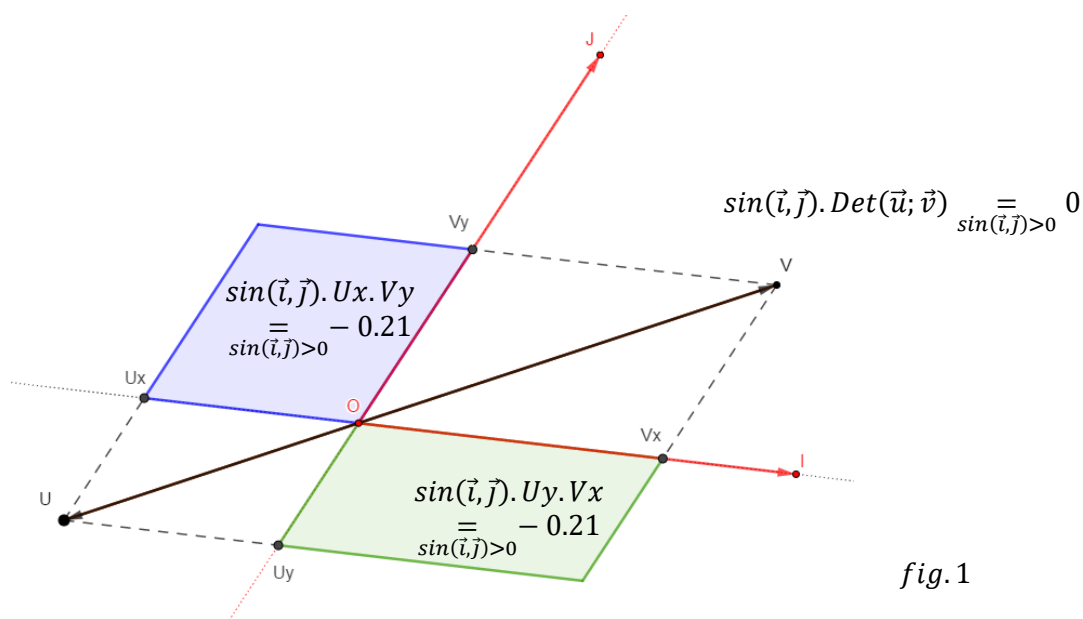
Si on mesure $\sin(\vec{u}, \vec{v})$ dans un repère du cercle trigonométrique non orthonormé, l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ aurait représenté un multiple d'unités de surfaces de parallélogramme :



d'unités non cubiques du parallélépipède construit sur les vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. La mesure CH serait définie comme une autre sorte de hauteur, qui serait penchée du point de vue classique. Si $\vec{u} \wedge \vec{v}$ n'était pas orthogonal au plan contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$, il ne serait pas non plus pratique, pour la même efficacité de mesure, de privilégier un angle autre que l'angle droit parmi tous ceux possibles. L'orthogonalité est une observation empirique immédiate. Le produit vectoriel est donc l'aboutissement d'un outil qui a été forgé initialement pour mesurer des surfaces, et qui permet indirectement de mesurer des volumes.

Étudier ensuite les propriétés analytiques du produit vectoriel dépend du respect de la définition géométrique du produit vectoriel, de façon à déployer un discours logique. Ce ne sont pas les propriétés des objets mathématiques qui fondent la science, c'est l'esprit qui les voit clairement et qui les énonce. On peut traduire cette vision intérieure comme le respect de la logique, sans en faire quelque chose de réducteur pour l'esprit. On peut le traduire comme un inconnu fondamental pour produire du manifesté intelligible, quand tous les mots de la logique peuvent être redéfinis. Quand les choix et les apparences coïncident, c'est toujours de façon simple pour l'esprit. Le brouillage du désaccord vient de la façon dont les choses sont présentées par le moyen du langage, qui suppose du mystère à ce qu'on ne comprend pas parce qu'on ne comprend pas les mots, alors que quand l'esprit comprend, il fait une expérience plus ou moins complète, mais observationnelle. Il juge. C'est du moins cette immédiateté que l'esprit s'applique à rechercher s'il poursuit son effort.

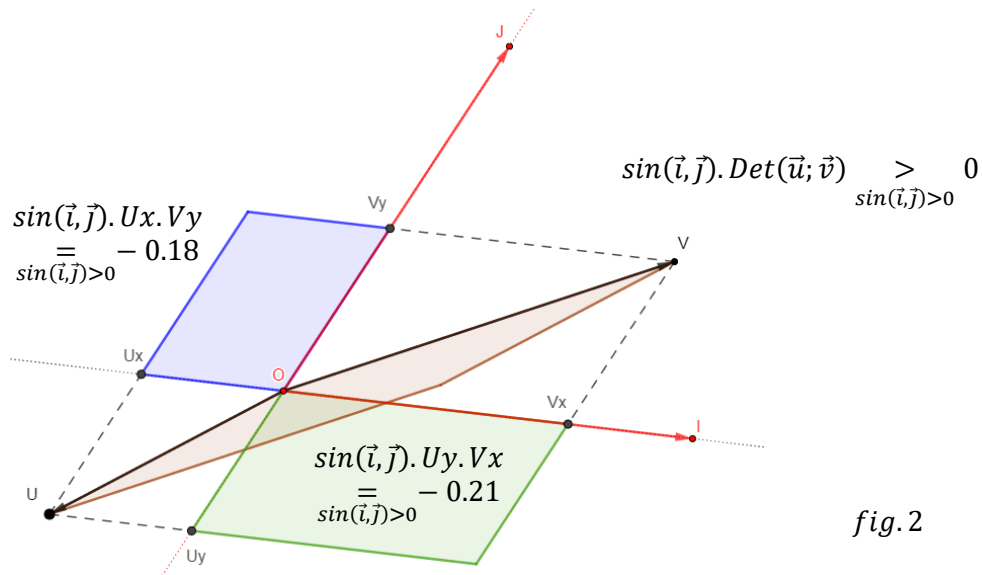
Par exemple, derrière l'apparente complexité de la formulation d'une aire par des coordonnées vectorielles, il y a toujours la géométrie et ses rapports de longueurs. Dans la figure 1 ci-dessous, les parallélogrammes bleu et vert ont la même surface. Dans la figure 2, la différence de leurs surfaces donne l'aire du parallélogramme marron :



$$\text{Det}(\vec{u}; \vec{v}) = Ux.Vy - Uy.Vx = 0$$

$$(\text{OUV})_{\text{orientée}} = \sin(i, j). \text{Det}(\vec{u}; \vec{v}) = 0$$

$$(\text{OUV})_{\text{géométrique}} = |\sin(i, j). \text{Det}(\vec{u}; \vec{v})| = ||\vec{u}||. ||\vec{v}||. |\sin(\vec{u}, \vec{v})| = 0$$



$$\text{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = (Ux \cdot Vy - Uy \cdot Vx) > 0$$

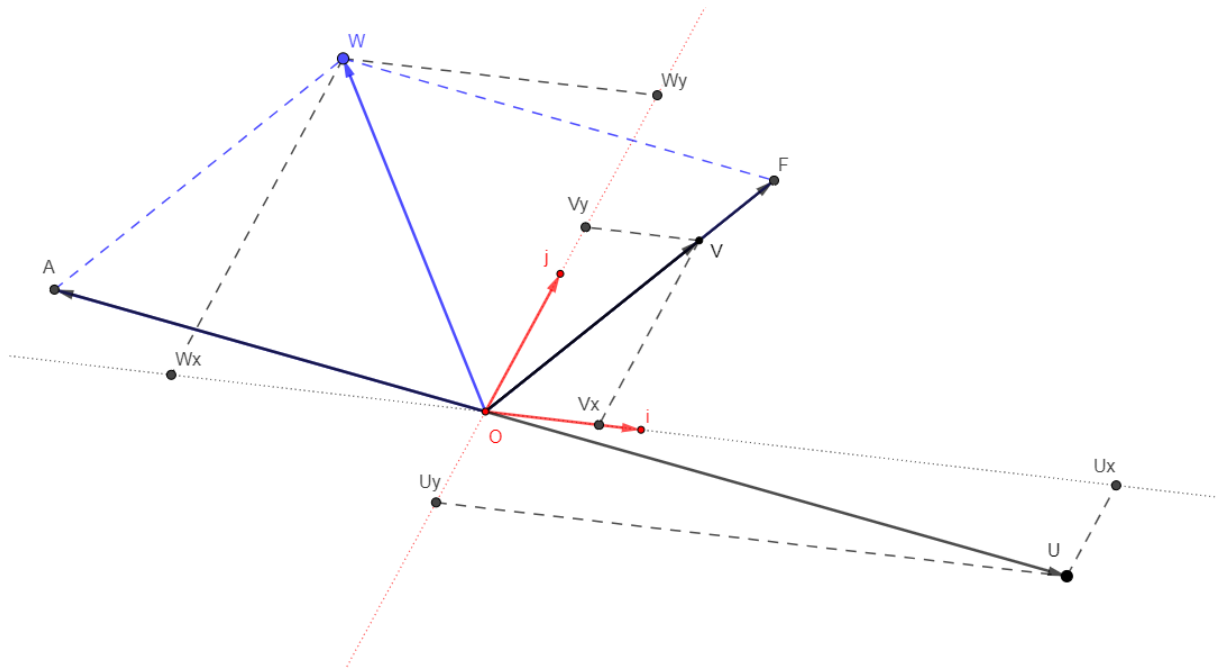
$$(\text{OUV})_{\text{orientée}} = \sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \text{Det}(\vec{u}; \vec{v})$$

$$(\text{OUV})_{\text{géométrique}} = |\sin(\vec{i}, \vec{j}) \cdot \text{Det}(\vec{u}; \vec{v})| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$$

Je conclurai sur un exemple qui me semble saisissant : la conservation du moment cinétique d'un système physique, en l'absence de force extérieure, ou sous l'action d'une force centrale, est une propriété fondamentale en physique. Son apparence, pour un corps rigide, est une rotation perpétuelle du système autour de son centre d'inertie, composée d'au plus trois rotations à vitesses angulaires constantes, autour d'axes différents.

Le moment cinétique est défini comme le produit d'un vecteur de position et d'un vecteur quantité de mouvement, c'est un produit vectoriel. Donc l'action relativement simple de mesurer des surfaces permet de découvrir des lois gouvernant des événements dans le monde réel. Le mouvement des planètes s'apparente ainsi à la conservation d'une surface, et de là à un ensemble infini de formes de mêmes surfaces, et de là à l'esprit qui effectue une tentative de vision.

L'ECRITURE COMPACTEE EN MATRICE



On a, indépendamment de tout repère, une loi de composition des vecteurs propre à l'espace euclidien dans lequel nous existons :

$$\vec{w} = \vec{OA} + \vec{OF}$$

Comme toute présentation symbolique, la compréhension n'est pas ce que l'écriture est, qui peut être plus ou moins judicieux, mais l'usage qu'on en fait. Par exemple, utiliser le symbole d'addition pour des vecteurs ne peut être compris et jugé qu'après avoir été utilisé.

Soit, avec deux nombres réels λ_u et λ_v , et l'introduction d'une loi de multiplication, on a une combinaison linéaire de n'importe quels vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ préexistant à $\vec{OA}$ et $\vec{OF}$ et définissant aussi le vecteur $\vec{w}$:

$$\vec{w} = \lambda_u \cdot \vec{u} + \lambda_v \cdot \vec{v}$$

En introduisant un repère quelconque $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ 2D, pas nécessairement orthonormé :

$$w_x \cdot \vec{i} + w_y \cdot \vec{j} = \lambda_u \cdot (u_x \cdot \vec{i} + u_y \cdot \vec{j}) + \lambda_v \cdot (v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j})$$

Soit :

$$w_x \cdot \vec{i} = \lambda_u \cdot u_x \cdot \vec{i} + \lambda_v \cdot v_x \cdot \vec{i}$$

$$w_y \cdot \vec{j} = \lambda_u \cdot u_y \cdot \vec{j} + \lambda_v \cdot v_y \cdot \vec{j}$$

Qui n'est autre que le système de deux équations à deux inconnues que l'on rencontre en algèbre, où λ_u et λ_v sont des inconnus, et les autres termes des nombres connus :

$$\begin{cases} w_x = \lambda_u \cdot u_x + \lambda_v \cdot v_x \\ w_y = \lambda_u \cdot u_y + \lambda_v \cdot v_y \end{cases} \quad (a)$$

On peut résoudre simplement un tel système, ou utiliser les techniques de calcul matriciel, qui sont pertinentes si le nombre d'équations et d'inconnus augmente.

Si on pose $\lambda_u = x$ et $\lambda_v = y$, dans un système du genre $\begin{cases} 6 = 4x + 2y \\ 4 = 5x - y \end{cases}$, dans ce cas λ_u et λ_v ne doivent pas être confondus avec des coordonnées de repère, comme on nomme parfois x et y . Ceci est un exemple de blocage de la compréhension occasionné par l'usage de mêmes symboles dans des contextes différents.

Pour comprendre une chose, il faut pouvoir la relier à une apparence. Même si cette apparence est enfouie à un niveau de compréhension non utilisé, elle doit avoir été vue, ou bien on doit désirer la voir, ou bien on n'en est pas conscient. Trop de savoir empêche la vision du savoir et aboutit à un enseignement sans âme. Celui qui ne comprend pas peut espérer mieux voir que celui qui répète des techniques, mais il souffre d'un manque de capacité à répéter. C'est, à mon avis, le contact avec les réalités du monde sensible qui fortifie l'esprit mathématique de celui qui se pose une infinité de question, et lui évite ainsi de se perdre dans son imagination puissante.

Pour comprendre et aimer les techniques abstraites de calcul matriciel, on ne peut pas se passer de se les illustrer simplement. La présentation sous forme de produit de matrices du système ci-dessus est :

$$\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_u \\ \lambda_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}$$

On peut les nommer :

$$A \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} \cdot B \begin{pmatrix} \lambda_u \\ \lambda_v \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}$$

Les opérations de multiplication et d'addition de valeurs sont la chose essentielle du calcul matriciel. Elles découlent de simples constatations géométriques.

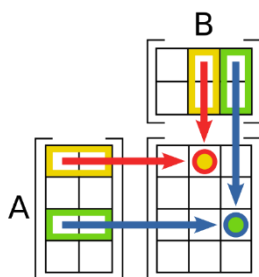
La multiplication de deux matrices n'est pas la même opération que la multiplication de deux nombres, ni que le produit scalaire de deux vecteurs. Dans la notation courante c'est un même symbole, celui du point, qui représente ces opérations différentes. Le lecteur est alors supposé savoir ce qu'il fait. Personnellement, j'utiliserai des symboles différents pour chacune de ces opérations :

$a \cdot b$ multiplication de nombres

$A \cdot B$ multiplication de matrice

$\vec{u} \otimes \vec{v}$ produit scalaire

Le produit de deux matrices est le réarrangement d'une présentation symbolique incluant des opérations de réelles additions et multiplications, pour produire un tableau de combinaisons linéaires (combinaison en ligne d'additions et de multiplications). On peut les disposer mentalement comme ceci pour les lire facilement :



$$A \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} \cdot B \begin{pmatrix} \lambda_u \\ \lambda_v \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \lambda_u \cdot u_x + \lambda_v \cdot v_x \\ \lambda_u \cdot u_y + \lambda_v \cdot v_y \end{pmatrix}$$

C'est un algorithme (suite finie et non ambiguë d'instructions et d'opérations permettant de résoudre une classe de problèmes)

La multiplication des matrices n'est pas commutative :

$$A(.+)B = B(.+)A$$

La multiplication des matrices est associative :

$$A(.+)B(.+)C = (A(.+)B)(.+)C = A(.+)(B(.+)C)$$

L'addition des matrices est associative et commutative :

$$A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C)$$

$$A + B = B + A$$

On peut multiplier l'ensemble d'une matrice par un scalaire λ (un nombre) tel que :

$$\lambda \cdot A \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \lambda \cdot u_x & \lambda \cdot v_x \\ \lambda \cdot u_y & \lambda \cdot v_y \end{pmatrix}$$

Dans son principe le plus général, le calcul matriciel transforme des nombres en autres nombre, et c'est au lecteur de savoir ce qu'il souhaite lire géométriquement ou arithmétiquement.

Exemple

$A'(-1; 2)$, $B'(3; 3)$, $C'(-5; -2)$ sont points symétriques autour de l'axe des ordonnées d'une série d'autres points $A(1; 2)$, $B(-3; 3)$, $C(5; -2)$, la matrice inverse un signe tout simplement :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (.+) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

L'opération qui a été faite est pour chaque point :

$$A'(-1; 2) = A'(-1 \cdot (1) + 0 \cdot (2) ; 0 \cdot (1) + 1 \cdot (2))$$

Ce calcul est aussi valable dans un repère quelconque. En utilisant une matrice quelconque, on transforme donc un point en un autre :

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} (.+) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Par contre, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice d'une rotation d'un angle de 90 degrés (sens anti-horaire) centrée à l'origine, d'un point A , qui donne les bonnes coordonnées de mais uniquement dans un repère orthonormé. Si on veut trouver les coordonnées dans un repère non orthonormé, dont les axes se croisent avec un angle θ , il faudra compléter l'opération par une matrice de changement de base (dite matrice de passage)

On le voit, si on pense en termes de vecteurs, $\overrightarrow{OA'}(1.\vec{i}; 6.\vec{j})$ est bien le vecteur issu de $\overrightarrow{OA}(1.\vec{i}; 2.\vec{j})$:

Par l'écriture de :

$$\begin{pmatrix} -3.\vec{i} & 2.\vec{j} \\ 4.\vec{i} & 1.\vec{j} \end{pmatrix} (.+) \begin{pmatrix} 1.\vec{i} \\ 2.\vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.\vec{i} \\ 6.\vec{j} \end{pmatrix}$$

On a :

$$(-3.\vec{i} \cdot (1.\vec{i}) + 2.\vec{j} \cdot (2.\vec{j}) ; 4.\vec{i} \cdot (1.\vec{i}) + 1.\vec{j} \cdot (2.\vec{j}))$$

Mais alors qu'est-ce que la multiplication d'un vecteur par lui-même et pourquoi créer ce problème ? pourquoi aller imaginer qu'on utiliserait un produit scalaire, qui ne fonctionnerait d'ailleurs pas dans un repère non orthonormé ? Ce genre d'appréciation, difficile à cerner par l'intelligence, est l'illustration par des mots du « faux problème ». Quelque chose comme « j'oublie ce que je sais pour une utilité plus faible ou égale ».

De même, par l'écriture de :

$$\begin{pmatrix} -3.\vec{i} & 2.\vec{i} \\ 4.\vec{j} & 1.\vec{j} \end{pmatrix} (.) + \begin{pmatrix} 1.\vec{i} \\ 2.\vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.\vec{i} \\ 6.\vec{j} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OA'}(-3.\vec{i} . (1.\vec{i}) + 2.\vec{i} . (2.\vec{j}) \ ; \ 4.\vec{j} . (1.\vec{i}) + 1.\vec{j} . (2.\vec{j}))$$

On a encore la multiplication d'un vecteur par lui-même et un autre et pourquoi créer ce problème ?

Donc ni, $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne peuvent être considérés comme des vecteurs et la seule écriture qui ne soulève pas de faux problèmes est donc :

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} (.) + \begin{pmatrix} 1.\vec{i} \\ 2.\vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.\vec{i} \\ 6.\vec{j} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OA'}(-3 . (1.\vec{i}) + 2 . (2.\vec{j}) \ ; \ 4 . (1.\vec{i}) + 1 . (2.\vec{j})) = \overrightarrow{OA'}(-3 . (1.\vec{i}) + 4 . (1.\vec{i}) \ ; \ 2 . (2.\vec{j}) + 1 . (2.\vec{j}))$$

Si on travaille sur des vecteurs et si on souhaite additionner des vecteurs entre eux tel que :

$$\vec{w} + \vec{u} + \vec{v} = (\vec{w} + \vec{u}) + \vec{v}$$

Qui correspond à l'arrangement de coordonnées :

$$w_x.\vec{i} + w_y.\vec{j} + u_x.\vec{i} + u_y.\vec{j} + v_x.\vec{i} + v_y.\vec{j} = (w_x + u_x).\vec{i} + (w_y + u_y).\vec{j} + v_x.\vec{i} + v_y.\vec{j}$$

On utilisera la présentation matricielle :

$$\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_x & 0 \\ w_y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x + w_x & v_x \\ u_y + w_y & v_y \end{pmatrix}$$

Il est alors important de compléter par des zéros, pour distinguer cette présentation d'un autre tableau de valeurs donné par $\vec{w} + \vec{u} + \vec{v} = \vec{w} + (\vec{u} + \vec{v})$:

$$\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & w_x \\ 0 & w_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_x & u_x + v_x \\ w_y & u_y + v_y \end{pmatrix}$$

On n'a pas alors ce problème de la multiplication d'un vecteur par lui-même et on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} u_x.\vec{i} & v_x.\vec{i} \\ u_y.\vec{j} & v_y.\vec{j} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & w_x.\vec{j} \\ 0 & w_y.\vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_x.\vec{i} & u_x.\vec{i} + v_x.\vec{i} \\ w_y.\vec{j} & u_y.\vec{j} + v_y.\vec{j} \end{pmatrix}$$

Mais quel intérêt d'utiliser des matrices pour illustrer la seule addition ? On court le risque, avec ce schéma en tête, de mal concevoir ensuite le produit des matrices.

Il arrive que le produit de deux matrices représente le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u} \boxtimes \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x & 0 \\ u_y & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = u_x . v_x + u_y . v_y$, mais uniquement dans un repère orthonormé, et c'est un cas particulier de l'usage qu'on peut faire du calcul matriciel.

Rapidement, les exercices sur les matrices amènent à concevoir une matrice inverse pour résoudre des systèmes de m équations à m inconnues

Exemple

$$w_x = \lambda_u \cdot u_x + \lambda_v \cdot v_x + \lambda_t \cdot t_x$$

$$w_y = \lambda_u \cdot u_y + \lambda_v \cdot v_y + \lambda_t \cdot t_y$$

$$w_z = \lambda_u \cdot u_z + \lambda_v \cdot v_z + \lambda_t \cdot t_z$$

$\lambda_u, \lambda_v, \lambda_t$ sont des inconnues et tous les autres symboles sont des nombres connus, nommés coefficients de la matrice. On a la présentation matricielle :

$$\begin{pmatrix} u_x & v_x & t_x \\ u_y & v_y & t_y \\ u_z & v_z & t_z \end{pmatrix} (.+) \begin{pmatrix} \lambda_u \\ \lambda_v \\ \lambda_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

En nommant les matrices :

$$A \begin{pmatrix} u_x & v_x & t_x \\ u_y & v_y & t_y \\ u_z & v_z & t_z \end{pmatrix} (.+) B \begin{pmatrix} \lambda_u \\ \lambda_v \\ \lambda_t \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

Il existe une matrice inverse notée A^{-1} , dont les valeurs s'obtiennent par combinaisons linéaires opérant sur la matrice identité, qui joue l'analogue du nombre 1, élément neutre en arithmétique. Il y a des techniques pour obtenir ces coefficients (résolution d'un système d'équation, pivot de Gauss). On ne détaillera pas ici ces méthodes. On a alors par identité

$$A^{-1}(.+) \left(A \begin{pmatrix} u_x & v_x & t_x \\ u_y & v_y & t_y \\ u_z & v_z & t_z \end{pmatrix} (.+) B \begin{pmatrix} \lambda_u \\ \lambda_v \\ \lambda_t \end{pmatrix} \right) = A^{-1}(.+) C \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

A^{-1} se factorise comme $a.(b.c) = a.b.c$:

$$A^{-1}(.+) A \begin{pmatrix} u_x & v_x & t_x \\ u_y & v_y & t_y \\ u_z & v_z & t_z \end{pmatrix} (.+) B \begin{pmatrix} \lambda_u \\ \lambda_v \\ \lambda_t \end{pmatrix} = A^{-1}(.+) C \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

Or $A^{-1}(.+) A \begin{pmatrix} u_x & v_x & t_x \\ u_y & v_y & t_y \\ u_z & v_z & t_z \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité, qui laisse inchangé B . On a donc :

$$B \begin{pmatrix} \lambda_u \\ \lambda_v \\ \lambda_t \end{pmatrix} = A^{-1}(.+) C \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

Qui permet de connaître les inconnus $\lambda_u, \lambda_v, \lambda_t$, en effectuant le produit matriciel de A^{-1} et C .

Si maintenant on cherche aussi la combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définissant un quatrième vecteur $\vec{m} = \mu_u \cdot \vec{u} + \mu_v \cdot \vec{v}$, on écrira :

$$\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} (.+) \begin{pmatrix} \lambda_u & \mu_u \\ \lambda_v & \mu_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_x & m_x \\ w_y & m_y \end{pmatrix}$$

Ce qui est une façon compacte et économique en symboles de présenter et réaliser les calculs d'un système de quatre équations à quatre inconnues $\lambda_1; \lambda_2; \mu_1; \mu_2$:

$$\begin{cases} w_x = \lambda_u \cdot u_x + \lambda_v \cdot v_x \\ w_y = \lambda_u \cdot u_y + \lambda_v \cdot v_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_x = \mu_u \cdot u_x + \mu_v \cdot v_x \\ m_y = \mu_u \cdot u_y + \mu_v \cdot v_y \end{cases}$$

Et ainsi de suite, on peut programmer de nombreuses tâches opératoires dans la mémoire d'un ordinateur.

L'efficacité de la notation sert, par exemple, dans les espaces vectoriels de dimensions quelconques, à présenter un nombre quelconque d'opérations à effectuer.

Dans ce cas l'écriture compacte doit être systématisée avec davantage de symboles que les lettres de l'alphabet pour mieux traduire l'infinité des combinaisons :

Ainsi, si A est une matrice de type n lignes et m colonnes (matrice n, m) et B est une matrice de type n' lignes et m' colonnes, on écrit le produit matriciel :

$$A_{nm} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} (.) B_{n'm'} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n'} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n'} \\ b_{31} & b_{32} & \dots & b_{3n'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pn'} \end{pmatrix} = C_{n''m''} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m''} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m''} \\ c_{31} & c_{32} & \dots & c_{3m''} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pm''} \end{pmatrix}$$

Avec $n'' = \min(n, n')$, $m'' = \min(m, m')$. C'est-à-dire que n'' est le plus petit nombre de lignes, m'' est le plus petit nombre de colonnes. En effet, si les matrices n'ont pas la même dimension, on a la liberté de rajouter des lignes ou des colonnes de zéros, les coefficients c_{ij} sont toujours donnés par l'algorithme :

$$\forall 1 \leq i \leq n, \forall 1 \leq j \leq m : c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} \cdot b_{kj} \Leftrightarrow c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{im} \cdot b_{mj}$$

CALCUL DU DETERMINANT $n \times n$

On écrit le déterminant de m vecteurs dans un espace de dimension n comme :

$$Det(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m) = Det\{v_{j|i}\}_{\substack{i=1 \text{ à } n \\ j=1 \text{ à } m}}^m = \begin{vmatrix} v_{1|1} & v_{2|1} & \dots & v_{m|1} \\ v_{1|2} & v_{2|2} & \dots & v_{m|2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{1|n} & v_{2|n} & \dots & v_{m|n} \end{vmatrix}$$

Le déterminant est un calcul qui s'effectue sur des matrices carrées de coordonnées. Les calculs effectués sur des matrices non carrées existent mais doivent être nommés autrement. Le déterminant renseigne notamment sur le fait que la famille de vecteurs est libre ou liée. Son développement linéaire met en évidence un certain nombre de propriétés. On le calcule par imbrications en supprimant certaines lignes ou colonnes de coordonnées dans les sous matrices, selon que les premières coordonnées mises en facteur se succèdent horizontalement ou verticalement, tel que :

Choix vertical :

$$\begin{vmatrix} v_{1|1} & v_{2|1} & \dots & v_{m|1} \\ v_{1|2} & v_{2|2} & \dots & v_{m|2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{1|n} & v_{2|n} & \dots & v_{m|n} \end{vmatrix} = v_{1|1} \cdot \begin{vmatrix} v_{2|2} & \dots & v_{m|2} \\ v_{2|3} & \dots & v_{m|3} \\ \dots & \dots & \dots \\ v_{2|n} & \dots & v_{m|n} \end{vmatrix} - v_{1|2} \cdot \begin{vmatrix} v_{2|1} & \dots & v_{m|1} \\ v_{2|3} & \dots & v_{m|3} \\ \dots & \dots & \dots \\ v_{2|n} & \dots & v_{m|n} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{c+l} \cdot v_{1|n} \cdot \begin{vmatrix} v_{2|1} & \dots & v_{m|1} \\ \dots & \dots & \dots \\ v_{2|n-1} & \dots & v_{m|n-1} \end{vmatrix}$$

On utilise le terme $(-1)^{c+l}$ pour donner le signe des coordonnées $v_{j|i}$ de tous les vecteurs, avec c pour le numéro de colonne lu de gauche à droite ou de droite à gauche, et l pour le numéro de ligne lu de haut en bas ou de bas en haut. Le résultat est indifférent puisque le déterminant est de forme carrée.

On calcule ensuite avec la même routine les sous-déterminants carrés :

$$\begin{vmatrix} v_{2|2} & \dots & v_{m|2} \\ \dots & \dots & \dots \\ v_{2|n} & \dots & v_{m|n} \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} v_{2|1} & \dots & v_{m|1} \\ \dots & \dots & \dots \\ v_{2|n} & \dots & v_{m|n} \end{vmatrix} ; \dots ; \begin{vmatrix} v_{2|1} & \dots & v_{m|1} \\ \dots & \dots & \dots \\ v_{2|n-1} & \dots & v_{m|n-1} \end{vmatrix}$$

Et ainsi de suite par imbrication jusqu'au développement complet. C'est une méthode assez lourde à calculer mais facile à modéliser, il en existe d'autres.

Pour $m > n$ les m vecteurs sont liés et $Det\{v_{j|i}\}_{m>n}^m = 0$. En effet, on ramène le déterminant à une forme carrée en rajoutant des dimensions d'espace, mais les coordonnées des vecteurs dans ces dimensions supplémentaires étant toutes nulles, le déterminant est nul :

$$Det\{v_{j|i}\}_{m>n} = \begin{vmatrix} v_{1|1} & v_{2|1} & \dots & v_{m|1} \\ v_{1|2} & v_{2|2} & \dots & v_{m|2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{1|n} & v_{2|n} & \dots & v_{m|n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Le déterminant a un sens pour $m = n$ (cas des matrices carrées) et pour $m > n$, qui renseigne sur le fait que les vecteurs sont liés.

Pour $m < n$ on enlève arbitrairement des coordonnées existantes, mais cela ne renseigne plus sur la réalité des vecteurs étudiés. C'est pourquoi le calcul du déterminant n'a plus de sens (raison épistémologique !).

On donne ci-dessous une routine mnémotechnique généralisable pour réaliser facilement l'imbrication dans l'exemple d'un déterminant 3x3, et on montre six façons de l'utiliser qui donnent toutes le même nombre, comme on le constaterait en refactorisant les termes :

1)

$$\begin{vmatrix} v_{1|1} & v_{2|1} & v_{3|1} \\ v_{1|2} & v_{2|2} & v_{3|2} \\ v_{1|3} & v_{2|3} & v_{3|3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v_{1|1} & v_{2|1} & v_{3|1} \\ v_{1|2} & v_{2|2} & v_{3|2} \\ v_{1|3} & v_{2|3} & v_{3|3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v_{1|1} & v_{2|1} & v_{3|1} \\ v_{1|2} & v_{2|2} & v_{3|2} \\ v_{1|3} & v_{2|3} & v_{3|3} \end{vmatrix} =$$

$$v_{1|1} \cdot \begin{vmatrix} v_{2|2} & v_{3|2} \\ v_{2|3} & v_{3|3} \end{vmatrix} - v_{1|2} \cdot \begin{vmatrix} v_{2|1} & v_{3|1} \\ v_{2|3} & v_{3|3} \end{vmatrix} + v_{1|3} \cdot \begin{vmatrix} v_{2|1} & v_{3|1} \\ v_{2|2} & v_{3|2} \end{vmatrix} =$$

$$v_{1|1} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{3|3} - v_{2|3} \cdot v_{3|2}) - v_{1|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{3|3} - v_{2|3} \cdot v_{3|1}) + v_{1|3} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{3|2} - v_{2|2} \cdot v_{3|1}) = Det(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)$$

2)

$$\begin{vmatrix} v_{1|1} & v_{2|1} & v_{3|1} \\ v_{1|2} & v_{2|2} & v_{3|2} \\ v_{1|3} & v_{2|3} & v_{3|3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v_{1|1} & v_{2|1} & v_{3|1} \\ v_{1|2} & v_{2|2} & v_{3|2} \\ v_{1|3} & v_{2|3} & v_{3|3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v_{1|1} & v_{2|1} & v_{3|1} \\ v_{1|2} & v_{2|2} & v_{3|2} \\ v_{1|3} & v_{2|3} & v_{3|3} \end{vmatrix} =$$

$$-v_{2|1} \cdot \begin{vmatrix} v_{1|2} & v_{3|2} \\ v_{1|3} & v_{3|3} \end{vmatrix} + v_{2|2} \cdot \begin{vmatrix} v_{1|1} & v_{3|1} \\ v_{1|3} & v_{3|3} \end{vmatrix} - v_{2|3} \cdot \begin{vmatrix} v_{1|1} & v_{3|1} \\ v_{1|2} & v_{3|2} \end{vmatrix} =$$

$$-v_{2|1} \cdot (v_{1|2} \cdot v_{3|3} - v_{1|3} \cdot v_{3|2}) + v_{2|2} \cdot (v_{1|1} \cdot v_{3|3} - v_{1|3} \cdot v_{3|1}) - v_{2|3} \cdot (v_{1|1} \cdot v_{3|2} - v_{1|2} \cdot v_{3|1}) = Det(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)$$

3)

$$\begin{vmatrix} v_{1|1} & v_{2|1} & v_{3|1} \\ v_{1|2} & v_{2|2} & v_{3|2} \\ v_{1|3} & v_{2|3} & v_{3|3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v_{1|1} & v_{2|1} & v_{3|1} \\ v_{1|2} & v_{2|2} & v_{3|2} \\ v_{1|3} & v_{2|3} & v_{3|3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v_{1|1} & v_{2|1} & v_{3|1} \\ v_{1|2} & v_{2|2} & v_{3|2} \\ v_{1|3} & v_{2|3} & v_{3|3} \end{vmatrix} =$$

$$v_{3|1} \cdot \begin{vmatrix} v_{1|2} & v_{2|2} \\ v_{1|3} & v_{2|3} \end{vmatrix} - v_{3|2} \cdot \begin{vmatrix} v_{1|1} & v_{2|1} \\ v_{1|3} & v_{2|3} \end{vmatrix} + v_{3|3} \cdot \begin{vmatrix} v_{1|1} & v_{2|1} \\ v_{1|2} & v_{2|2} \end{vmatrix} =$$

$$v_{3|1} \cdot (v_{1|2} \cdot v_{2|3} - v_{1|3} \cdot v_{2|2}) - v_{3|2} \cdot (v_{1|1} \cdot v_{2|3} - v_{1|3} \cdot v_{2|1}) + v_{3|3} \cdot (v_{1|1} \cdot v_{2|2} - v_{1|2} \cdot v_{2|1}) = Det(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3)$$

4)

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} \cancel{v_{1|1}} & \cancel{v_{2|1}} & \cancel{v_{3|1}} \\ v_{1|2} & v_{2|2} & v_{3|2} \\ v_{1|3} & v_{2|3} & v_{3|3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cancel{v_{1|1}} & \cancel{v_{2|1}} & \cancel{v_{3|1}} \\ v_{1|2} & \cancel{v_{2|2}} & \cancel{v_{3|2}} \\ v_{1|3} & \cancel{v_{2|3}} & \cancel{v_{3|3}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cancel{v_{1|1}} & \cancel{v_{2|1}} & \cancel{v_{3|1}} \\ v_{1|2} & \cancel{v_{2|2}} & \cancel{v_{3|2}} \\ v_{1|3} & \cancel{v_{2|3}} & \cancel{v_{3|3}} \end{vmatrix} = \\
& v_{1|1} \cdot \begin{vmatrix} v_{2|2} & v_{3|2} \\ v_{2|3} & v_{3|3} \end{vmatrix} - v_{2|1} \cdot \begin{vmatrix} v_{1|2} & v_{3|2} \\ v_{1|3} & v_{3|3} \end{vmatrix} + v_{3|1} \cdot \begin{vmatrix} v_{1|2} & v_{2|2} \\ v_{1|3} & v_{2|3} \end{vmatrix} = \\
& v_{1|1} \cdot (v_{2|2} \cdot v_{3|3} - v_{2|3} \cdot v_{3|2}) - v_{2|1} \cdot (v_{1|2} \cdot v_{3|3} - v_{1|3} \cdot v_{3|2}) + v_{3|1} \cdot (v_{1|2} \cdot v_{2|3} - v_{1|3} \cdot v_{2|2}) = \text{Det}(\vec{v_1}; \vec{v_2}; \vec{v_3})
\end{aligned}$$

5)

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} \cancel{v_{1|1}} & \cancel{v_{2|1}} & \cancel{v_{3|1}} \\ v_{1|2} & \cancel{v_{2|2}} & \cancel{v_{3|2}} \\ v_{1|3} & \cancel{v_{2|3}} & \cancel{v_{3|3}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cancel{v_{1|1}} & \cancel{v_{2|1}} & \cancel{v_{3|1}} \\ v_{1|2} & \cancel{v_{2|2}} & \cancel{v_{3|2}} \\ v_{1|3} & \cancel{v_{2|3}} & \cancel{v_{3|3}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cancel{v_{1|1}} & \cancel{v_{2|1}} & \cancel{v_{3|1}} \\ v_{1|2} & \cancel{v_{2|2}} & \cancel{v_{3|2}} \\ v_{1|3} & \cancel{v_{2|3}} & \cancel{v_{3|3}} \end{vmatrix} = \\
& -v_{1|2} \cdot \begin{vmatrix} v_{2|1} & v_{3|1} \\ v_{2|3} & v_{3|3} \end{vmatrix} + v_{2|2} \cdot \begin{vmatrix} v_{1|1} & v_{3|1} \\ v_{1|3} & v_{3|3} \end{vmatrix} - v_{3|2} \cdot \begin{vmatrix} v_{1|1} & v_{2|1} \\ v_{1|3} & v_{2|3} \end{vmatrix} = \\
& -v_{1|2} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{3|3} - v_{2|3} \cdot v_{3|1}) + v_{2|2} \cdot (v_{1|1} \cdot v_{3|3} - v_{1|3} \cdot v_{3|1}) - v_{3|2} \cdot (v_{1|1} \cdot v_{2|3} - v_{1|3} \cdot v_{2|1}) = \text{Det}(\vec{v_1}; \vec{v_2}; \vec{v_3})
\end{aligned}$$

6)

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} \cancel{v_{1|1}} & \cancel{v_{2|1}} & \cancel{v_{3|1}} \\ v_{1|2} & \cancel{v_{2|2}} & \cancel{v_{3|2}} \\ v_{1|3} & \cancel{v_{2|3}} & \cancel{v_{3|3}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cancel{v_{1|1}} & \cancel{v_{2|1}} & \cancel{v_{3|1}} \\ v_{1|2} & \cancel{v_{2|2}} & \cancel{v_{3|2}} \\ v_{1|3} & \cancel{v_{2|3}} & \cancel{v_{3|3}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cancel{v_{1|1}} & \cancel{v_{2|1}} & \cancel{v_{3|1}} \\ v_{1|2} & \cancel{v_{2|2}} & \cancel{v_{3|2}} \\ v_{1|3} & \cancel{v_{2|3}} & \cancel{v_{3|3}} \end{vmatrix} = \\
& v_{1|3} \cdot \begin{vmatrix} v_{2|1} & v_{3|1} \\ v_{2|2} & v_{3|2} \end{vmatrix} - v_{2|3} \cdot \begin{vmatrix} v_{1|1} & v_{3|1} \\ v_{1|2} & v_{3|2} \end{vmatrix} + v_{3|3} \cdot \begin{vmatrix} v_{1|1} & v_{2|1} \\ v_{1|2} & v_{2|2} \end{vmatrix} = \\
& v_{1|3} \cdot (v_{2|1} \cdot v_{3|2} - v_{2|2} \cdot v_{3|1}) - v_{2|3} \cdot (v_{1|1} \cdot v_{3|2} - v_{1|2} \cdot v_{3|1}) + v_{3|3} \cdot (v_{1|1} \cdot v_{2|2} - v_{1|2} \cdot v_{2|1}) = \text{Det}(\vec{v_1}; \vec{v_2}; \vec{v_3})
\end{aligned}$$

Le calcul du déterminant 3x3 est égal au calcul du produit mixte seulement si les coordonnées des vecteurs sont prises dans un repère orthonormé. Dans ce cas le calcul donne le volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs. Le calcul du déterminant n'est pas égal au calcul du produit mixte dans les dimensions autres que 3.

Le signe du déterminant change dans deux calculs dont l'énumération des vecteurs n'est pas une permutation circulaire, on le constate dans le développement linéaire :

$$\text{Det}(\vec{v_1}; \vec{v_2}; \vec{v_3}) = \text{Det}(\vec{v_2}; \vec{v_1}; \vec{v_3})$$

Le signe du déterminant ne change pas dans deux calculs dont l'énumération des vecteurs est une permutation circulaire, on le constate dans le développement linéaire :

$$\text{Det}(\vec{v_1}; \vec{v_2}; \vec{v_3}) = \text{Det}(\vec{v_3}; \vec{v_1}; \vec{v_2})$$

Ces deux dernières propriétés sont généralisables par récurrence aux déterminants $n \times n$. En effet, le déterminant $n \times n$ étant une combinaison linéaire de déterminants $(n-1) \times (n-1)$ toutes permutations des vecteurs du déterminant $n \times n$ se lit aussi dans tous les déterminants $(n-1) \times (n-1)$.

GENERALITES SUR LES ESPACES VECTORIELS

Note , ce 12/02/2022 : oh ! alors là tu t'es montré bon écolier, et tu as fait un gros effort pour comprendre ta leçon, et là encore tu ne t'es pas privé de faire une synthèse à ton goût. Mais je sais que tu ne voyais rien de bien lumineux et coloré avant que je ne t'aide à écrire ton polymixte envoûteur. Je veux dire : là, demain.

On peut étendre la notion d'espace vectoriel (mais peut-être cela devrait-il se nommer autrement, par exemple l'ensemble des lois à respecter étant alors identifié par un numéro de nomenclature) à tout ensemble d'objets très différents de ce qu'est un vecteur, qui historiquement représente la translation qui au point A associe le point B. Il est fondamental d'en prendre conscience, car dans la théorie des espaces dits « vectoriels » les objets sont constamment appelés « vecteurs », occasionnant possiblement une confusion avec ce qu'un élève apprend à l'école lorsqu'on lui montre un vecteur $\overrightarrow{AB}$. Ainsi les éléments d'un espace vectoriel peuvent être des points, des fonctions, des suites, des matrices, etc. Pourtant, ce sont des mesures empiriques de géométrie euclidienne sur les vecteurs traditionnels qui ont servi de point de départ à la théorie. Elle est donc elle aussi, comme tous les outils mathématiques, une construction historique qui aurait pu être différente. Toute théorie se présentant comme un système descriptif doit au final permettre d'aboutir à des mesures des objets réels, l'imagination fonctionnant alors sur la mesure, le penseur étant pris dans l'expérience de mesure. Les théories qui évacuent la preuve de vérité de la mesure n'ont pas de caractère scientifique, l'imagination fonctionnant alors sur l'imagination par le biais des mots qui se définissent par d'autres mots. Jusqu'à preuve du contraire, les objets mesurés ne peuvent pas se réduire à des constructions de l'esprit individuel car ils existent de façon complète en dehors de l'esprit individuel : avant et après les existences des penseurs individuels des théories de sciences.

Pour constituer un espace vectoriel que l'on notera E_{ev} , un ensemble d'objets non vide E (dans lequel on discrimine 3 objets tous différents ou en tout ou partie identiques) doit vérifier les 8 propriétés suivantes sur un corps de nombres noté K (pour les vecteurs traditionnels, $K=R$, ensemble des nombres réels) :

- (1) $u + v = v + u$ (pour tous $(u, v) \in E$)
- (2) $u + (v + w) = (u + v) + w$ (pour tous $(u, v, w) \in E$)
- (3) Il existe un élément neutre $0_E \in E$ tel que $u + 0_E = u$ (pour tout $u \in E$)
- (4) Tout $u \in E$ admet un symétrique u' tel que $u + u' = 0_E$.
- (5) $1 \cdot u = u$ (pour tout $u \in E$)
- (6) $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$ (pour tous $(\lambda, \mu) \in K, u \in E$)
- (7) $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$ (pour tous $\lambda \in K, u, v \in E$)
- (8) $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$ (pour tous $\lambda, \mu \in K, u \in E$)

Dans ce cas on écrira $E = E_{ev}$. Notons que l'élément neutre peut être le point de coordonnées (0 ;0) ou bien le vecteur nul qui est la translation nulle d'un point à un autre, selon les éléments qu'on met dans l'espace vectoriel

Il ne faut donc pas voir u, v, w comme des vecteurs traditionnels plus que des matrices ou autre chose. Peu importe ce qu'ils sont, du moment qu'ils interagissent entre eux selon ces 8 propriétés, qui sont une axiomatique établie historiquement sur des perceptions sensibles : on voit bien que ces lois sont initiées par l'écriture des mesures faites sur des droites orientées aléatoirement dans l'espace sensible ; elles ne sont pas déduites abstraitement d'une théorie complète traitant de toutes les dimensions des espaces, d'une sorte de vérité révélée, mais au contraire elles construisent une vérité relative. Il est important d'en prendre conscience pour démasquer la cause du blocage mental à l'usage des jeux mathématiques.

Il ne faut donc pas confondre, malgré la terminologie et le peu d'explications verbales, un $R^n = R \times R \times \dots \times R$ espace vectoriel (tous les points d'un espace repérés par un système de coordonnées, la croix « x » figurant une séparation des axes de coordonnées et non pas une multiplication) avec l'espace vectoriel d'un ensemble de vecteurs de l'espace, pour lequel on vérifierait les 8 propriétés en utilisant d'autres notions que celles des coordonnées, puisque les combinaisons linéaires des vecteurs traditionnels qui se translate parallèlement à eux-mêmes dans un espace n'ont pas besoin d'un point de réunion originel pour se représenter, ni de mesures autres que des multiples de leurs propres longueurs apparentes.

On note F_{sevE} l'ensemble F qui est un sous-espace vectoriel de l'ensemble E_{ev} . C'est la structure de notre esprit qui nous guide : parce qu'on situe des ensembles à l'intérieur d'autres ensembles, pour avoir quelque

chose à discriminer mentalement, quelque chose à voir par contraste. Ainsi des sous-ensembles sont ou ne sont pas des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel.

Un sous-espace vectoriel est lui-même un espace vectoriel : $F_{\text{sevE}} = F_{\text{ev}}$

Pour répondre à une question du type : « L'ensemble F est-il un espace vectoriel ? », une façon de procéder est de trouver un espace vectoriel E_{ev} qui contient en tout ou partie les objets de F , puis prouver que F vérifie trois propriétés au lieu de huit :

(1) On établit que $F \in E_{\text{ev}}$ (c'est une appréciation en réalité assez empirique ! elle est basée sur le ressemblance des objets)

(2) L'élément neutre $0_{E_{\text{ev}}}$ qui appartient à l'espace vectoriel E_{ev} doit appartenir aussi à l'ensemble F :
 $0_{E_{\text{ev}}} \in E_{\text{ev}} \Leftrightarrow 0_{E_{\text{ev}}} \in F$.

(3) La stabilité de F par addition. Tous les objets contenus dans F restent dans F par addition :
 Si $u \in F, v \in F$ alors $u+v \in F$

(4) La stabilité par multiplication avec un nombre appartenant à l'ensemble K (corps de nombres). Tous les objets contenus dans F restent dans F par multiplication :
 Si $u \in F, \lambda \in K$ alors $\lambda \cdot u \in F$.

Si ces conditions sont réunies, alors $F = F_{\text{sevE}} = F_{\text{ev}}$ (il y a un théorème qui énonce ce fait).

Note : Il n'est donc pas nécessaire de préciser en plus pour F_{sevE} que $u+v=v+u$ (commutativité) ni $u + (v + w) = (u + v) + w$ (associativité), puisque ce sont des propriétés de E_{ev} . On peut caractériser un sous-espace vectoriel par la notion de combinaison linéaire, à condition de poser implicitement que la dimension de F est plus petite que celle de E_{ev} : Soient E_{ev} un K -espace vectoriel et F une partie non vide de E_{ev} contenant au moins l'élément neutre. Alors F est un sous-espace vectoriel de E_{ev} si et seulement si $\lambda u + \mu v \in F$ pour tous $u, v \in F$ et tous $\lambda, \mu \in K$. Autrement dit si et seulement si toute combinaison linéaire de deux éléments de F appartient à F .

L'espace vectoriel historique des translations et son identification aux espaces d'autres objets

On considère une famille de m vecteurs quelconques, chaque vecteur étant la translation d'un point à un autre (approche historique). On numérote les vecteurs de cette famille par un indice $1 \leq i \leq m$, tel que :

$$\{\vec{e}_i\}_m = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_m\}$$

On peut écrire les vecteurs dans n'importe quel ordre, le choix d'une suite arithmétique des indices i croissante de raison 1 permet en outre de renseigner la totalité des m vecteurs.

Remarquons tous de suite que si $\{\vec{e}_i\}_m$ ne contient pas le vecteur nul : $\vec{0}$, alors $\{\vec{e}_i\}_m$ n'est pas un espace vectoriel. On ne distinguera pas dans ce qui suit un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel, du moment qu'ils contiennent des objets de mêmes natures.

$\{\vec{e}_i\}_m$ possédant ou non le vecteur nul engendre toujours au moins un espace vectoriel. Dans ce cas les éléments de $\{\vec{e}_i\}_m$ sont ipso facto les éléments de l'espace vectoriel.

$\{\vec{e}_i\}_m$ engendre des espaces vectoriels de différentes dimensions, qui correspondent à toutes les familles que l'on puisse former avec des parties des vecteurs de $\{\vec{e}_i\}_m$, chaque famille dans $\{\vec{e}_i\}_m$ étant alors qualifiée de « génératrice » de ces différents espaces vectoriels, qu'elles soient libres ou liées. Ci-dessous la

définition formelle d'une famille $\{\vec{e}_i\}_m$ qui génère un espace vectoriel, c'est-à-dire toutes les situations possibles d'un vecteur $\vec{v}$:

$$\forall \vec{v} \in E_{ev}, \exists (c_1; c_2; \dots; c_m) \in K, c_1 \cdot \vec{e}_1 + c_2 \cdot \vec{e}_2 + \dots + c_m \cdot \vec{e}_m = \vec{v}$$

Remarquons que si tous les vecteurs de $\{\vec{e}_i\}_m$ forment une famille libre, le vecteur nul appartenant à E_{ev} est obtenu par $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$. Si $\{\vec{e}_i\}_m$ est liée, on trouvera toujours un jeu de valeurs pour les c_i de façon à obtenir le vecteur nul.

On définit une famille libre dans $\{\vec{e}_i\}_m$ si chaque vecteur de la famille ne peut pas être combinaison linéaire de tous les autres vecteurs (lesquels sont différents de lui). On en a une représentation géométrique en visualisant un vecteur de $\{\vec{e}_i\}_m$ appartenant à une droite R^1 comme étant non nul, ou deux vecteurs de $\{\vec{e}_i\}_m$ non nuls appartenant à un plan R^2 comme étant non colinéaires, ou trois vecteurs de $\{\vec{e}_i\}_m$ non nuls appartenant à l'espace euclidien R^3 comme étant non coplanaires (non tous translatables dans un même plan). On en donne la représentation mathématique ci-dessous, qui résume une propriété commune aux représentations géométriques dont on vient de parler, et qui permet de poursuivre les représentations géométriques là où les mots se révèlent impuissants à imaginer les objets des dimensions supérieures (non sensibles) :

$$\forall (c_1; c_2; \dots; c_m) \in K, c_1 \cdot \vec{e}_1 + c_2 \cdot \vec{e}_2 + \dots + c_m \cdot \vec{e}_m = \vec{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$$

Note : c'est une implication, et non pas une équivalence, car on ne peut rien dire sur $\{\vec{e}_i\}_m$ à partir du fait que tous les c_i soient nuls.

Si cette propriété n'est pas vérifiée, $\{\vec{e}_i\}_m$ est une famille liée.

Si une famille de n vecteurs est libre dans $\{\vec{e}_i\}_m$, alors elle est génératrice de tous les espaces vectoriels de dimension p , $1 \leq p \leq n$. En particulier une telle famille libre de n vecteurs est dite alors être une base de l'espace vectoriel de dimension n , car une base définit un repère unique de coordonnées cartésiennes pour situer un vecteur dans un espace.

Si une famille de n vecteurs tous non nuls est liée dans $\{\vec{e}_i\}_m$, alors elle est génératrice de tous les espaces vectoriels de dimension p , $1 \leq p < n$. En particulier une telle famille liée de n vecteurs est dite alors ne pas être une base de l'espace vectoriel de dimension n car avec une famille liée on peut construire plusieurs repères de coordonnées cartésiennes pour situer un vecteur dans un espace.

Si une famille de n vecteurs est liée par le seul fait qu'elle contient le vecteur nul, elle est une base d'un espace vectoriel de dimension $n - 1$.

Dans une famille $\{\vec{e}_i\}_m$, tout vecteur écrit plus d'une fois fait que cette famille est liée. De même toute famille contenant le vecteur nul est liée. En particulier, un espace vectoriel est toujours une famille d'éléments liés, car il contient un élément neutre (ici le vecteur nul).

Exemple

$\{\vec{e}_i\}_m = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_m\}$ est une famille liée car $\vec{e}_2 = 1 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_1 + \dots + 0 \cdot \vec{e}_m$. De même une famille contenant le vecteur nul est toujours liée, car $\vec{0} = 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{e}_m$.

Si le vecteur nul est répété, elle est toujours liée car $\vec{0} = 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{0} + 0 \cdot \vec{e}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{e}_m$.

L'ensemble des combinaisons linéaires par addition et multiplication par des réels dans cette famille est noté $\text{vect}\{\vec{e}_i\}_m$ et engendre un espace vectoriel. Chaque scalaire c_i étant par commodité de présentation du même indice i que son vecteur $\vec{e}_i$ associé :

$$E_{\text{ev}} = \text{vect}\{\vec{e}_i\}_m = \{c_1 \cdot \vec{e}_1 + c_2 \cdot \vec{e}_2 + \dots + c_m \cdot \vec{e}_m\}$$

Les c_i peuvent prendre toutes les valeurs. $\text{vect}\{\vec{e}_i\}_m$ est une façon d'écrire la dimension d'un espace vectoriel. Si $\{\vec{e}_i\}_m$ est libre, alors $\text{vect}\{\vec{e}_i\}_m = R^m$. Si $\{\vec{e}_i\}_m$ est liée, et contient une sous-famille de n vecteurs libres entre eux, alors $\text{vect}\{\vec{e}_i\}_m = R^{n < m}$

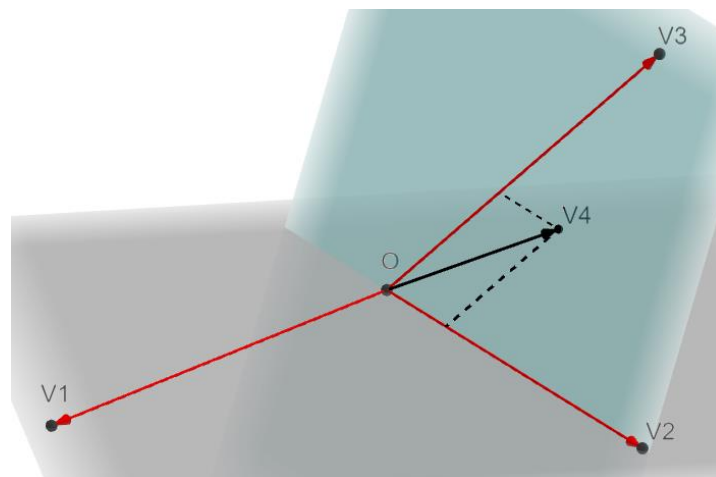
On peut voir E_{ev} comme une famille de points ou de vecteurs. La famille $\text{vect}\{\vec{e}_i\}_m$ est formée, en faisant varier tous les c_i , par tous les vecteurs ou points de l'espace géométrique de dimension n (noté R^n). En particulier chaque vecteur de $\text{vect}\{\vec{e}_i\}_m$ forme avec $\{\vec{e}_i\}_m$ une famille liée.

Note : R^n n'est pas une formule de calcul mais une notation qui peut désigner n vecteurs libres entre eux, chacun obtenu par combinaisons linéaires à partir des vecteurs d'une famille avec des nombres réels (d'où l'emploi de la lettre R). Plus généralement si on fait des combinaisons linéaires avec un ensemble de nombres plus grands que celui des nombres réels, on utilise par convention la notation K^n .

S'il existe dans $\{\vec{e}_i\}_m$ suffisamment de vecteurs pour former plusieurs sous-familles libres de différentes dimensions (qui définissent autant de sous-espaces vectoriels), alors $\{\vec{e}_i\}_m$ est une famille liée mais génératrice de ces différents sous-espaces dimensionnés. S'il n'en existe qu'une seule, alors $\{\vec{e}_i\}_m$ est une base de R^n et $m=n$.

Ici la notion de base sert de passerelle entre l'espace vectoriel des translations et celui des points ayant des coordonnées dans l'espace vectoriel d'un repère cartésien.

Exemple



Soit $\{\vec{v}_i\}_4 = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4\}$, une famille liée car on y trouve entre autres que $\vec{v}_4 = c_2 \cdot \vec{v}_2 + c_3 \cdot \vec{v}_3$.

Les bases de vecteurs $\{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3\}$, $\{\vec{v}_4; \vec{v}_1; \vec{v}_2\}$, $\{\vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{v}_1\}$ génèrent l'espace vectoriel contenant respectivement les éléments $\{\vec{0}; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3\}$, $\{\vec{0}; \vec{v}_4; \vec{v}_1; \vec{v}_2\}$, $\{\vec{0}; \vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{v}_1\}$, et il s'identifie à l'espace R^3 , dont les objets sont alors vus comme tous les points $M(x; y; z)$ repérés par exemple dans $\{\vec{0}; \vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3\}$ par $\overrightarrow{OM}(x \cdot \vec{v}_1; y \cdot \vec{v}_2; z \cdot \vec{v}_3)$.

La famille de vecteurs $\{\vec{v}_2; \vec{v}_4; \vec{v}_3\}$ est liée et n'est la base d'aucun espace mais elle génère R^2 .

Ci-dessous toutes les générations d'espace $E_{ev,p}$ de dimension $1 \leq p$ par $\{\vec{v}_l\}_4$ et ses sous-familles :

$$\{\vec{v}_l\}_4 = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4\}, \text{ liée génère } E_{ev,p}, 1 \leq p \leq R^3, (\{\vec{v}_l\}_4 \text{ est non base de } R^4, R^3, R^2, R^1)$$

$$\{\vec{v}_l\}_3 = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3\} \text{ libre génère } E_{ev,p}, 1 \leq p \leq R^3, (\{\vec{v}_l\}_3 \text{ est base de } R^3)$$

$$\{\vec{v}_l\}_3 = \{\vec{v}_4; \vec{v}_1; \vec{v}_2\} \text{ libre génère } E_{ev,p}, 1 \leq p \leq R^3, (\{\vec{v}_l\}_3 \text{ est base de } R^3)$$

$$\{\vec{v}_l\}_3 = \{\vec{v}_3; \vec{v}_4; \vec{v}_1\} \text{ libre génère } E_{ev,p}, 1 \leq p \leq R^3, (\{\vec{v}_l\}_3 \text{ est base de } R^3)$$

$$\{\vec{v}_l\}_3 = \{\vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4\} \text{ liée génère } E_{ev,p}, 1 \leq p \leq R^2, (\{\vec{v}_l\}_3 \text{ est non base de } R^3, R^2, R^1)$$

$$\{\vec{v}_l\}_2 = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2\} \text{ libre génère } E_{ev,p}, 1 \leq p \leq R^2, (\{\vec{v}_l\}_2 \text{ est base de } R^2)$$

$$\{\vec{v}_l\}_2 = \{\vec{v}_1; \vec{v}_3\} \text{ libre génère } E_{ev,p}, 1 \leq p \leq R^2, (\{\vec{v}_l\}_2 \text{ est base de } R^2)$$

$$\{\vec{v}_l\}_2 = \{\vec{v}_1; \vec{v}_4\} \text{ libre génère } E_{ev,p}, 1 \leq p \leq R^2, (\{\vec{v}_l\}_2 \text{ est base de } R^2)$$

$$\{\vec{v}_l\}_2 = \{\vec{v}_2; \vec{v}_3\} \text{ libre génère } E_{ev,p}, 1 \leq p \leq R^2, (\{\vec{v}_l\}_2 \text{ est base de } R^2)$$

$$\{\vec{v}_l\}_2 = \{\vec{v}_2; \vec{v}_4\} \text{ libre génère } E_{ev,p}, 1 \leq p \leq R^2, (\{\vec{v}_l\}_2 \text{ est base de } R^2)$$

$$\{\vec{v}_l\}_2 = \{\vec{v}_3; \vec{v}_4\} \text{ libre génère } E_{ev,p}, 1 \leq p \leq R^2, (\{\vec{v}_l\}_2 \text{ est base de } R^2)$$

$$\{\vec{v}_l\}_1 = \{\vec{v}_1\} \text{ libre génère } E_{ev,p}, p = R^1, (\{\vec{v}_l\}_1 \text{ est base de } R^1)$$

$$\{\vec{v}_l\}_1 = \{\vec{v}_2\} \text{ libre génère } E_{ev,p}, p = R^1, (\{\vec{v}_l\}_1 \text{ est base de } R^1)$$

$$\{\vec{v}_l\}_1 = \{\vec{v}_3\} \text{ libre génère } E_{ev,p}, p = R^1, (\{\vec{v}_l\}_1 \text{ est base de } R^1)$$

$$\{\vec{v}_l\}_1 = \{\vec{v}_4\} \text{ libre génère } E_{ev,p}, p = R^1, (\{\vec{v}_l\}_1 \text{ est base de } R^1)$$

$\{\vec{v}_l\}_4$ est donc génératrice de R^1, R^2, R^3 . Elle contient 13 bases d'espaces de différentes. $\{\vec{v}_l\}_4$ n'est pas génératrice de R^4 (et plus).

Note : l'espace des points R^3 s'identifie à un repère cartésien (dont la notion est historiquement antérieure à la théorie). La question de prouver si un espace de point est un espace vectoriel est un faux problème posé par une libre comparaison des sens des mots du langage. On admettra donc que R^3 est un espace vectoriel en voyant les points comme repérés par des vecteurs.

On cherche maintenant des espaces vectoriels dont les éléments sont des ensembles de points discriminés par des fonctions. En accord avec les lois de la théorie, une droite cartésienne qui ne passe pas par l'origine du repère de l'espace vectoriel dans lequel son équation cartésienne est formulée ne constitue pas un sous-espace vectoriel de ce dernier. Il en va de même de l'équation d'un plan qui ne contient pas l'origine de ce repère, et plus généralement des équations d'objets à n dimensions qui ne contiennent pas ce point origine. On conçoit alors que si on a plusieurs repères cartésiens qui ont des points origines différents dans un espace vectoriel, seuls ceux qui ont la même origine que celle de l'espace vectoriel sont des sous-espaces vectoriels.

Exemple

Soit F l'ensemble qui contient les objets décrits par l'équation $= ax + b$. F est ou n'est pas un espace vectoriel selon que les objets qui la constituent vérifient ces lois.

On décide que les objets de l'ensemble défini par cette équation cartésienne de droite affine sont des points contenus dans des droites, dont les coordonnées x, y sont prises dans R^2 qui est l'ensemble de tous les points d'un plan. On supposera que R^2 est un espace vectoriel parce que chaque vecteur du plan identifie un point du plan.

Note : On mesure ici le caractère arbitraire (sur lequel on doit raisonner avec justesse) de la théorie par cet acte de définition des objets. Néanmoins, j'ai la liberté de ces choix, et sans cette liberté l'objet d'étude serait trop vaste

pour mes capacités mentales de discrimination. Avec la liberté de choix intégrée à des lois je peux parvenir à une affirmation relativement vraie, qui emprunte au réel la vérité de justesse de la mesure (laquelle ne peut pas affirmer et nier la même vision, bien que possiblement pouvant affirmer une chose « ou » son contraire).

Autre façon de le dire en mettant en lumière le surgissement d'une saine erreur : l'esprit qui cherche la vérité la cherche de façon absolue qu'il le veuille ou non. Il ne peut que constituer en obstacle toute vision qui lui paraît incomplète. C'est l'erreur d'impuissance, celle qui survient quand on se trompe en cherchant à être honnête. Ce n'est pas se tromper totalement comme il arrive qu'on le fasse en cherchant à convaincre les autres de ce qu'on ne pense pas vraiment.

Il faut que l'esprit apprenne à reconnaître l'arbitraire malgré le non-dit, à supposer l'imperfection et le confus pour contourner l'obstacle qu'il se crée. Les lois sont arbitraires mais le jeu logique exige de les respecter ou de les redéfinir, et dans ce cas de préférence pour une utilité supérieure ou égale. Attention cependant à distinguer d'une part une prise de conscience des limites d'une vision, et d'autre part une négation parce qu'on ne peut ou ne veut pas comprendre. Malheureusement entre les deux il n'y a pas de frontière nette mais une zone de transition, où nous agissons quelque part entre un absolu de lumière et un absolu d'obscurité.

Selon les valeurs de a et b , on reconnaît que F est constitué de divers sous-ensembles :

$$F = \{F' ; F'' ; F''' ; F'''\}$$

L'ensemble F' tel que $(a \neq 0 ; b = 0) \Rightarrow y = ax$

La conservation d'un élément neutre :

L'élément neutre de R^2 est le vecteur nul $\vec{0}$ qui correspond au point de coordonnées $(0; 0)$ et ce point appartient bien au SEV défini par $y = ax$. D'autre part on a : $y + 0 = a(x + 0)$

La stabilité de $y = ax$ par addition :

Si $A(x_A; y_A) \in (y = ax)$, $B(x_B; y_B) \in (y = ax)$

On a :

$$y_A + y_B = a(x_A + x_B)$$

L'addition de deux points définis par des coordonnées reste sur la droite $y = ax$ en étant le point de coordonnées $((x_A + x_B) ; a(x_A + x_B))$

La stabilité par multiplication avec un nombre appartenant à l'ensemble des nombres réels R :

Si $A(x_A; y_A) \in (y = ax)$, $\lambda \in R$

On a :

$$\lambda y_A = \lambda a x_A = a(\lambda x_A)$$

La « multiplication d'un point » définis par des coordonnées reste sur la droite $y = ax$ en étant le point de coordonnées $(\lambda x_A ; a(\lambda x_A))$

F' est donc bien un SEV de R^2 : $F' = F'_{\text{sev } R^2}$

L'ensemble F'' tel que $(a \neq 0 ; b \neq 0) \Rightarrow y = ax + b$

Non-conservation d'un élément neutre :

L'élément neutre de R^2 est le vecteur nul $\vec{0}$ qui correspond au point de coordonnées $(0; 0)$ et ce point n'appartient pas au SEV défini par $y = ax + b$ car $0 \neq a \cdot 0 + b$

Non-stabilité de $y = ax$ par addition :

Si $A(x_A; y_A) \in (y = ax + b)$, $B(x_B; y_B) \in (y = ax + b)$

On a :

$$y_A + y_B = a(x_A + x_B) + 2b$$

L'addition de deux points définis par des coordonnées ne reste pas sur la droite $y = ax + b$ mais se situe sur une autre droite d'équation $y = ax + 2b$ en étant le point de coordonnées $((x_A + x_B) ; (a(x_A + x_B) + 2b))$

Non-stabilité par multiplication avec un nombre appartenant à l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$:

Si $A(x_A; y_A) \in (y = ax + b)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

On a :

$$\lambda y_A = \lambda(ax_A + b) = a(\lambda x_A) + \lambda \cdot b$$

La « multiplication d'un point » défini par des coordonnées ne reste pas sur la droite $y = ax + b$ mais se situe sur une autre droite d'équation $y = ax + \lambda \cdot b$ en étant le point de coordonnées $(\lambda x_A; (a(\lambda x_A) + \lambda \cdot b))$

F'' n'est donc pas un SEV de $\mathbb{R}^2$.

L'ensemble F''' tel que $(a = 0 ; b \neq 0) \Rightarrow y = b$

Non-conservation d'un élément neutre :

L'élément neutre de $\mathbb{R}^2$ est le vecteur nul $\vec{0}$ qui correspond au point de coordonnées $(0; 0)$ et ce point n'appartient pas au SEV défini par $y = b$ car $0 \neq b$

Non-stabilité de $y = b$ par addition :

Si $A(x_A; y_A) \in (y = b)$, $B(x_B; y_B) \in (y = b)$

On a :

$$y_A + y_B = 2b$$

L'addition de deux points définis par des coordonnées ne reste pas sur la droite $y = b$ mais se situe sur une autre droite d'équation $y = 2b$ en étant le point de coordonnées $((x_A + x_B) ; 2b)$

Non-stabilité par multiplication avec un nombre appartenant à l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$:

Si $A(x_A; y_A) \in (y = b)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

On a :

$$\lambda y_A = \lambda(b)$$

La « multiplication d'un point » défini par des coordonnées ne reste pas sur la droite $y = b$ mais se situe sur une autre droite d'équation $y = \lambda b$ en étant le point de coordonnées $(\lambda x_A; \lambda b)$

F''' n'est donc pas un SEV de $\mathbb{R}^2$ parce qu'il ne respecte pas au moins une des trois lois.

L'ensemble F'''' tel que $(a = 0 ; b = 0) \Rightarrow y = 0$

Conservation d'un élément neutre :

L'élément neutre de $\mathbb{R}^2$ est le vecteur nul $\vec{0}$ qui correspond au point de coordonnées $(0; 0)$ et ce point appartient à F'''' défini par $y = 0$ car $0 = 0$

Stabilité de $y = 0$ par addition :

Si $A(x_A; y_A) \in (y = 0)$, $B(x_B; y_B) \in (y = 0)$

On a :

$$y_A + y_B = 0$$

L'addition de deux points définis par des coordonnées reste sur la droite $y = 0$ en étant le point de coordonnées $((x_A + x_B); 0)$

Stabilité par multiplication avec un nombre appartenant à l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$

Si $A(x_A; y_A) \in (y = 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

On a :

$$\lambda y_A = 0$$

La « multiplication d'un point » défini par des coordonnées reste sur la droite $y = 0$ en étant le point de coordonnées $(\lambda x_A; 0)$

F'''' est donc un SEV de $\mathbb{R}^2$ parce qu'il respecte ces trois lois : : $F'''' = F'_{\text{sev } \mathbb{R}^2}$

Conclusion générale :

On ne peut pas préciser si $F = \{F'; F''; F'''; F''''\}$ est un sous-espace vectoriel ou non (donc aussi un espace vectoriel ou non) si on ne précise pas les valeurs de a et b.

Appartenance et inclusion

L'inclusion, notée $\subset$, distingue le cas où tous les éléments d'un ensemble font partie d'un ensemble.

L'appartenance, notée $\in$, distingue le cas où une partie de tous les éléments d'un ensemble fait partie d'un ensemble.

Cependant la différence entre inclusion et appartenance est assez artificielle et n'enlève ni n'apporte rien à la compréhension de ce qui est correctement vu et écrit, puisque l'inclusion se définit en terme d'appartenance et l'appartenance en terme d'inclusion. Soit, pour un ensemble A contenant uniquement des éléments notés x , et un ensemble B. Alors si A est inclus dans B, on pose que tous les éléments x qui appartiennent à A appartiennent aussi à B. Et réciproquement, si tous les éléments x qui appartiennent à A appartiennent aussi à B alors A est inclus dans B. On l'écrit synthétiquement :

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Le symbole $\forall$ signifie « pour tout » ou « tout » ou encore « quel que soit », qu'on doit comprendre ici comme tout élément appartenant à A implique que cet élément appartient aussi à B. On remarque que le symbole de l'inclusion permet de simplifier la notation de ce qu'on pense. De même on a :

$$(A \not\subset B) \Leftrightarrow (\exists x \in A \Rightarrow x \notin B)$$

Le symbole $\exists$ signifie « il existe au moins » qu'on doit comprendre ici comme il existe au moins un élément appartenant à A qui implique que cet élément n'appartient pas à B.

On liste un ensemble $\{\vec{v}_j\}_m = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m\}$ qui est une famille de m vecteurs quelconques, un vecteur $\vec{v}$ est dit appartenir à l'espace de cette famille de vecteur si il est combinaison linéaire de tout ou partie des vecteurs de $\{\vec{v}_j\}_m$. Ses coordonnées sont portées par des ensembles de vecteurs libres entre eux pris dans $\{\vec{v}_j\}_m$.

Si un vecteur $\vec{v}$ appartient à un sous-espace vectoriel $Vect\{\vec{v}_j\}_p$ de dimension p , il appartient ou n'appartient pas à tous les espaces vectoriels $Vect\{\vec{w}_j\}_{(p+k)}$, selon que toutes les dimensions qui le définissent et qui sont matérialisées par un jeu de vecteurs libres entre eux dans $\{\vec{v}_j\}_p$ sont conservées ou non dans $Vect\{\vec{w}_j\}_{(p+k)}$.

$\{\vec{e}_i\}_n = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_n\}$ est une base de l'espace vectoriel formé de n vecteurs libres entre eux. Son espace vectoriel est $vect\{\vec{e}_i\}_n = \mathbb{R}^n$ (on voit qu'on note ici sa dimension avec la même notation que pour les sous-espaces vectoriels).

$\{\vec{v}_j\}_m = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m\}$ est une famille de m vecteurs quelconques de $\mathbb{R}^n$. Chacun de ses sous-espaces vectoriels est de la dimension des $m' \leq n$ vecteurs libres entre eux dans cette famille de m vecteurs quelconques :

$$vect\{\vec{v}_j\}_m = \mathbb{R}^{m' \leq n}$$

On en donne la démonstration ci-dessous. Tout d'abord, donnons une notation synthétique pour écrire ce que l'on pense :

Chaque vecteur $\vec{v}_j$ est combinaison linéaire des vecteurs de $\{\vec{e}_i\}_n$. L'ensemble des coordonnées de m vecteurs dans l'espace de dimension n est noté $\{\vec{v}_{j|i}\}_m|n$:

$$\{\vec{v}_{j|i}\}_m|n = \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_m(v_{m|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{m|2} \cdot \vec{e}_2 + v_{m|3} \cdot \vec{e}_3 + \dots + v_{m|n} \cdot \vec{e}_n); \\ \dots \dots \dots \dots; \\ \vec{v}_3(v_{3|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{3|2} \cdot \vec{e}_2 + v_{3|3} \cdot \vec{e}_3 + \dots + v_{3|n} \cdot \vec{e}_n); \\ \vec{v}_2(v_{2|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{2|2} \cdot \vec{e}_2 + v_{2|3} \cdot \vec{e}_3 + \dots + v_{2|n} \cdot \vec{e}_n); \\ \vec{v}_1(v_{1|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{1|2} \cdot \vec{e}_2 + v_{1|3} \cdot \vec{e}_3 + \dots + v_{1|n} \cdot \vec{e}_n); \end{array} \right\} = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_m\} \text{ dans } \mathbb{R}^n$$

Avec

$$1 \leq j \leq m; 1 \leq i \leq n$$

Ainsi on peut écrire un vecteur $\vec{v}$ combinaison linéaire des $\vec{v}_j \in Vect\{\vec{v}_j\}_m$ avec un ensemble de m nombres réels quelconques $\{c_j\}_m = \{c_1; c_2; \dots; c_m\}$ en faisant apparaître les vecteurs de base :

$$\vec{v} = c_1 \cdot (v_{1|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{1|2} \cdot \vec{e}_2 + v_{1|3} \cdot \vec{e}_3 + \dots + v_{1|n} \cdot \vec{e}_n) + c_2 \cdot (v_{2|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{2|2} \cdot \vec{e}_2 + v_{2|3} \cdot \vec{e}_3 + \dots + v_{2|n} \cdot \vec{e}_n) + \dots + c_m \cdot (v_{m|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{m|2} \cdot \vec{e}_2 + v_{m|3} \cdot \vec{e}_3 + \dots + v_{m|n} \cdot \vec{e}_n)$$

$$\vec{v} = (c_1 \cdot v_{1|1} + c_2 \cdot v_{2|1} + \dots + c_m \cdot v_{m|1}) \cdot \vec{e}_1 + (c_1 \cdot v_{1|2} + c_2 \cdot v_{2|2} + \dots + c_m \cdot v_{m|2}) \cdot \vec{e}_2 + \dots + (c_1 \cdot v_{1|n} + c_2 \cdot v_{2|n} + \dots + c_m \cdot v_{m|n}) \cdot \vec{e}_n$$

Ce qui revient à écrire avec un ensemble de n nombres réels quelconques $\{d_j\}_n = \{d_1; d_2; \dots; d_n\}$:

$$\vec{v} = d_1 \cdot \vec{e}_1 + d_2 \cdot \vec{e}_2 + \dots + d_n \cdot \vec{e}_n$$

L'ensemble de tous les vecteurs $\vec{v}$ contenus dans $Vect\{\vec{v}_j\}_m$ ne peut donc pas contenir un vecteur sortant de l'espace vectoriel de dimension n . $Vect\{\vec{v}_j\}_m$ est donc inclus dans $\{\vec{e}_i\}_n$, ce qui s'écrit (avec le symbole de l'inclusion comprenant le cas d'égalité) :

$$vect\{\vec{v}_j\}_m \subset vect\{\vec{e}_i\}_n$$

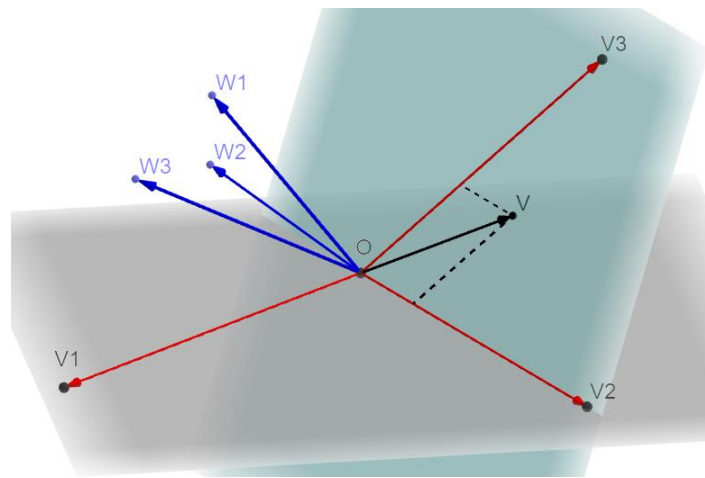
$$R^{m' \leq n} \subset R^n$$

Selon les valeurs des d_j , $\vec{v}$ peut se situer dans n'importe quelle position dans R^n :

$$\vec{v}_j \in \text{vect}\{\vec{v}_j\}_{j=1}^m = R^{m'} \Rightarrow \vec{v}_j \in \text{vect}\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n = R^n$$

La réciproque n'est pas toujours vraie. On a simplement dit que si un vecteur appartient à un sous-espace vectoriel, il appartient aussi à tous les espaces de dimensions supérieures ou égales, car ses coordonnées dans les dimensions supérieures sont nulles. On ne peut préciser $\vec{v}_j$ dans un lieu géométrique de R^n qu'en posant des contraintes numériques sur les $\vec{v}_j$ (par des coordonnées) et/ou sur les valeurs des c_j .

Exemple



$\vec{v} \in \text{vect}\{\vec{v}_2; \vec{v}_3\} = R^2 \subset R^3$; donc $\vec{v} \in R^3$, l'espace R^3 étant matérialisé par 3 vecteurs libres entre eux dans la figure ci-dessus.

Note : $\vec{w}_2 \in \text{vect}\{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3\} = R^3 \not\subset R^2$; donc $\vec{w}_2 \in R^2$ ou $\vec{w}_2 \notin R^2$, l'espace R^2 étant matérialisé par 2 vecteurs libres entre eux dans la figure ci-dessus.

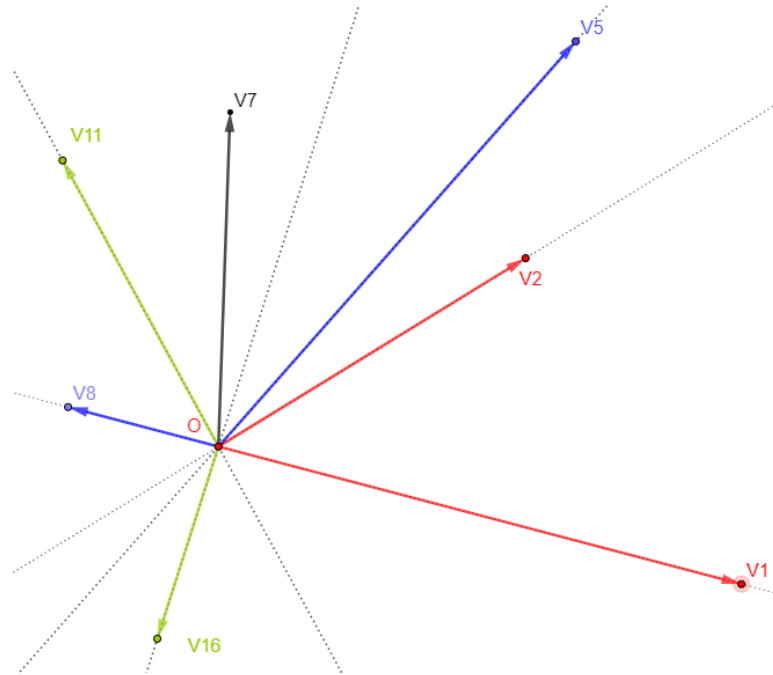
Selon un choix de coordonnées on peut avoir $\vec{w}_2 \in \text{vect}\{\vec{w}_2; \vec{w}_3\} = R^2$ mais $\vec{w}_2 \notin \text{vect}\{\vec{v}_2; \vec{v}_3\} = R^2$. Ceci parce que $\text{vect}\{\vec{w}_2; \vec{w}_3\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\text{vect}\{\vec{v}_2; \vec{v}_3\}$, et inversement $\text{vect}\{\vec{v}_2; \vec{v}_3\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\text{vect}\{\vec{w}_2; \vec{w}_3\}$ (géométriquement, ce sont des plans sécants dans R^3 . La résolution du paradoxe consiste à remarquer qu'on a eu tort de nommer « l'espace R^2 », car il peut y en avoir plusieurs. Si un espace vectoriel n'est pas le sous-espace d'un autre ensemble de vecteurs, ils forment deux espaces distincts, éventuellement de même dimension.

On peut donner des formules de changement de base pour tout vecteur d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel représenté par un repère cartésien.

Exemple

Soit le sous-espace vectoriel de R^{505} constitué de $\text{vect}\{\vec{v}_j\}_6 = \text{vect}\{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_5; \vec{v}_{11}; \vec{v}_8; \vec{v}_{16}\}$. Tel que $\text{vect}\{\vec{v}_j\}_6 = R^2$. Ces vecteurs sont donc tous dans un plan.

Notons $\overrightarrow{v_7}$ un vecteur qui est combinaison linéaire des vecteurs de $\{\overrightarrow{v_j}\}_6$, donc $\overrightarrow{v_7} \in \mathbb{R}^2$ est lui aussi dans le même plan, et il est identifié par exactement 2 coordonnées cartésiennes dans un repère cartésien construit sur chaque famille libre de dimension 2 dans $\text{vect}\{\overrightarrow{v_j}\}_6$.



On voit sur la figure ci-dessus que $\overrightarrow{v_8}$ et $\overrightarrow{v_1}$ sont liés. Il y a donc $4+3+3+2+1=13$ bases de $\mathbb{R}^2$ pour donner des coordonnées à $\overrightarrow{v_7}$ quand celui occupe n'importe quelle position dans le repère du plan. De même il y a 6 bases de $\mathbb{R}^1$ dans des sous-espaces vectoriel de $\{\overrightarrow{v_j}\}_6$ pour donner des coordonnées à $\overrightarrow{v_7}$ quand celui occupe n'importe quelle position dans les repères des droites portées par $\overrightarrow{v_1}$; $\overrightarrow{v_2}$; $\overrightarrow{v_5}$; $\overrightarrow{v_{11}}$; $\overrightarrow{v_8}$; $\overrightarrow{v_{16}}$, mais ces bases ne sont pas intéressantes car elles ne permettent pas d'identifier $\overrightarrow{v_7}$ dans tout l'espace du plan.

On peut en projetant par la méthode des projections de droites parallèles donner des coordonnées à $\overrightarrow{v_7}$ dans les 13 bases de $\mathbb{R}^2$, mais on peut aussi déduire ses coordonnées dans une base à partir de ses coordonnées dans une ou plusieurs autres bases. On utilise alors une composition des écritures :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{v_7}_{\{\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}\}} &= v_{7|1} \cdot \overrightarrow{v_1} + v_{7|2} \cdot \overrightarrow{v_2} \\
 &= v_{7|1} \cdot (v_{1|8} \cdot \overrightarrow{v_8} + v_{1|5} \cdot \overrightarrow{v_5}) + v_{7|2} \cdot (v_{2|8} \cdot \overrightarrow{v_8} + v_{2|5} \cdot \overrightarrow{v_5}) \\
 &= (v_{7|2} \cdot v_{2|5} + v_{7|1} \cdot v_{1|5}) \cdot \overrightarrow{v_5} + (v_{7|2} \cdot v_{2|8} + v_{7|1} \cdot v_{1|8}) \cdot \overrightarrow{v_8} \\
 &= \overrightarrow{v_7}_{\{\overrightarrow{v_5}; \overrightarrow{v_8}\}}
 \end{aligned}$$

Produit vectoriel dans $\mathbb{R}^n$ et ses confinements dans les sous-espaces vectoriels

Le produit vectoriel n'est pas construit par une combinaison linéaire de vecteurs. Il est défini de manière Ad-hoc comme un vecteur $\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}$ orthogonal à tous les plans dans lesquels peuvent se translater les vecteurs en produits $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$. Il appartient donc à un espace vectoriel engendré par un vecteur $\vec{p}$ tel que $\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} = c \cdot \vec{p}$:

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \in \text{vect}\{\vec{p}\} = \{c \cdot \vec{p}\} = \mathbb{R}^1$$

Mais aussi, si on décompose $\vec{p}$ dans $\mathbb{R}^n$ et si $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$:

$$\vec{p} = d_1 \cdot \vec{e}_1 + d_2 \cdot \vec{e}_2 + \dots + d_n \cdot \vec{e}_n$$

Alors :

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \in \text{vect}\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_n\} = \{cd_1 \cdot \vec{e}_1 + cd_2 \cdot \vec{e}_2 + \dots + cd_n \cdot \vec{e}_n\} = \mathbb{R}^n$$

Cette double appartenance n'est pas contradictoire, elle signifie la possibilité de localiser le produit vectoriel dans des familles de vecteurs différentes.

$\vec{p}$ représente un confinement du produit vectoriel à une sous-famille de la famille libre engendrant $\mathbb{R}^n$.

Il n'est donc pas utile d'utiliser le fait que $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^1$ si $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ appartiennent chacun à $\text{vect}\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_n\} = \mathbb{R}^n$.

De manière générale, on considère que si $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ peut occuper toutes les situations spatiales dans un espace de dimension n , alors les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ appartiennent chacun à $\text{vect}\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_n\} = \mathbb{R}^n$ et réciproquement :

$$\{\vec{v}_1; \vec{v}_2\} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^n$$

Mais si $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont eux-mêmes confinés dans des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, et selon la configuration spatiale de $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_n\}$ définie comme base de $\mathbb{R}^n$, on peut alors observer que le produit vectoriel peut être confiné à une sous-famille de $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_n\}$ (qui est nécessairement elle aussi une base).

Pour préciser son confinement, on cherche quelles sont ses coordonnées qui sont toujours nulles dans un repère de $\mathbb{R}^n$. Avec $\{\vec{e}_i\}_{n'}$ une sous-famille de $\{\vec{e}_i\}_n$:

$$(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) \text{ conf}\{\vec{e}_i\}_{n'} \Leftrightarrow (v_1 v_2)_{|i \notin \{\vec{e}_i\}_{n'}} = 0$$

On se place alors *ipso facto* dans un repère cartésien puisque l'on utilise des coordonnées.

Note : utiliser la notation $(v_1 v_2)_{|i \notin \{\vec{e}_i\}_{n'}} = 0$ est une façon intelligente de ne pas nommer les vecteurs $\{\vec{e}_i\}_{n'}$ qui sont impossible à discriminer dans le cas général dans $\{\vec{e}_i\}_n$.

Par exemple :

$$(i \notin \{\vec{e}_i\}_{n'} = \{\vec{e}_{10}; \vec{e}_7; \vec{e}_{37}\}) \text{ et } ((\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) \text{ conf}\{\vec{e}_i\}_{n'}) \Leftrightarrow (v_1 v_2)_{|i \neq \{10; 7; 37\}} = 0$$

Exemple

On donne ci-dessous le développement générique de $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ dans $n = 3$:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 &= \sum_{\substack{\vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0} \\ (\vec{v}_1; \vec{v}_2) \in \mathbb{R}^3}} (v_{1|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{1|2} \cdot \vec{e}_2 + v_{1|3} \cdot \vec{e}_3) \wedge (v_{2|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{2|2} \cdot \vec{e}_2 + v_{2|3} \cdot \vec{e}_3) \\ &= (v_{1|1} \cdot v_{2|2} - v_{1|2} \cdot v_{2|1}) \cdot \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 + (v_{1|1} \cdot v_{2|3} - v_{1|3} \cdot v_{2|1}) \cdot \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 \\ &\quad + (v_{1|2} \cdot v_{2|3} - v_{1|3} \cdot v_{2|2}) \cdot \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 \end{aligned}$$

$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$, $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3$, sont des vecteurs dont les coordonnées sont déterminées dans $\mathbb{R}^3$ selon la géométrie du repère $\{0; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$.

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 &= (e_1 e_2)_{|1} \cdot \vec{e}_1 + (e_1 e_2)_{|2} \cdot \vec{e}_2 + (e_1 e_2)_{|3} \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 &= (e_1 e_3)_{|1} \cdot \vec{e}_1 + (e_1 e_3)_{|2} \cdot \vec{e}_2 + (e_1 e_3)_{|3} \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 &= (e_2 e_3)_{|1} \cdot \vec{e}_1 + (e_2 e_3)_{|2} \cdot \vec{e}_2 + (e_2 e_3)_{|3} \cdot \vec{e}_3\end{aligned}$$

On peut reformuler $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ avec des variables $d_1; d_2; d_3$ fonctions des variables $v_{j|i}$ et des constantes $(e_p e_{p'})_{|i}$:

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \underset{\substack{\vec{v}_1 \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v}_2 \neq \vec{0} \\ (\vec{v}_1; \vec{v}_2) \in \mathbb{R}^3}}{=} d_1 \cdot \vec{e}_1 + d_2 \cdot \vec{e}_2 + d_3 \cdot \vec{e}_3$$

On écrit l'appartenance à $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \in \text{vect}\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\} = \mathbb{R}^3$$

Qui n'est rien d'autre qu'un confinement à $\mathbb{R}^3$ si $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$ est une famille libre :

$$(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) \text{ conf}\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\} = \mathbb{R}^3$$

Note : On rappelle que $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ est défini nul dans le cas précis d'une colinéarité des vecteurs en produit pour $= 2$, et que si ces vecteurs sont non colinéaires $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ n'est pas défini pour $n = 2$, et que $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ n'est pas défini pour $n \leq 1$.

Mais on peut préciser des lieux géométriques si on confine les vecteurs en produit :

$$\vec{v}_1 \text{ conf}\{\vec{e}_1\} \Leftrightarrow \vec{v}_1 (v_{1|1} \neq 0 \text{ et } v_{1|2} = 0 \text{ et } v_{1|3} = 0)$$

$$\vec{v}_2 \text{ conf}\{\vec{e}_1; \vec{e}_3\} \Leftrightarrow \vec{v}_2 (v_{2|1} \neq 0 \text{ et } v_{2|3} \neq 0 \text{ et } v_{2|2} = 0)$$

On a alors, $\{\vec{v}_1; \vec{v}_2\} \text{ conf}\{\vec{e}_1; \vec{e}_3\}$, d'où :

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \underset{\substack{\vec{v}_1 \text{ conf}\{\vec{e}_1\} \\ \vec{v}_2 \text{ conf}\{\vec{e}_1; \vec{e}_3\} \\ \{\vec{v}_1; \vec{v}_2\} \neq \vec{0} \\ \{\vec{v}_1; \vec{v}_2\} \text{ conf}\{\vec{e}_1; \vec{e}_3\}}{=} v_{1|1} \cdot v_{2|3} \cdot \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 = v_{1|1} \cdot v_{2|3} \cdot (e_1 e_3)_{|1} \cdot \vec{e}_1 + v_{1|1} \cdot v_{2|3} \cdot (e_1 e_3)_{|2} \cdot \vec{e}_2 + v_{1|1} \cdot v_{2|3} \cdot (e_1 e_3)_{|3} \cdot \vec{e}_3$$

Et si on a défini de plus que $\vec{e}_2$ est orthogonal au plan contenant $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_3$:

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \underset{\substack{\vec{e}_2 \perp (0; \vec{e}_1; \vec{e}_3) \\ \vec{v}_1 \text{ conf}\{\vec{e}_1\} \\ \vec{v}_2 \text{ conf}\{\vec{e}_1; \vec{e}_3\} \\ \{\vec{v}_1; \vec{v}_2\} \neq \vec{0} \\ \{\vec{v}_1; \vec{v}_2\} \text{ conf}\{\vec{e}_1; \vec{e}_3\}}{=} v_{1|1} \cdot v_{2|3} \cdot \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 = v_{1|1} \cdot v_{2|3} \cdot (e_1 e_3)_{|2} \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_3$$

Sous ces conditions, $\{\vec{v}_1; \vec{v}_2\} \text{ conf}\{\vec{e}_1; \vec{e}_3\}$ et $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \text{ conf}\{\vec{e}_2\}$

Note : On rappelle que $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ est défini nul dans le cas précis d'une colinéarité des vecteurs en produit pour $n = 2$, et que si ces vecteurs sont non colinéaires $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ n'est pas défini pour $n = 2$, et que $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ n'est pas défini pour $n \leq 1$.

TRACES DE VECUS

2020 à 2022

Note , ce 12/02/2022 : ouf ! fini ! pour ce genre d'écriture a courbure infinie, tu as carte blanche...

Si les mathématiques sont le langage de la physique, la physique est le regard des mathématiques car c'est bien la réalité physique qui contient le développement de l'écriture mathématique.

Conclure qu'on n'arrive pas à montrer ce qu'on cherche est aussi un acte d'intelligence. C'est alors qu'on découvre autre chose.

La lecture d'une démonstration est incompréhensible autant que peut l'être la lecture d'une langue dont on ne comprend pas les mots, mais il s'agit de recopier en la précisant de l'écriture. La précision de l'acte est garante de la compréhension. De la même façon, on peut généraliser le fait d'avoir faim en développant un langage que seuls ceux qui en comprennent les mots pourront lire, mais tous ceux qui savent ce qu'est la faim pourront l'apprendre.

Même si l'on tend vers la perfection de la vie, on aurait tort de rejeter tout ce qui n'est pas parfait, car en faisant ainsi il n'y aurait ni ailleurs ni au-delà dont on puisse espérer l'écoute ou la présence, puisque nous aurions rejeté tout ce qui est en dessous de nous.

L'esprit fonctionne correctement avec une perception organique de sa propre dignité, et avec d'autres choses indéfinissables ou contingentes, comme l'effort, l'envie, le savoir et l'ignorance. Ses sordides souffrances le poussent malgré lui, alors même qu'il ne se voit pas, vers ses plus hautes aspirations à partager l'existence totale, en des circonstances qu'il ne maîtrise pas. La volonté que l'esprit exerce pour se voir est appelée à ne pas rester limiter à des projections d'actes dans l'imagination. Elle doit devenir volonté heureuse, opportuniste, impersonnelle. Nier l'action ou la vouloir complète n'est pas possible. L'action et l'esprit sont mêlés comme la vision et la chose vue, la netteté et l'ampleur sont leurs devenir.

La beauté est une brûlure au cœur de ceux qui en sont privés, et c'est un sauvage qui surgit dans la quête du beau.

Je me suis mis à croire sans m'en apercevoir. Je me suis mis à croire que le vecteur produit vectoriel appartenait à un espace de dimension supérieur à l'espace contenant les vecteurs en produit. Comment c'est venu ? Je ne sais plus. Comment c'est parti : je ne pouvais plus avancer dans ma pensée sans me contredire. S'il me plaît de faire briller des dimensions supplémentaires, je le ferai, mais pas dans un déni de la réalité.

... et puis si ! Le vecteur produit vectoriel appartient bien à un espace de dimension (n) supérieur à l'espace contenant les vecteurs en produit, mais seulement s'il a plus de coordonnées cartésiennes non nulles que chacun des vecteurs en produit. Dans le cas général les vecteurs en produit peuvent appartenir à tous les espaces de dimensions compris entre 0 et (n) , à condition qu'on les pense comme définis dans un espace de dimension (n) où l'on a assez de dimension pour définir un produit vectoriel. J'étais donc pris, quand je me suis mis à croire sans

m'en apercevoir, par une affirmation du langage que je me prononçais et qui me forçait à voir la propriété d'un cas particulier comme une règle générale. Et cela créait un faux problème, un épuisement à y trouver une impossible solution, que non pas la négation d'une part de vérité mais la flexibilité de pensée d'un nouveau coup d'œil embrassant un ensemble conceptuel plus vaste pouvaient résoudre avec le goût de la liberté. La croyance n'était donc pas si dure et aveugle, mais une sorte de localisation persistante... au moins je me représente maintenant clairement qu'un vecteur est un objet de dimension 1 qui occupe au plus tous les lieux selon toutes ses « inclinaisons » possibles par rapport aux n axes d'un repère quelconque de l'espace à (n) dimension. C'est certainement une autre localisation persistante, mais je ne vois pas venir un faux problème à l'horizon.

Une chose pour sauver la croyance : comme répétition elle est un germe, une latence. Mais la répétition de plus en plus précise de la chose vue est la découverte du réel, chose vue et vision finissant par se confondre.

Je sens que c'est là, pas loin. J'en ai envie, c'est l'aube, c'est le moment où les idées viennent me cueillir dans mon lit. J'écris pour ne pas oublier et pour faire briller la foi sans objet. Je ne sais pas comment je vais penser ces choses, mais je m'y consacre audacieusement. Je ne peux pas apprendre ce qui a été fait par d'autres s'il me manque cette envie vierge de tout contact, ma création. C'est un refuge, un éclat de temps comme un miroir où se voir et survivre dans le goût de soi, puis continuer.

Hier, 23/04/21, je poste sur le WhatsApp du club de plongeon « Qu'on éloigne de moi les mauvais gestes ! Quand cette activité reprend-elle, Patrick ? » Mes camarades de club connaissent ma façon de m'exprimer. Mon mot est de haute tenue spirituelle, je le partage avec eux ainsi que mon humanité et c'est bien. Le mauvais geste est pour moi la tentation de sauter d'un mur de 3 mètres de haut sur de la terre. Je sais que ça me fera mal et je ne vois pas pour quelle raison le faire. J'ai peur de m'avouer que ce n'est que de la peur, je déteste reculer quand je veux embrasser ce monde. Alors je reste dans ma misère en attendant, aveuglé, une bonne occasion d'amour ou de violence. Vers midi je regarde avec mon fils l'envol des astronautes vers l'ISS à bord d'une Crew Dragon de Space X. Je lui dis que ce sont des gens comme lui et moi qui réalise cela. L'après-midi je travaille à Paris, je suis avec mon ami Stepan et vers 14h30 je me plante une lame de cutter dans le bras, me coupant une veine. Le sang, la pharmacie, un vertige, un pansement. Puis la force et la fierté de terminer le chantier. J'apprends aujourd'hui que dans le même temps une policière était assassinée au couteau à Rambouillet, près de chez moi. J'aimerais dire que je n'y comprends rien, que je suis innocent, mais c'est faux, car je connais des images terribles qui habillent mon imagination, ce sont les nôtres. J'écris ces lignes, je veux les enregistrer, le logiciel me plante et je perds ce que je viens d'écrire. Alors je recommence. Le logiciel me plantera deux fois, jusqu'à, sans doute, que je parle sans trop mentir dans cette anecdote de ce mystère profond de grandeur et de petitesse qu'on appelle l'existence.

En conduisant ma camionnette tout à l'heure, en fin d'après-midi pour revenir d'un chantier à Courbevoie jusqu'à chez moi, je pensais avec joie (à tort à ce moment, mais à raison au moment où j'écris quelques heures après, comme quoi l'enthousiasme est précurseur) avoir trouvé la méthode pour calculer mes conversions de coordonnées ainsi qu'identifier des objectifs d'ordonnancement de mes pensées. J'étais très absorbé en conduisant et quand j'ai repris conscience, je me suis retrouvé en train de ralentir devant le péage de la A14, que je n'aurai pas dû prendre, ce qui m'aura coûté 17,50 €. Mais je ne regrette rien !

Une chose que je ne suis pas le premier à avoir remarquée, est de voir la capacité de comprendre se dépasser elle-même, qu'elle naisse et se motive de notions plus ou moins fausses et de volontés plus ou moins éclairées. Je veux voir l'acte trouver sa vérité sans trop de préméditation, car il me semble devoir accepter que la projection mentale dans le futur trouble l'immédiate et claire vision de soi. Elle ne peut être pour moi que la conséquence multiforme d'un regard intérieur dans le vide, dans l'ailleurs, un transcendant transparent. Les histoires inventées ne me font plus rêver. Goût amer ou tendre, cœur de soi, but secret que la volonté brisée recherche avec plus d'ardeur que la volonté unie. Imploration. Gravité. Il est possible d'avoir la sensation de ce qu'on est vraiment par l'acte s'accomplissant comme on le veut, ou non fait comme on ne le veut pas. C'est cela qui se cherche, tombe et berceau

de l'action. Vraiment, c'est notre regard dans la statue de la déesse faite de nos mains, hier, aujourd'hui, demain, partout.

Ô nuit, nuit belle, je ne sais pas quoi de moi tu éveilleras. Je sais comment je me couche, mais pas comment je m'éveille, et les matins où tu verses derrière mes yeux les claires visions que je n'avais pas pu imaginer la veille sont les beautés dont tu enfantes le retour sans fin des aubes. Même si je m'illusionne et que ce n'est encore qu'une petite vérité, j'avance.

J'ai changé l'indice i par l'indice q à l'intérieur de la sommation dans cette écriture, pour pouvoir l'écrire sans confusion. C'est le genre de décision que j'aurai aimé pouvoir prendre plus rapidement. Les symboles sont interchangeables s'ils conservent leurs sens, l'essentiel étant que le développé de l'écriture corresponde à ce qu'on modélise. Si les symboles ne sont pas interchangeables, ils perdent leurs significations, ou plutôt leurs significations sont la réalité de l'esprit qui perd ou n'a pas sa liberté et cherche à se convaincre par des complications. Cependant la vérité est qu'un tel esprit cherche un chemin d'évolution par l'expérience d'exister dans l'évolution de la personne. Demain ou ailleurs l'esprit est aussi celui qui gagne ou possède sa liberté. S'il est les deux en même temps et partout, alors ce que nous nommons esprit en pensant à ce que nous sommes n'est que l'ombre du sens réel de nos existences.

Quand je lirai ce texte depuis une autre existence, cela me fera gagner le temps qui manquait. Si je trace une lettre avec une vision dans mes yeux, tu auras ma vision en voyant la lettre. Et ce sera autant ta vision que la mienne. Tu trouveras alors les courts chemins cachés dans la matrice des choses. Comme tu retrouves ma vision en voyant la lettre, tu sauras aller jusqu'aux plus inaccessibles étoiles sans être limité par ce mouvement superficiel qui forme l'actuelle platitude de nos géométries, de nos peurs, de nos amours et de nos horizons. Je ne considère plus la peine comme une erreur, ni l'erreur comme une peine, parce que je me les suis données dans chaque ligne, dans chaque effort. J'ai vu comme platitudes mes sommets éclatants, que j'ai reconstruits encore et encore. Alors je sais à quoi m'attendre, je sais comment la vérité s'habille. Elle est la vision claire et nette d'un paysage fait esprit et d'un esprit fait paysage. Tout ce qui est contingent doit rétrécir dans l'infime détail. J'ai vu en détournant le regard : l'infime détail était demain, la matrice négative de tout ce qui ne se termine jamais.

Je me souviens... l'appellation sens direct et positif lue dans les manuels... Elle n'est valable que pour un côté du plan, mais je ne l'avais pas lu ou pas retenu, et ce n'est pas possible de comprendre la géométrie dans l'espace si on s'en sert comme d'une règle. Mais je l'avais compris comme une règle, et j'avais passé des jours et des jours à ne pas pouvoir m'expliquer ce que je voyais. J'avais été pris au piège du défaut humain. Celui de décréter ou d'obéir à des absolus dans une vision limitée, alors que la logique est tout illimitée et entièrement relative. C'est vrai, la croyance facilite une compréhension limitée mais c'est au détriment d'une compréhension plus profonde, dans le vidage de l'esprit. Certains le vide dans la matière, moi je m'adresse à un principe extérieur transcendant. C'est égal, dans tous les cas, on crée ou on se consume.

Le moteur de cette déconstruction est quelque chose d'intérieur. Cette chose est rarement avouée, parce qu'elle est toutes nos frustrations dans la déconstruction. Mais si on y fait attention, on peut en ressentir la présence comme un étau, une angoisse, et s'avouer qu'elle est aussi toutes nos libertés dans la vision. Si la vision vient de l'extérieur et pas de soi, on aime.

Je ne dénigre pas le langage, car j'en tire une joie poétique qui n'est pas pour rien dans la motivation logique. Quand j'étais jeune je me méfiais de la logique et je la considérais comme un handicap de l'esprit. J'ai toujours peur des mathématiques, un manque de confiance me poursuit depuis l'enfance. Il y a des esprits qui font plein d'erreurs tout le temps, et je suis de ceux-là. Je suis donc un bon chercheur et je cherche avec acharnement car j'ai un réservoir immense de difficultés à comprendre à rendre puissantes.

L'effort spirituel est un effort de libération, celle d'un attachement à se conformer à du connu inévitable parce qu'organique, dont on se libère après l'avoir reconnu. Si la libération n'est jamais réussie, il n'y a d'issues pour l'esprit que comme une dépersonnalisation. Par exemple celle de faire du psittacisme ou la facilité de se persuader de n'importe quel absolu et de le faire passer pour vrai aux yeux des autres. Un mental en mange un autre en le forçant à penser comme lui.

Ne pas penser, seulement discerner les êtres mentaux qui viennent nous penser. Poursuivre le libre effort sur soi-même qui ouvre la vision au cœur pour supporter les contacts dans ce monde, en le salissant moins que tous ces autres qui n'ont que le tort d'être peu capables. Car ils peuvent être aussi le père, la mère, l'enfant, le seul ami, et ce que nous avons été.

*J'ai pourtant perdu des heures à me croire obligé de choisir entre sinus et cosinus, la nuit dernière. Et bien que mon effort était motivé par la noble envie de comprendre, j'étais trompé car la noblesse d'un acte est contextuelle, je peux le dire maintenant. J'ai donc bien mérité de finir « sur les genoux », ce soir-là, à tout réécrire péniblement par des sinus, victime d'une ignorance et d'un questionnement qui n'appartenait qu'à moi. J'avais dû faire trop d'actes contraints, donc peu spirituels (sentiments compris), dans la journée, et je l'ai retrouvé le soir dans ces mathématiques. J'ai retrouvé la forme transposée et inconsciente de la même contrainte qui m'avait possédé le matin, m'empêchant le soir d'accomplir mon libre arbitre, d'intervenir dans mon raisonnement, de jouir d'idées, d'être mon « Fiat Lux ». J'ai donc effacé une bonne partie de ce qui fut écrit cette nuit-là, il y a maintenant plusieurs semaines. Ce n'était pas faux, mais je vois maintenant que c'était grossier. C'était mon esprit qui cherchait à voir trop de choses non vues.**

C'est cela qu'il faut comprendre pour pouvoir donner un sens à une représentation plus abstraite et il y a un moyen pratique qui nous dispense de faire appel à une quelconque mémoire. Nous pouvons reconstruire les commencements par les schémas qui sont inscrits dans notre esprit, et qui dépendent de notre perception équilibrée des sensations physiques c'est-à-dire un certain nombre de premiers éléments de justesse élémentaires relatifs. Ils sont relativement justes, pas absolument justes, mais juste quand même. C'est cette justesse qui, comme une progression qui s'effectue sans perdre le contact avec l'origine, selon une ligne propre à son espèce, finit par communier avec d'autres lignées extraterrestres dans le vaste univers. Ainsi les mathématiques exigent une culture importante pour être intelligibles. Tout comme une langue, ses premiers mots, ses éléments (aussi appelés « axiomes ») sont très intelligibles, mais deviennent ensuite hermétiques et parfois effrayants et repoussants par le jeu des « tautologies transformées ». Déjà là, il se peut que je vous donne moins envie de comprendre avec cette expression obscure que je viens d'écrire, et qui vient d'une sorte de « pitch » intérieur, création instantanée dans les schémas de mon esprit, création qui demande à être enviée, désirée, rejointe, mesurée, mais qui ne le sera pas forcément. On peut demander « à manger » sans risque d'être mal compris avec une expression ou un mot, mais pour voir la pertinence de la distinction conventionnelle faite entre les degrés d'angles et les radians par exemple, il faut connaître des processus expérimentaux plus complexes, se racontant en davantage de mots du langage. Il faut en conséquence qu'il existe un consensus pour les résumer en un mot mathématique. Si ce consensus manque, si la culture est éclatée en divers pôles ou si elle est absente, on peut tout reconstruire, on a vu pourquoi, mais dans les échelles de temps des civilisations c'est long. À part ça, le langage mathématique me semble garantir la mémoire des expériences mieux que la mémoire des mots des langues parlées. Autre chose sur la profondeur des schémas innés et le fait d'évolution : même en état d'ignorance sur l'être perçu, on peut percevoir une sorte de « goût » (je cultive ces perceptions exotiques immédiates). C'est peut-être le partage avec d'autres êtres, comme si un bref instant on se superposait à leur esprit, pour goûter la perception de leurs sensations selon leurs esprits, qui sont communes pour eux et ne leurs apparaissent pas, mais nouvelles et typiques pour nous, et qui font qu'on les remarque, qu'on en ressent le goût. On peut souhaiter un tel goût avant tout pour soi-même, pour décrypter les mystères de nos volontés et être davantage qu'un papillon de nuit allant brûler dans le feu de la lumière.

Pour nous qui voyons par des contrastes, ce qui est vraiment spirituel, c'est de supporter le contact avec un être qui n'a rien à nous donner sans devenir lui. Par une telle preuve on ne sait pas ce qu'on fait, on peut dire une

chose et montrer son contraire. Ce qui se produit est paradoxal. Ce n'est pas nécessairement une réponse logique satisfaisante, mais en rien ce n'est une erreur.

J'avais une fausse notion dans l'esprit, je pense qu'elle venait de très loin, de mes années scolaires. Je croyais que le produit vectoriel dépendait d'un angle tournant pour créer une base orientée. Encore aujourd'hui je vois l'enfant que j'étais qui s'inventait des notions à lui. Ainsi, pendant une bonne semaine, je cherchais inconsciemment à orienter ce vecteur par rapport à lui-même, ce qui s'est traduit par des faux problèmes sur les angles orientés et les symétries. Je croyais que la forme géométrique du produit vectoriel était aussi une forme analytique. Je me suis épuisé avant de me documenter à nouveau sur les notions de base. Je me suis vraiment épuisé ces derniers temps, complètement bloqué, à faire et défaire ce que j'écrivais, à m'arracher les cheveux. Et je n'ai senti aucune aide, aucune intuition, venant de cet ailleurs spirituel dont je parle souvent. J'étais seul, jamais je ne me suis senti aussi seul, écœuré de mon verbiage et de mes volontés pathétiques. Mais dès le lendemain, je trouvais alors tout ce que je cherchais, et même si je m'illusionnais encore, j'avais encore avec une nouvelle énergie dans une voie ouverte.

Car en effet il s'agit essentiellement de vision, et de rien d'autre. On a tort de parler trop simplement de facilité ou de difficulté à comprendre des raisonnements en mathématiques, comme si « raisonner » était la clef de tout. Je pense que « raisonner n'est pas premier ». Je vois et je ressens clairement que ce qui entre dans l'esprit est premier et spirituel, et que « raisonner », dans ce cas, n'est qu'une conséquence.

Le peintre peut dessiner le mot « oui » d'une si belle façon que son effet dans la vision contiendra le sens de la vérité logique dans un ensemble plus vaste. C'est la même chose en tout art, et le langage mathématique n'est difficile que comme une vision qu'on n'a pas encore eue et qu'on n'aura peut-être jamais si on ne la cherche que chez les hommes qui ne cherchent rien au ciel. Il ne restera alors que la vision d'un raisonnement qu'on n'arrive pas à comprendre écrite dans une phrase sombre et pleine comme notre mémoire blessée.

La solitude : chercher ce Dieu drapé dans son manteau silencieux. Le rejoindre dans l'affolant vertige de la vision d'une larme infinie. Vouloir l'aider dans son unique solitude. La grandeur : savoir discerner ce qui descend du transcendant de ce qu'on extrait de soi. La preuve de nos actes dédiés à l'existence totale se distingue de la preuve de quelque chose qui n'est pris qu'en nous seul. La tromperie : s'emparer d'une belle chose ou d'une belle idée pour la singer et l'abîmer.

Je me suis éveillé tôt ce matin-là, la tête pleine des idées que je viens d'écrire. J'avais une vision très belle que j'ai abîmée, puis je l'ai retrouvée, et perdue encore. Parfois c'est le miroir immobile et gris de ma mémoire, parfois un fleuve passe. La recherche du bonheur n'apporte que du malheur, si on croit que le bonheur seul devrait exister.

Le vecteur produit vectoriel reste à sa place dans l'espace euclidien, quelle que soit l'orientation du repère 3D dans lequel on lui donne sa forme géométrique. Cela peut paraître évident, mais c'est le genre de question qu'on se pose au début. Au fond, ce qui fait alors douter, c'est la question « peut-il en être autrement ? » et elle nous désoriente toujours dans le jeu des choix et des apparences.

Un bon exemple de l'usage de la liberté : la liberté en mathématiques de définir et de redéfinir un modèle est totale, quand elle n'est pas contrainte par les affirmations péremptoires du langage verbal.

Les vérifications numériques sont les seules aides que nous avons pour débusquer les erreurs. Et j'y passe un temps

fou ! Et j'en corrige beaucoup. Et pourtant si je disais seulement qu'il faut toujours corriger ses erreurs, je ne dirai qu'une banalité. Il faut aussi savoir ne pas les corriger. Comment ? En n'appliquant pas l'esprit à un seul objet d'étude, d'examen ou d'action. Pourquoi ? Parce que toujours corriger des erreurs par des vérifications ne permet pas d'avoir confiance en soi, et que c'est aussi une erreur spirituelle plus grave que toutes les autres car on a alors encore moins confiance dans le principe externe et transcendant qui fait évoluer l'être.

En chaque être (au sens large de tout ce qui nous contacte), on peut et on doit rechercher de le voir tel qu'il est aussi précisément que possible, pour se l'approprier et le formuler, afin de le maîtriser pour garantir notre intégrité. Mais il faut savoir regarder ailleurs. Le logiciel utilise, je le suppose, quelque chose comme une matrice de position des objets dans un repère, et ensuite il utilise des règles mathématiques pour en extraire des figures et des mesures. De la même façon je mesurerai un angle avec un rapporteur sur une figure. La machine n'a pas besoin de créer la formule qui donne cet angle pour le mesurer. Elle a besoin d'une formule qui est l'équivalent de mon rapporteur, et elle mesure dans sa matrice de position. Sa grande force est de rendre les mesures interdépendantes et cohérentes. L'esprit qui contient la vie et la matière peut créer la formule qui donne l'angle, et la volonté de la créer.

Le sentiment d'être quelqu'un de tout à fait sérieux à tout âge de la vie, est un sentiment partagé par beaucoup de personnes. On a ce contact qui nous fixe quelque part et qui donne une saveur particulière cachée dans les apparences. La saveur de ce goût est l'écart entre nos apparences et la position dans la matrice du réel. La saveur est l'individualité, qu'on la nomme âme, existence ou corps. Et l'âme humaine est plutôt sérieuse et souvent triste car rarement elle se perçoit elle-même.

L'apparence est un concept englobant celui d'apparence visuelle identique. On le voit bien quand on essaye de se représenter une vitesse par exemple. Il est impossible de la caractériser autrement que par des propriétés. L'apparence est donc équivalente aux propriétés de l'être, et la formule mathématique décrit précisément les propriétés de l'être. Une apparence partielle mais nette comme un petit acte plein de sens sont capables de remplir tout l'être de bonheur.

Mes premiers résultats numériques étaient faux. J'ai peiné pour chercher l'erreur, et cela m'a obligé à tout revoir, à corriger des fautes dans tout le texte. Ensuite je me suis aperçu, après deux ou quatre heures d'efforts, que j'avais donné une valeur numérique à la variable θ qui ne correspondait pas aux valeurs numériques des coordonnées de mes nouveaux vecteurs. Je croyais alors m'en tirer à bon compte, pour une grosse faute d'étourderie. Mais les résultats numériques étaient encore faux. Alors j'ai encore beaucoup cherché pourquoi, et j'ai corrigé une erreur conceptuelle majeure qui m'aura forcé à réécrire la formule du produit vectoriel dans une base quelconque. Ce sont des corrections d'erreurs inlassables et nombreuses qui soulèvent des questions inlassables et nombreuses. Et je me souviens que quand je les avais écrites faussement, j'avais eu le sentiment de ne pas les voir clairement, mais que ça devrait marcher comme ça. Mais ce Dieu qui se refait en chaque point dans la finitude de toutes les pierres, les bêtes et les demi-dieux, ne nous lâche pas avant que nous ayons tout vu de ce que nous sommes capables.

Il y a le contact des personnes différentes qui se décalque sur vous et, très souvent, vous cloue à toutes les croix de vos vertus difficiles à conserver face à leurs médiocrités. Voilà qui est bien plus exigeant qu'une confortable vue de l'esprit d'un corps à l'abri. L'épreuve est impossible à décrire et contient l'impensable.

In fine, toute opération de mesure dans une base est liée à la façon dont les outils de mesure ont été constitués. En effet, les tables trigonométriques mesurant l'angle entre les vecteurs ont été établies dans le cercle trigonométrique qui définit ipso facto un plan orthonormé.

Discerner ce qui est permis de ce qui ne l'est pas pour devenir une plus haute puissance.

Ce n'était que les quatre pénibles et dernières heures, car j'avais passé la journée à l'écrire, ce livre, comme les jours précédents. Il y avait la documentation mathématique consultable sur le net, et je ne savais pas si je devais passer un temps fou pour la comprendre. C'était trop compliqué, et je ne trouvais rien dans mon sujet. Ces errements m'ont permis pourtant de corriger d'autres erreurs dans tout ce que j'avais écrit avant. Ils m'ont forcé à revenir sur mes pas pour préciser mes empreintes. Ce n'est pas nécessairement une faute que de suivre sa propre pente. Vers une heure du matin, j'étais comme un zombi, à manipuler le logiciel Geogebra. J'ai fait un supérieur effort pour abandonner cet effort inférieur. Je voulais arriver à ne plus penser à ce problème, à ne plus chercher sa solution, incertain de savoir si seulement elle existait, et si elle était accessible avec mon bagage intellectuel. Ce grand danger de l'effort stérile. Supérieurement je sentais le plafond d'un ciel qui me disait que le but et l'origine sont spirituels. Et que dans le renoncement le ciel m'aiderait. Mais ce n'est pas facile de se prononcer ces mots-là contre la puissance de la vie en action. J'ai regardé ensuite un film sur internet, c'était un film érotique. Les acteurs étaient dans mon goût charnel, et je n'ai pas besoin de le justifier par des raisons qui me diviseraient. Je me suis couché près de mon épouse vers trois heures du matin, luttant pour accomplir le sacrifice de l'esprit et des sens. J'ai tout jeté sur le bûcher du sacrifice, et j'y ai mis le feu avec une allumette d'infini. Quand j'offre de belles œuvres elles brûlent bien. Et des cendres de ces sacrifices il ne ressort pas le néant, mais le phénix du corps renouvelé capable d'accomplir les actions. Ce que j'ai trouvé dans le feu du sacrifice, pour nommer par des vieux mots l'arcane du réel, ce fut le vide majestueux, en regardant devant et en haut par un mouvement intérieur. Ce n'était pas le vide d'un zéro. On peut nommer cela sans le défigurer. Ma pensée refaisait surface par moment, et je voyais une solution de résolution du problème de γ sous la forme du basculement de la base autour d'un axe. Des puissances grouillaient dans le regard tourné vers le bas. Pendant encore une bonne heure, j'essayais de visualiser ce qui me semblait prometteur, et que je n'aurai pas trouvé sans le sacrifice. Je ne refusais pas cette action, car elle était le gain du sacrifice. J'ai ensuite trouvé le sommeil de quatre heures à huit ou neuf heures, sur le canapé du salon. Et tout ce que j'écris actuellement, je le tire des paroles que je me suis dites ce matin, précisément avec la certitude que je les écrirai. Je ne crois pas en avoir oublié. Cela est la conséquence du vide créé qui se remplit inexorablement dans la manifestation, et c'est mon âme qui vibre en connexion avec ce qu'elle désire tant voir et montrer. Vers onze heures je me suis mis devant l'ordinateur pour vérifier les idées que j'avais eues. Les valeurs numériques dans les tests étaient fausses. J'étais perplexe. J'y ai encore passé des heures. Comme je ne voyais pas pourquoi, et que je tâtonnais, j'ai abandonné mon modèle. Et puis je me suis rendu compte que mon logiciel de géométrie pouvait ne pas être rigoureusement précis. Alors je suis revenu à mon modèle, et je l'ai testé avec d'autres valeurs d'angles. Elles différaient à la troisième décimale, mais semblablement dans les deux tests. Alors je me suis rendu compte que mon modèle était bon. Surtout, je me suis senti autorisé à écrire cet hommage que je tenais au chaud en moi depuis ce matin. Je suis encore étonné que mon problème ait pu avoir une solution... non... je ne me sens pas tout à fait seul depuis que je suis né.

Ce serait bien si je pouvais être certain de mes capacités renouvelées d'un jour à l'autre, si je pouvais garder cette confiance précisément quand je me sens incapable. C'est bien ainsi que ça se passe dans le sport. Alors d'où vient cette difficulté à être efficace ? C'est le manque de temps, c'est la contrainte, depuis l'enfance, qui m'a enlevé la confiance. En revanche, j'ai une énergie réciproque à la perte subie. Je ne vais pas continuer à respecter mon esprit moins que mon corps. Je pense qu'on est ordinairement tellement identifié à notre esprit qu'on ne peut pas le voir, et encore moins en prendre soin. On le considère comme un outil, alors qu'il est l'œuvre de chaque vie.

Les mathématiques sont des visions claires, nettes et simples, que le défaut humain décrit avec une perfection telle que la connaissance en obscurcit la vision. Mieux vaut suivre sa loi d'action, même inférieure, plutôt qu'imiter par psittacisme une loi d'action supérieure. Ce que nous appelons raisonnement est le fait de vouloir conformer une vision à un schéma mental en particulier, ce qui nous empêche d'avoir des visions et nous oblige à nous déconstruire, parfois en nous mettant en danger, puisque cette déconstruction est le plus souvent inconsciente et débordante dans tous les aspects de la vie.

Et cela on le découvre comme une invitation à la mesure de l'humain : le réel est intelligible depuis chaque côté

par lequel on le saisit dans une vision claire, parce que c'est sa clarté. Il est vrai qu'ensuite l'imagination brouille la vision, quand l'imagination n'est pas la clarté du réel. La science, faite de personnalités religieuses, athéistes ou avec toutes les nuances d'identifications qu'on voudra, me semble quand même la plus haute spiritualité, ou bien quelque chose de très distingué, quand la personne fait passer au second plan ce qu'elle est ou croit être, avec ses volontés constructives et destructives, et qu'au premier plan elle s'élève et se préserve dans la contemplation de cet univers dans lequel elle cherche à voir, à se voir.

En l'absence d'une vision géométrique dans le fondement de l'écriture abstraite, l'esprit cherche par tous les moyens à retrouver cette vision où l'écriture précise et la vision claire sont inextricablement liées. Ainsi fait l'esprit, y compris en s'identifiant à la confusion pour se préciser ensuite.

Si je suis à l'école et qu'on m'apprend la géométrie dans un repère orthonormé, alors je suis tout le temps distrait par une question intérieure du genre « et si, et si... et si le repère n'est pas orthonormé ? », et cette question est l'avatar d'une plus grande et plus antique question : « est-ce que c'est possible ? » Dans ce cas je ne comprends rien parce qu'on ne me montre pas ce que je peux voir.

La formule générale vient toute seule de la présentation de l'écriture, parce que même quand c'est moi qui pense, c'est encore Cela qui se duplique pour épouser l'identique. C'est comme des photocopies sur du papier de n'importe quelle image, toujours la même image sur toujours la même feuille, et puis ces feuilles se combinent entre elles par une foi sans objet et se modèle alors sous nos yeux la forme d'une sphère ou le reflet de tout ce décor dans mon esprit (un instant baigné de lumière). Et puis la sphère ou moi-même sers invariablement de copies pour d'autres choses. Je peux très bien m'égarer dans l'imagination avec ce type de discours, mais l'expérience que je tente de décrire à un fond puissant de vérité : ce que je cherche vient avec cette foi sans objet identifiable. Arriver à trouver des formules de changement de repère entre repères quelconques fut une grande joie, je l'avais désiré sans savoir comment faire ni même si c'était possible, et la culture existante m'aidât quand je fus en mesure de la percevoir. J'avance selon ce que je peux. Ce que je cherche n'est pas toujours ce que j'imagine. On connaît la méthode de Cramer comme quotient de déterminants pour résoudre des équations, il est sans doute plus pertinent et simple de penser dans un tel repère, mais comme ce n'est qu'un cas particulier du repère quelconque, l'ignorance de celui-ci signifie la tristesse et la répétition stérile. Je supposais que le quotient de déterminants n'était pertinent pour résoudre des équations de combinaisons linéaires dans tout espace que dans des repères orthonormés, mais je me trompais. En fait je n'avais pas le courage de développer le produit mixte pour le relier à un déterminant 3x3, sans avoir vérifié par l'outil informatique s'il y avait un rapport formulable à trouver. Quand j'ai vu que les solutions des équations étaient les mêmes par des divisions de produits mixtes et de déterminants, je me suis donné la peine de chercher ce rapport. J'escomptais alors une formule pour donner certaines mesures d'objet en dimension supérieures à 3. Ce n'était pas exactement ce que j'avais imaginé...

Tout émerveillement s'accompagne d'une illusion qui peut-être vite remarquée. Nous laisse-t-elle toujours déçus et découragés ? Mais tout émerveillement n'est-il pas aussi le signe et le moyen ? Quelque chose de possible n'est pas très loin, et la joie nous donne la force de nous y ouvrir. Quelque chose de possible dans le dramatique jeu des désaccords entre la volonté et de l'action, ce dont les créatures ne parlent jamais, qui rencontre leurs vieillesse et leurs morts. Le manque de charme du trop de conscience, le trop de conscience sans l'éternité des chances.

L'esprit personnel n'est pas responsable de ses visions qui lui viennent de l'activité de ce qu'il contient (son imagination et celles des autres) et de ce qui le contient (la spiritualité infinie), mais il est responsable de ce qu'il en fait.

La spiritualité n'est pas la croyance, elle ne peut pas justifier la destruction de l'adversité, elle n'en a pas besoin car elle la contient. Le mental qui ne trouve aucun accès au partage de l'esprit est un ennemi pour le corps qui le porte.

L'existence est tragique. Seul l'amour de soi reçu d'en haut la rend belle. Si on a fait un mauvais geste humain par cet amour transcendant, on n'a plus besoin de répéter ce geste. On s'en souvient si on le mérite.

J'ai vu mille jeunesses dans la lumière entre les bouleaux de cette forêt. Assis, feu sérieux sous les étoiles, implorant le contrôle des chaos involontaires de cette imagination dont je ne suis pas responsable.

Notre envie de trouver un sens, c'est la part d'indéterminé dans la physique du monde qui l'éveille. Le penseur n'est pas responsable de ces aléas qui s'imposent à lui dans son imaginaire et le font réagir selon l'état de toute sa nature corporelle plus ou moins transformable, mais il est responsable de ce qu'il en fait. Si je prononce des mots avec une sensation mentale, comme par exemple une image pour le sens de la vision, la « charge de vérité » est plus forte que si les mots sont seuls, même pour une image monochrome ou plate dans une association trompeuse. Ainsi l'association avec une image intérieure peut être plus ou moins intense en termes de lumière, couleurs, reliefs et détails.

Un faux problème est une charge de vérité aléatoire déposée dans l'esprit par l'indéterminé dans la physique du monde. Le faux problème empêche la charge de vérité de devenir plus forte. S'il est en évolution le penseur du faux problème constate cet arrêt. Si le faux problème est difficile à discerner, le vidage partiel nécessaire de la pensée prouvé dans l'acte permet à la nature de se rétablir en suggérant des aléas différents dans l'esprit qui se remplit à nouveau. En involution ou en stagnation l'image de la réalité est décevante dans des associations à faible charge de vérité pour préserver intact un aléa qui ne se présente plus que comme des mots stériles. Mais ils se présentent toujours devant le feu de vie du penseur.

L'écriture abstraite ajoute à l'information des mots d'une phrase l'image de la chose écrite qui devient porteuse d'information par la précision du détail écrit devenant dessin, au contraire des mots du langage dont l'image écrite n'a pas d'importance mais dont la signification est tout. Cependant il n'est pas possible de traduire en écriture abstraite l'information de ces présentes lignes de mots, parce que les mots ici tentent d'informer sur le « pourquoi » de l'existence, ou encore son sens. L'écriture abstraite ne réussit éventuellement à condenser que l'information descriptive, mais ses sommets localisés sont la magnificence de l'étendue indéterminée tout autour.

Voici mon espoir, et c'est l'essence de cette bête dont la pensée est une anomalie dans la nature. Image d'elle-même pas assez grande ou pas assez petite. Je suis être limité et aspirant, ici hostile et là amical, toujours justifié. Je regarde cet écran luire derrière une vitre où je ne comprends rien, mais je me donne la peine de l'écrire, longue peine, mon destin, notre peine. Et puis je nous arracherai une nuit sainte et heureuse, une aube de confiance faite œuvre, et demain advienne que pourra.

Nul ne connaît le Mal seulement en le subissant. Il faut l'avoir fait pour le connaître, mais il n'est pas nécessaire de faire un très grand Mal pour le connaître. La parole d'Évangile « Père, pardonne-leur, ils ne savent pas ce qu'ils font » est la très belle image d'un sentiment qui n'a pas été inventé par le christianisme mais mis en évidence par lui. Ce sont les mots de tout ce qui peut être spirituel dans le contact sensitif et non pas intellectualisé avec le Mal. Le Mal est mental, le Mal physique entre aussi dans le mental. Ce sont les entités mentales qui n'ont rien à nous donner mais qui nous prennent qui nous font du mal. Quand ce n'est pas nous-mêmes, ce sont des êtres torturés par des intentions innées ou acquises qui les opprime et qu'ils répercutent. On cherche alors à faire cesser

leurs contacts, parfois le contact avec nous-mêmes, et souvent l'Homme a le droit de constater qu'on lui prend en retour, qu'on lui fait du mal. Il n'est pas nécessaire de préciser ce qui est donné ou pris, on sait tous très bien que ces mots traduisent un déséquilibre dans lequel on chute. Qu'on le veuille ou non, on donne et/ou on prend simplement en étant ce que l'on est dans une circonstance. Si nous trouvons quelque chose qui place dans la raison ou dans l'au-delà quelque chose de nous qui ne peut pas être perdu dans la loi naturelle des échanges, alors nous pouvons nommer « pardon » cette trouvaille et constater que c'est ce que nous cherchons par l'efficacité de l'inflexion de pensée associée. Nous ressentons alors une sensation intense d'existence dans le rétablissement de l'équilibre. Les images déformant le réel cessent dans l'esprit, et il ne reste qu'un souffle retenu, une pensée suspendue, une concentration de force, et on en vient même à penser qu'il est nécessaire de connaître le Mal et de s'y soustraire. Enfin, le meilleur parti à prendre avec nous-mêmes ou de moins responsables que nous de ce qui est et fait n'est jamais de pardonner pour notre profit personnel, car ce serait encore prendre quelque chose. Il est peut-être de ne pas nous prendre trop au sérieux, de s'arranger pour nous faire évoluer doucement, sans même rien espérer. C'est presque impossible, mais heureusement nous profitons du fait que l'univers est grand dans toutes ses dimensions, et qu'on peut souvent s'y réfugier quelque part. C'est sa façon à lui de nous pardonner d'être ce que nous sommes, parce que dans l'ensemble, nous sommes pleins de promesses.

Un épisode des rêves d'une nuit... je suis avec des adolescents de mon âge, mais je n'ai pas d'âge. On marche entre des murs, une sorte d'ennui, de recherche d'aventures. C'est alors que deux ailes de chauve-souris toutes noires tombent du ciel sur moi. Ces ailes sont reliées l'une à l'autre sans le reste du corps, c'est une sorte de bête sans tronc. Je ne m'attendais à rien de surnaturel tombant du ciel, alors ça m'intéresse. J'attrape les deux ailes avec ma main droite, elles ne sont pas très grandes et dépassent donc de mon poing fermé de part et d'autre d'environ 50cm. Elles battent et m'enlèvent dans le ciel. Elles sont devenues toutes blanches et recouvertes d'un duvet. Je me demande si je vais lâcher et chuter, j'en ai un peu envie, mais je ne sais pas si je dois vouloir ça. Alors je me réveille.

Voici ce que j'expérimente : j'écris des scénarios d'idées, que je cherche à développer sans avoir l'impression de me contredire si je veux penser au-delà, que je souhaite conformer aussi aux usages culturels. Mais je ne suis pas capable de juger mes idées au moment où je les écris parce que je cherche des enchaînements d'idées que j'ignore. Quand je ne me sens pas « bloqué », c'est que j'arrive à écrire en quelques jours un scénario qui me permet de continuer à penser clairement, quitte à revenir un peu dessus par la suite. Ce n'est que quand l'écriture des choses pensées me mène à des incohérences, la tête lourde, la pensée déçue, mais l'énergie ardente, que je modifie ou j'efface le scénario pour en recommencer un autre. Même si ce que je crois être complètement faux est un peu vrai, je dois aussi réécrire le scénario.

Il est impossible de témoigner de l'activité de l'esprit sans l'appauvrir, sauf à considérer qu'on s'adresse à des personnes qui nous entendent et savent eux-mêmes compléter ce qui manque, car alors nous rendons le même hommage contemplatif. Je sais parler et je veux très fort témoigner de ce qui se cache pendant que je vis. Bien que j'avais compris qu'un espace vectoriel pouvait en contenir un autre plus petit, je ne m'étais pas défini clairement par la notion d'appartenance, ni la notion de sous-espace vectoriel et je ne m'étais pas servi dans mes pensées de l'idée qu'un vecteur appartenant à un sous-espace vectoriel appartenait aussi à l'espace vectoriel contenant ce sous-espace vectoriel. Sans doute des connexions manquaient dans mon cerveau, puisque la pensée a au minimum un support corporel.

Quand je dis que je ne m'étais pas défini clairement une idée, je parle du fait de comprendre, c'est-à-dire me raconter à moi-même ce qui est pensable ou non à partir d'une lecture d'une idée possiblement imparfaite produite pour un usage qui existait avant que je ne le pense.

J'étais donc resté bloqué des semaines dans un faux problème m'empêchant de penser et créant des pénibles contradictions, venant peut-être de la tournure d'esprit liberticide donnée par le langage parlant seul dans la tête, celui qui fait croire que les choses sont comme ceci ou cela, mais pas les deux en même temps. Ou bien je n'avais pas les connexions de neurones nécessaires pour penser ces choses-là. Ou alors le faux problème empêchait ces connexions, comme si l'intelligence ne donnait pas la direction elle-même, comme si l'espoir et l'ardeur avaient seuls le pouvoir de s'élever à un niveau si intense qu'ils pouvaient diriger l'intelligence hors du gouffre du faux

problème. Le regard intense se poursuivant dans le mystère du sommeil et arrachant peut-être au vide la parole manquante.

La justesse poétique est pour moi plus facile à produire que la justesse mathématique.

Des visions claires qui se décrivent simplement, mais en grand nombre. Puis ensuite les résumer dans une formule. C'est l'accumulation des détails qui développe la science, comme un puzzle.

Les choses que nous faisons par crainte, nous ne pouvons pas les comprendre. Nous ne pouvons pas même comprendre que nous sommes obligés de les faire dans la crainte. Je ne sais pas si quelques-uns de ceux qui sont nés chez des parents libres peuvent comprendre ceux qui sont nés chez des parents opprimés, mais il y a quelque chose qui rétablit tout comme cela aurait dû être. Cette belle tunique, ornée des motifs de ma noblesse, c'est par amour que je suis né où je ne pouvais pas la porter. Mais il est temps de la revêtir maintenant, car c'est plein d'amis ici.

Ca fait une semaine que je prends la peine de comprendre cette leçon sur les matrices et les espaces vectoriels. J'en avais besoin pour me prouver que j'étais capable de suivre une leçon, et pour essayer de clarifier mes idées et d'avancer dans mon projet. Seulement je me pose tellement de questions, et il me faut tellement de temps, que je comprends pourquoi je ne comprenais rien quand j'étais dans les écoles. J'ai aussi un problème de mémoire, et j'ai besoin de faire des vérifications géométriques des choses. Quand je n'arrive pas à comprendre une leçon, je retourne à ma façon de me poser des questions (mon « projet »). C'est peut-être un tort, mais je ne suis pas si fort. Si j'avais le cerveau plus rapide, je pourrais apprendre les techniques et me représenter leurs effets. D'un autre côté, je vois bien qu'on peut apprendre des techniques par cœur sans jamais les comprendre. On prouve ainsi une vraie qualité d'adaptation et une force de travail, mais j'en conclus que je ne suis pas doué en adaptation.

Je suis pathétique. Je ressemble à un autiste qui croit qu'il sait bien faire quelque chose simplement parce qu'il est content de le faire.

L'acte fait et l'acte non fait sont tous deux des actions de l'être possédant le corps et le mental. Ce sont ces actes qui s'offrent en sacrifice, son vrai sens n'est pas privation mais libre choix. Pour devenir meilleur, il faut offrir un sacrifice. Si devenir plus doux, plus gentil, plus heureux et plus utile aux autres en échappant à la répétition en soi du mal dans un monde où toutes les luttes sont justes, si cela a plus de prix à nos yeux que l'acte offert en sacrifice, alors le sacrifice est possible.

J'évacue toute distinction en moi et ce que je fais... je suis ce processus de photocopies de plus en plus précises d'une même image, dans lequel l'erreur de transcription ou celle de la vision floue ne sont qu'une page.

On interprète et c'est alors qu'on croit à ce qu'on imagine. Mais même voir ça est une interprétation. Il est une physique permettant d'échapper à cette claustration. Il y a le don sacré, le cadeau difficile à trouver, offert par soi à plus que soi. Aimer, c'est offrir une part de soi en se sentant devenir meilleur par une sensation immédiate physique, pas par un raisonnement. C'est voir les images plus vives, lumineuses, profondes et colorées. S'il n'y a rien ni personne, il est toujours possible de donner au vide ce qu'on aurait donné à notre corps. Alors c'est l'évolution. C'est au Dieu en soi qu'on a sacrifié. C'est à ce qu'on devient. Tout don sans cette sensation de joie blesse le corps et n'est que fantaisie l'imagination, sacrifice pour les ténèbres.

Encore une journée qui va passer très vite, essentiellement dévorée par ce livre que je dévore aussi. Je suis assis devant l'écran, j'ai fait un devis pour un client tout à l'heure, ma messagerie est au calme plat. Pas de chantier

depuis deux semaines, et les réserves financières qui fondent. Heureusement que ma femme travaille, et j'ai des roues de secours, mais elles ne sont pas inépuisables. Enfin j'aimerais bien finir mon livre pour le 16 février, pour le donner à la seule personne à qui je puisse le donner. Je vais y consacrer encore toute une journée. Dix ou douze heures de suite, c'est normal maintenant, pour donner à mes yeux une allure cohérente à des idées surgissant sans fin. J'ai hâte de finir sur une cohérence provisoire d'assez d'ampleur, puis, heureux, de sécuriser ma famille en consacrant mon énergie sur le travail (rêvé joyeux mais étourdissant – « Vos enseignes bien pensées, bien posées – SARL Techniques Images »). Et puis je recommencerai.

Mais peut-être tout est-il très bien organisé à mon insu, même les plantages de Word qui me font réécrire les textes mieux (pas avec le vieil ordinateur de la photo ci-dessous, dont l'écran est petit mais qui fonctionne bien et que j'ai fini par réutiliser). Je ne peux m'empêcher d'écrire mon intuition la plus profonde : Ô conteneurs, envoûteurs d'un autre genre, vivez l'activité de mon corps et venez en moi. Je suis activité combinatoire et temporalité, accueillant pour ce nouveau liant : les déplacements instantanés dans les innocences qui se cherchent, en tout point proches de l'origine.

La plus déterminante force naturelle de l'univers. La grande joie de l'univers dans ses déploiements supérieurs.



L'auteur, le 02/02/2022