ÉLÉMENTS DE DÉCRYPTAGE DE SYSTÈMES DE NUMÉRATION EXOTIQUES

Introduction

Il a existé au long de l'histoire humaine divers systèmes de numération plus ou moins pratiques d'emploi, élaborés selon les civilisations et les époques. On peut lire à ce sujet l'excellent livre de Geneviève Guitel : *Histoire comparée des numérations écrites, Flammarion, 1975.*

Notre étude n'embrasse pas toute la variété des systèmes de numérations, elle se borne à comprendre la logique de la numération indépendamment d'un choix particulier de symboles pour l'écriture des chiffres, en mettant en évidence les différentes possibilités de base de la numération positionnelle que nous utilisons. Nous avons fait cela parce que nous ressentions le désir de comprendre si nous pouvions compter autrement, et vouloir comprendre commence par une frustration, celle de la synthèse la plus cohérente possible qui n'est pas encore faite. Ensuite, c'est un jeu, une motivation : la perspective de se transformer en explorateur décryptant un système de numération exotique. Je ne dis pas que je donne tous les outils pour y réussir, mais je donne quelques éléments, qui sont déjà parfaitement connu culturellement depuis longtemps. Inutile alors est tout ceci ? Peut-être. Tout dépend de qui ou quoi évalue l'utilité. Il est certain que la possibilité de réussir ces décryptages existe si nous découvrons ici ou sur une autre planète suffisamment de preuves matérielles associées à des symboles exotiques pour que notre connaissance synthétique puisse évaluer un niveau de qualité logique. C'est déjà quelque chose de l'apprendre de soi-même.

Et maintenant je cède à mon penchant en sortant du sujet pour conclure cette introduction, car je crois que ce que je dis mérite d'être conservé puisqu'il a été pondu. Ne m'en veuillez pas, c'est la peur du néant, et mon style cabotin me sauvera peut-être en vous faisant sourire. Je veux donc parler d'autres choses que ces déserts arides de l'abstraction quand ils ont le mauvais goût de se faire lire par des yeux innocents, eux qui n'ont rien demandé et qui feront toujours mieux de d'abord se soucier d'être beaux. Les aptitudes d'esprit créatives et studieuses sont des aptitudes différentes, et parfois à cause de l'inconscience qu'à l'ensemble de l'esprit de cette différence, les refus d'apprendre pour l'aptitude créative et de créer pour l'aptitude studieuse studieuses, sont chacune des réactions de défenses. On ne peut bien comprendre que ce qu'on « bave » soi-même, et il y faut du temps et de la ferveur. Il est d'ailleurs assez déplaisant d'avaler la salive des autres, et en ce qui concerne la sienne, encore faut-il qu'elle soit fraîche : j'ai un peu oublié en mars 2024 ce que j'ai écrit dans cette étude de janvier 2023 et me le remémorer à nouveau par un effort ne me semble pas nécessaire et désirable.

On aurait tort de penser que les créations engendrent la fluidité de l'esprit, car la fluidité est d'abord le milieu dans lequel les inventions se font. Par ce terme de « fluidité » appliqué à l'esprit, j'entends une suite de perceptions imprévisibles qui se répand dans le dedans de soi. Ces perceptions sont recherchées dans le profond de soi-même, elles ne viennent pas de l'extérieur du corps, mais elles communiquent avec ce qui existe à l'extérieur. Elles ne sont évidemment pas le résultat des pensées, puisque ce sont des perceptions, mais il est certain qu'elles jouent en nous selon nos pensées. Peut-être que ces choses que je présente comme vraies n'existent pas réellement, ou ne peuvent pas exister, mais elles sont désirées et recherchées. Dans le monde onirique où l'image devient pensée, ce peut-être des sensations de goûts de soi, des perceptions intenses, étranges et vivantes. Ensuite, dans le demi-sommeil de l'aube, l'esprit encore imprégné de ce milieu fluide, des actions entrent dans la mémoire comme efforts mentaux, et des registres de pensées ordinairement séparés s'entrecroisent et préparent ce qui sera mis en actes. C'est l'éclaircissement qui embellira l'œuvre. Ce que l'on comprend profondément est toujours une création personnelle dont personne en particulier n'a de droit de propriété.

Objet de l'étude

L'objet dérivé de ce fondamental est de présenter une procédure capable, devant une suite de symboles exotiques tels que :

⌘●❒♏→

… de trouver, dans le cas où l'on y suppose l'écriture d'un nombre, la conversion de la valeur des nombres de ce système exotique dans notre système de numération en base 10, ou l'ordre d'énumération des symboles (leur rangements) est porteur d'information.

Cette procédure se fonde sur une formule qui est connue en base 10 comme la décomposition d'un nombre entier en somme de produits entre chiffres de la base et puissance de 10, mais j'ai eu le plaisir de la redécouvrir sous une forme compatible avec d'autres bases, mais toujours dans un système de numération positionnelle.

$$\textit{base de numération}:$$

$$\textit{nombre de symboles différents utilisés pour représenter les nombres}$$

Nous chercherons aussi à déterminer si le système de numération exotique étudié est anarchique, s'il possède une notation positionnelle, s'il est économe en symboles dans l'écriture des nombres. Cette économie détermine s'il est simpliste ou performant du point de vue arithmétique. Si le système de numération est trop simple alors il n'est pas pratique pour écrire de façon courte les nombres, et la culture locale peut par ailleurs être performante dans d'autres domaines mathématiques, tels que la géométrie, elle sera empêchée de développer pleinement des opérations arithmétiques et par extension une algèbre, du fait de la difficulté à vérifier les calculs numériques.

Si le système de numération est performant, l'essentiel du travail consistera à déterminer pour le système exotique la taille de sa base et à trouver les valeurs de ses symboles dans notre système.

Prérequis

Les symboles exotiques constituant les nombres exotiques sont des chiffres. Par exemple 112 ou 1,12 sont des nombres chez nous formés avec les 10 chiffres de notre base 10 (en comptant le zéro). Ces chiffres exotiques doivent se présenter comme tracés d'un seul tenant, ou presque, de façon à ce que nous puissions compter leurs nombres dans les nombres exotiques étudiés. Ce faisant, on élimine de nombreuses possibilités d'erreur.

Les chiffres formant les nombres exotiques étudiés sont des entiers (cela n'empêche pas la culture étudiée de disposer de tous les autres genres de nombres et concepts mathématiques possibles). On doit pouvoir disposer d'un nombre suffisant de nombres exotiques entiers, et on cherchera dans les chiffres les constituant à combien d'unités correspondent tel ou tel chiffre.

Chaque nombre doit pouvoir être mis en correspondance avec un ensemble d'objets. C'est un travail d'exploration sur le terrain matériel. Par exemple ●❒⌘ peut numéroter un bâtiment, ou indiquer le nombre d'objets dans un sac. Ce faisant, par un système de plusieurs équations à plusieurs inconnues, on peut espérer retrouver la valeur de tous les chiffres exotiques (le nombre d'unités - de petits bâtons - que chaque symbole de chiffre signifie).

Le système de numération étudié doit-être cohérent : il doit permettre d'effectuer des calculs en son sein, ce qui signifie entre autres choses que si un nombre entier exotique se lit de gauche à droite, de haut en bas (ou inversement), cela est valable pour tous les nombres de ce système. De même tous les nombres doivent pouvoir s'énumérer à une unité près (pas de nombres manquants).

Universaux

On tient pour universel le dénombrement d'unités, tel que des petits bâtons, dans un ensemble E. Par exemple :

$$E = |||$$

… se désigne ici par notre chiffre 3 et par un ou plusieurs symboles exotiques qui lui sont dédiés dans un autre système de numération.

On tient pour universel, quoique pas nécessairement connu dans la culture porteuse du système de numération, l'usage commutatif et associatif de l'addition et de la multiplication :

$$commutativité : \ a + b + c = b + a + c \quad ; \quad associativité : (a + b) + c = a + (b + c)$$
$$commutativité : \ a.b.c = b.a.c \quad ; \quad associativité : (a.b).c = a.(b.c)$$

De même l'usage non commutatif et non associatif de la distributivité de la multiplication sur l'addition. Ces règles étant prouvé par le comptage des petits bâtons dans toute culture locale :

$$distributivité\ non\ commutative : \ a.(b + c) \neq b.(a + c)$$
$$distributivité\ non\ associative : \ a.(b + c) \neq (a.b) + c$$

De même est universelle l'existence de symboles pour toutes les relations mathématiques tels qu'égalité, relation d'ordres, d'inclusion, etc. Ainsi que des symboles pour les grandeurs physiques et les écritures des relations entre ces grandeurs.

Ce qui n'est pas universel, c'est donc pour dénombrer par exemple 30 petits bâtons, le nombre de symboles qu'il faut pour l'écrire, et bien évidemment les diverses apparences picturales de ces symboles.

Passerelles

Pour l'intelligence du propos, mais tout en restant bien affranchi de l'usage de notre système de numération indo-arabe, il convient de pouvoir prononcer facilement les symboles du nombre exotique pour parvenir à le lire avec le souffle en mode oral ou muet. C'est pourquoi nous raisonnerons sur nos lettres d'alphabet latin :

$$a, b, c \ldots z$$

De plus notre procédure de décodage présentera les valeurs possibles des nombres exotiques dans notre propre système de numération, pour que cela ait un sens pour nous. Si nous l'utilisons pour élucider un système de numération exotique en fonction d'un autre tout autant exotique, il nous manquera notre preuve de vérité, qui au final est le dénombrement d'un ensemble de petits bâtons que nous savons être exact dans notre système. Il en découle que la formule de décodage s'écrira avec des symboles représentant les nombres exotiques, mais aussi avec des indices de notre système de numération positionnelle en base 10.

Premières approches

Les premières approches se font sur des expériences sensibles, en matière de raisonnements, ce sont des cas particuliers. La généralisation, plus abstraite, vient après

Base $c = 3$; système non positionnel

Soit un système de numération contenant seulement trois symboles. Ils ne peuvent identifier que les trois premiers ensembles d'unités. Si ce n'était pas le cas, il y aurait davantage que trois symboles. Pour nous affranchir de la dépendance à notre propre système de numération, on donne la représentation ci-dessous, mais on est obligé de lire chaque chose écrite avec les mots de notre langage, sinon notre cerveau ne les indexe pas dans sa mémoire :

$$a = | \quad (a\ c'est\ 1\ petit\ bâton)$$

$$b = || \quad (b\ c'est\ 2\ petits\ bâtons)$$

$$c = ||| \quad (c\ c'est\ 3\ petits\ bâtons)$$

Formation des nombres en base $c = 3$ avec système de numération dans lequel le rangement des symboles est indifférent (système de numération purement additionnel) :

$$a = | \quad (a\ est\ 1\ petit\ bâton)$$

$$b = aa = a + a = || \quad (b\ est\ 2\ petits\ bâtons)$$

$$c = ba = b + a = ab = a + b = b + a = ||| \quad (c\ est\ 3\ petits\ bâtons)$$

Ci-dessus, le nombre qui se prononce ba (BA) est égal à ab (AB) est égale à $a + b$ (A plus B) est égale à $b + a$ (B plus A). On comprend déjà la différence avec notre système qui lui, est positionnel : pour nous 21 ne représente pas la même chose que 12. Dans le système étudié, lire « un deux » peut conduire à des confusions de mémoire, si on ne prend pas garde que lire « un deux » est bien égal à lire « c » qui signifie trois petits bâtons.

Maintenant les nombres entiers consécutifs hors de la base. Les égalités de sens des prononciations demeurent valables :

$$ac = ca = c + a = a + c = ||||$$

$$caa = aca = aac = cb = bc = |||||$$

$$cc = c + c = ||||||$$

Il est clair ensuite que ce système, comparativement au nôtre, n'est pas économe en symboles pour former les nombres, même dans le cas où il note des puissances de quantités :

$$39 = ccccccccccccc = c^{cccca}$$

Là où nous utilisons deux symboles, il en utilise au mieux six. Et même dans le cas où il utilise des nouveaux symboles, par exemple en notant $d = c^{cccca}$, il introduit un élément de choix arbitraire dans sa base, qui n'est plus constituée d'entiers consécutifs à une unité près, et le problème d'économie de symboles ne tarde pas à se poser à nouveau :

$$39 = d$$

Mais:

$$507 = ddddddddddddd = \ d^{cccca}$$

Dans ces conditions, les opérations arithmétiques (commutativité, associativité, distributivité), bien que possible sont trop fastidieuses. En effet, ce système trop simple ne pourra pas écrire n'importe quel grand nombre, il y aura toujours des nombres qui ne pourront pas s'écrire de façon courte par manque de symboles.

C'est ce défaut qui marqua la numération romaine antique (et empêcha cette culture de développer une algèbre). Ils ont aggravé leur problème par une économie de symboles tenant à des conventions arbitraires, par exemple le placement du symbole X qui prive de 10 unités la somme des termes lus additivement de gauche à droite, mais cette privation s'effectuant par convention sur les cent dernières unités en fin de lecture du nombre :

$$On\ n'écrit\ pas\ MXD = 1490\ , on\ écrit\ \ MCDXC = 1490$$

$$MDXC = 1590\ évite\ d'écrire\ MDLXXXX$$

Ce qui faisait de l'addition dans ce système une opération qui n'était plus commutative, d'où une obscurité de leurs opérations arithmétiques :

$$1610 = MDCX = M + D + C + X \ \neq \ 1590 = MDXC = M + D + X + C$$

Base $\boldsymbol{c = 10}$; système non positionnel

Il possède les mêmes propriétés que précédemment, la liste de ses symboles est :

$$a = | \quad (a\ est\ 1\ petit\ bâton)$$

$$b = aa = a + a = || \quad (b\ est\ 2\ petits\ bâtons)$$

$$c = ba = b + a = ab = a + b = b + a = ||| \ \ (c\ est\ 3\ petits\ bâtons)$$

$$d = ||||\ ; e = |||||\ ; f = ||||||\ ; g = |||||||\ ; h = ||||||||\ ; i = |||||||||\ ; j = ||||||||||$$

Secondes approches

Toujours sur des cas particuliers, avant de procéder à une généralisation abstraite, car c'est bien ainsi que l'esprit peut mémoriser de quoi comprendre. Je n'utilise pas de symbole ayant le sens du zéro pour le moment, car je veux expliquer l'introduction conceptuelle de celui-ci ultérieurement.

Base $\boldsymbol{c = 3}$; système positionnel sans le chiffre zéro

On a toujours les données de départ :

$$a = | \quad (a\ c'est\ 1\ petit\ bâton)$$

$$b = || \quad (b\ c'est\ 2\ petits\ bâtons)$$

$$c = ||| \quad (c\ c'est\ 3\ petits\ bâtons)$$

Mais on forme les nombres en base c=3 avec un système de numération dans lequel le rangement des symboles a une signification systématique (la même pour tous les nombres). On se demande alors comment on pourrait symboliser quatre petits bâtons. La seule façon nouvelle est d'écrire :

$$aa = ||||$$

Ce qui implique que la graphie aa, perçue comme un tout par l'œil, ne signifie plus $a + a$, car $a + a = ||$, demeure impossible à changer (si un petit bâton avec un petit bâton n'est plus deux petits bâtons, autant renoncer à effectuer des opérations de calculs en se disant que cela peut être n'importe quoi). Elle ne signifie pas non plus $a.a$, elle a le sens d'une totalité que le système de numération exotique sait savoir représenter quatre unités.

Donc la seule signification possible et systématique de aa dans ce système, l'esprit la trouve facilement en opérant une multiplication (symbolisée par un point entre les symboles), et une addition (symbolisée par une croix entre les symboles) :

$$aa = a.c + a$$

Écrire $aa = a + c$ est vrai, mais n'est pas l'égalité permettant la construction des nombres. Dans l'écriture :

$$aa = a.c + a$$

… on lit quelque chose de plus complet que « une unité plus trois unités », on lit qu'on a « un ensemble de trois unités plus une unité ». Cette égalité, qu'on veut voir écrite en filigrane dans tous les nombres, on peut la nommer « algorithme » (cette écriture implicite dans tous les nombres est compatible dans ce cas particulier avec les définitions qu'on peut trouver pour ce mot dans les encyclopédies). Sur ce principe, on forme :

$$ab = a.c + b = (5\ petits\ bâtons)$$

5 étant un symbole non disponible dans cette base, je devrais écrire plus rigoureusement "*ab petits bâtons*", mais alors je suis moins complet d'une autre façon, car je ne relativise plus ma compréhension avec, dans notre cas, la numération en base 10 que nous avons en mémoire. On poursuit :

$$ac = a.c + c = 6$$

Et après ? l'esprit hésitant peut être tenté d'écrire $aca = a.c + c + a = 7$, mais alors que signifierait aca ? est-ce que $aca = a + c + a$? on retomberait alors à l'usage d'un système seulement additif, et ce n'est pas ce que nous voulons. Est-ce que $aca = ac + a$? mais dans ce cas, l'idée de multiplication disparaît et c'est encore le système additif qui revient. Or on veut utiliser notre algorithme. On écrit donc :

$$ba = b.c + a = 7$$
$$bb = b.c + b = 8$$
$$bc = b.c + c = 9$$

Et selon l'algorithme :

$$ca = c.c + a = 10$$
$$cb = c.c + b = 11$$
$$cc = c.c + c = 12$$

On a alors :

$$aaa = (aa).c + a = aa.c + a = 13$$

Qui est bien cohérent car $aaa = aa.c + a = (a.c + a).c + a = a.c.c + a.c + a = 13.$ Ensuite, les seules façons d'écrire 14 et 15 avec l'algorithme sont :

$$aab = aa.c + b = 14$$
$$aac = aa.c + c = 15$$

On poursuit donc avec les seuls rangements de symboles qui soient cohérents avec les quantités de petits bâtons s'augmentant d'une unité à chaque fois :

$$aba = ab.c + a = 16$$
$$abb = ab.c + b = 17$$
$$abc = ab.c + c = 18$$

$$aca = ac.c + a = 19$$
$$acb = ac.c + a = 20$$
$$acc = ac.c + b = 21$$

Quand, dans les places disponibles à gauche du premier symbole de la base, on a énuméré toutes les combinaisons possibles des autres symboles de base (ci-dessus $3.3 = 9$), on fait la même chose avec le second symbole de la base, jusqu'au dernier :

$$baa = ba.c + a = 22$$
$$bab = ba.c + b = 23$$
$$bac = ba.c + c = 24$$

$$bba = bb.c + a = 25$$
$$bbb = bb.c + b = 26$$
$$bbc = bb.c + c = 27$$

$$bca = bc.c + a = 28$$
$$bcb = bc.c + b = 29$$
$$bcc = bc.c + c = 30$$

$$caa = ca.c + a = 31$$
$$cab = ca.c + b = 32$$
$$cac = ca.c + c = 33$$

$$cba = cb.c + a = 34$$
$$cbb = cb.c + b = 35$$
$$cbc = cb.c + c = 36$$

$$cca = cc.c + a = 37$$
$$ccb = cc.c + b = 38$$
$$ccc = cc.c + c = 39$$

On a ensuite

$$aaaa = aaa.c + a = 40$$

Et ainsi de suite.

Base $j = 10$; système positionnel sans le chiffre zéro

Sur le même principe, on forme tous les nombres entiers avec :

$$a = | \,;\, b = || \,;\, c = ||| \,;\, d = |||| \,;\, e = ||||| \,;$$
$$f = |||||| \,;\, g = ||||||| \,;\, h = |||||||| \,;\, i = ||||||||| \,;\, j = ||||||||||$$

Il faudra énumérer tous les symboles jusqu'à j, qui vaut 10 unités, avant de poser, avec j qui est la taille de la base :

$$aa = a.j + a = 11$$
$$\ldots$$
$$aj = a.j + j = 20$$
$$ba = b.j + a = 21$$
$$\ldots$$
$$bj = b.j + j = 30$$
$$ca = c.j + a = 31$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$ij = i.j + j = 100$$
$$ja = j.j + a = 101$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$jj = j.j + j = 110$$
$$aaa = aa.j + a = 111$$

Et ainsi de suite.

Dès ce moment, on est capable de donner une formule qu'on soupçonne d'être vraie pour tout nombre formé de i symbole(s), par exemple pour $i = d = 4$, dans une base de taille $j = 10$, qui comprend donc 10 symboles différents :

$$bcja = bcj.j + a$$
$$bcja = (bc.j + j\,).j + a$$
$$bcja = ((b.j + c).j + j\,).j + a$$

Soit une décomposition en somme de produits des valeurs des symboles de base avec des puissances de la valeur terminale de la base (ici c'est j) :

$$a = | \,;\, b = || \,;\, c = ||| \,;\, i = d$$

$$bcja = b.j^{d-a} + c.j^{d-b} + j.j^{d-c} + a$$

Par exemple, $bcja$ a alors avec notre système de notation en base 10 la valeur que nous écrivons 2401 :

$$bcja \underset{\substack{base \\ j=10}}{=} b.j^{d-a} + c.j^{d-b} + j.j^{d-c} + a \underset{\substack{base \\ 10}}{=} 2.10^3 + 3.10^2 + 10.10^1 + 1.10^0 = 2401\, unités$$

En base inférieure à 10, $bcja$ est absurde, car $j = 10$. En une autre base, ce qui s'écrit $bcja$ ne représente plus 2401 unités. En base 11 on rajoute un symbole alphabétique (par exemple et pour faire simple $k = 11\, unités$). Dans ce cas on a :

$$bcja \underset{\substack{base \\ k=11}}{=} b.k^{d-a} + c.k^{d-b} + j.k^{d-c} + a \underset{\substack{base \\ 11}}{=} 2.11^3 + 3.11^2 + 10.11^1 + 1.11^0 = 3105\, unités$$

Comment pouvoir affirmer que cette décomposition du nombre est la même, quelle que soit la taille de la base dans ce système positionnel ? Il va falloir généraliser de façon plus abstraite l'écriture pour en donner une démonstration rigoureuse.

Base $n = entier\ quelconque$; système positionnel sans le chiffre zéro

On abandonne désormais la notation alphabétique et on fait appel à notre propre système de numération pour signifier un nombre entier quelconque de symboles formant une base de numération. Au lieu de les noter a ; b ; c ; … qui se termine par z, on les note en les rangeant en quantité croissante d'unités :

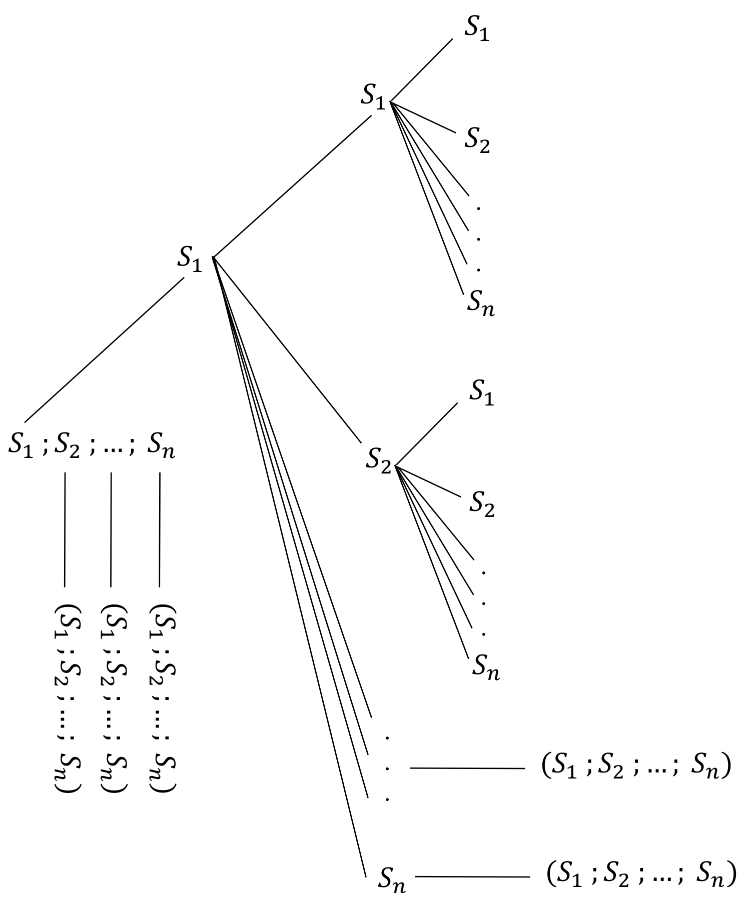
$$S_1 = | \,; S_2 = || \,; \dots ;\ S_n = n.(|)$$

… qui peut former une suite aussi longue que l'on veut de symboles selon la valeur de n.

Si on avait voulu présenter cette suite avec les indices du système de numération positionnel en base 3 on aurait pu écrire aussi sans problème, avec le symbole n qui représente un nombre aussi grand qu'on veut dans cette base, donc formé avec les symboles a, b, c, et un autre symbole générique de chaque symbole (conservons S, mais ce peut-être n'importe quoi) :

$$S_a = | \,;\ S_b = || \,; S_c = ||| \,; S_{aa} = |||| \,;\ S_{ab} = |||||; \dots ;\ S_n$$

Mais cela ne présente plus maintenant d'intérêt conceptuel, car la relativisation mentale a eu lieu et peut se faire en rapport avec notre propre système de numération en base 10 pour éviter des confusions par défaut de mémoire. La formation des nombres se poursuit indéfiniment sur le schéma d'arborescence visuelle suivant :



Soit un nombre noté $N_1 N_2 \ldots\ N_i$, avec $1 \leq i$, et avec chaque symbole N_i qui peut être égal à un des symboles de la base :

$$N_1 \in (S_1\,; S_2\,; \ldots;\ S_n)$$

$$N_2 \in (S_1\,; S_2\,; \ldots;\ S_n)$$

$$\ldots$$

$$N_i \in (S_1\,; S_2\,; \ldots;\ S_n)$$

On dénombre donc n^inombres à i symboles en base n. On reconnaît notre algorithme partout.

Rappelons que $N_1 N_2 \ldots N_{(i-1)}\, .\, n$ se lit $(N_1 N_2 \ldots N_{(i-1)}\ ).\, n$, signifiant que n multiplie l'entièreté du nombre.

On a, en s'interdisant de faire usage du zéro et donc de noter $N_i .\ n^0 = N_i$:

$$N_1 N_2 \ldots N_{(i-1)} N_i\ = N_1 N_2 \ldots N_{(i-1)}\, .\, n + N_i$$

$$N_1 N_2 \ldots N_{(i-1)} N_i\ = (N_1 N_2 \ldots N_{(i-2)}\, .\, n + N_{(i-1)}\ ).\, n + N_i$$

$$\ldots$$

$$N_1 N_2 \ldots N_{(i-1)} N_i = N_1 .\ n^{i-1} + N_2 .\ n^{i-2} + \cdots + N_i$$

Soit écrit plus proprement :

$$N_1 N_2 \ldots N_i = N_1 .\ n^{i-1} + N_2 .\ n^{i-2} + \cdots + N_i$$

Et si on veut mettre en évidence le décompte des i symboles avec une variable j :

$$N_1 N_2 \ldots N_i = \sum_{j=1}^{i-1} N_j .\ n^{i-j}\ + N_i$$

Exemple

La valeur de $baabc$ en base $c = 3$ sans le chiffre 0 avec $a = 1$; $b = 2$; $c = 3$; $ab = i = 5$ est :

$$baabc = b.\ c^{ab-a} + a.\ c^{ab-b} + a.\ c^{ab-c} + b.\ c^{ab-aa} + c$$

Ce qui correspond dans notre système de référence à :

$$baabc = 2.\ 3^{5-1} + 1.\ 3^{5-2} + 1.\ 3^{5-3} + 2.\ 3^{5-4} + 3 = 207$$

Démonstration de la formule

J'en profite pour relativiser l'idée de démonstration, qui me tyrannise depuis longtemps. Le premier réflexe de l'esprit est de se poser la question suivante : on se demande si une telle décomposition peut se faire sur tous les nombres entiers.

Supposons qu'un nombre quelconque $N_1N_2 \dots N_i$ puisse se décomposer ainsi :

$$N_1N_2 \dots N_i = N_1.\, n^{i-1} + N_2.\, n^{i-2} + \cdots + N_i \quad (propriété\ P_i)$$

Est-ce qu'un autre nombre peut s'écrire de la même façon ? Si l'on cherche alors à établir un raisonnement par récurrence, on dira que :

Initialisation : $P_2 = N_1N_2 = N_1.\, n + N_2$ est une somme d'entiers naturels (je n'initialise pas à $i = 1$ pour ne pas avoir besoin d'utiliser le zéro)

Hérédité : si la propriété $P_{i>2}$ vraie signifie que P_i est une somme d'entiers naturels, alors on écrit P_{i+1} :

$$N_1N_2 \dots N_iN_{i+1} = N_1.\, n^i + N_2.\, n^{i-1} + N_3.\, n^{i-2} + \cdots + N_i.\, n + N_{i+1} \quad (propriété\ P_{i+1})$$

$$N_1N_2 \dots N_iN_{i+1} = n.P_i + N_{i+1}$$

Dès lors $n.P_i$ est un entier naturel, et N_{i+1} est par définition un entier naturel, donc P_{i+1} est vraie car elle s'écrit bien comme une somme d'entiers naturels.

Conclusion : comme P_2 est vraie, par récurrence tout entier naturel peut s'écrire comme P_i.

Mais voilà, P_i est relatif à des propriétés d'associativité et de commutativité de lois de composition additive et multiplicative dont on ne montre rien.

Essayons de démontrer l'écriture autrement. Disons-nous d'abord que tout nombre entier est un ensemble d'unités :

$$N_1N_2 \dots N_i = |\,|\,|\,|\,|\,|\,|\dots.|\,|\,|\,|$$

… qu'un regroupement de ces unités en ensembles d'unités arbitraires est possible :

$$N_1N_2 \dots N_i = (|\,|)\ (|\,|\,|)\ |\,|\dots.|\ (|\,|)\ |$$

… qu'un symbole est nécessaire pour dire que ces sous-ensembles forment le même ensemble initial :

$$N_1N_2 \dots N_i = (|\,|) + (|\,|\,|) + | + | + \cdots + | + (|\,|) + |$$

$N_1N_2 \dots N_i$ peut maintenant s'appeler « somme d'unités » qui est en fait un ensemble muni d'une loi d'addition associative et commutative (voir définitions en début de livre).

…que les sous-ensembles contenant les mêmes nombres d'unités peuvent être regroupés :

$$N_1N_2 \dots N_i = b_1.(||) + b_2.(|||) + \dots + b_i.(|)$$

$N_1N_2 \dots N_i$ peut maintenant s'appeler « somme de produits d'unités » qui est en fait un ensemble muni d'une loi d'addition associative et commutative et d'une loi de multiplication associative et commutative .

... que si $N_1N_2 \dots N_i$ est un nombre entier de i symboles, et s'il existe n symboles différents, alors on peut toujours avoir des coefficients a_i entiers et des quantités d'unités $(| \dots |) = n$ de telle sorte que :

$$N_1N_2 \dots N_i = a_1.(| \dots |) + a_2.(| \dots |) \dots + a_{i-1}.(| \dots |) + a_i.(|)$$

En effet :

$$N_1N_2 \dots N_i = a_1.n + a_2.n \dots + a_{i-1}.n + a_i.1$$

Est bien une somme de nombres entiers. On peut donc écrire :

$$N_1.\ n^{i-1} = a_1.(| \dots |) = a_1.n$$
$$N_2.\ n^{i-2} = a_2.(| \dots |) = a_2.n$$
$$\dots$$
$$N_{(i-1)}.\ n = a_{i-1}.(| \dots |) = a_{i-1}.n$$
$$N_i.1 = a_i.(|) = a_i.1$$

D'où on conclut qu'on peut réécrire avec les mêmes lois :

$$N_1N_2 \dots N_i = N_1.\ n^{i-1} + N_2.\ n^{i-2} + \cdots + N_i$$

Bien sûr, on dira que dans le raisonnement par récurrence ces lois sont une axiomatique implicite, mais dans le souci de relativiser la démonstration, je souhaitais comprendre deux façons de me montrer les choses.

Promenade dans une écriture de nombre exotique

On présente ci-dessous un exemple d'égalités de concepts portés par des symboles :

Symbole de l'égalité :

$=$ *est* ❖

Symbole d'une unité :

$|$ *est* ♦

Symboles de la base (on suppose pour l'exemple qu'on ne connaît la valeur que des trois premiers symboles) :

■ ❖ ♦
⬆ ❖ ♦♦
❐ ❖ ♦♦♦

$n = taille\ de\ la\ base$
On ne connait pas son symbole exotique et sa valeur.
On utilise notre symbole n en lieu et place.

4 = ❐ ♌ ■
On connaît sa valeur mais pas son symbole exotique.
On utilise notre symbole 4 en lieu et place

Symbole de la multiplication :

$$. \ est$$ ♉

Notation d'une multiplication :

♏ ♌ ♏

Symbole de l'addition :

$$+ \ est$$ ♌

Notation d'une addition :

♏ ♌ ♏

Notation d'une puissance de nombre, avec l'exemple de 🡅 symbole de base valant deux unités :

♏♉♏ ❖ ♏🡅

On a conscience que cet exemple de correspondance emprunte encore beaucoup à nos conventions, l'exposant est en haut à droite du symbole, les symboles de la multiplication et de l'addition se situent entre les symboles additionnés ou multipliés, mais il n'est pas nécessaire de complexifier davantage pour en retirer le bénéfice intellectuel.

Les symboles exotiques figurant les nombres supérieurs à 3 sont inconnus, on connaît les symboles ⌘et ● et ♏ et 🡒 mais on ne sait pas leurs valeurs. On peut s'amuser à écrire le nombre exotique avec tous les symboles connus du système exotique et les nôtres :

⌘●❒♏🡒 ❖ ⌘♉n^4 ♌ ●♉ $n^{❒}$ ♌ ❒♉ $n^{🡅}$ ♌ ♏♉ $n^{■}$ ♌ 🡒

On donne la correspondance dans notre système de numération :

⌘●❒♏🡒 $= N_1N_2N_3N_4N_5$

⌘●❒♏🡒 $= N_1.\ n^4 + N_2.\ n^3 + N_3.\ n^2 + N_4.\ n^1 + N_5$

⌘●❒♏🡒 = ⌘.n^4 + ●.n^3 + ❒.n^2 + ♏.n^1 + 🡒

Introduction du zéro

Base $n = entier\ quelconque$; système positionnel avec le chiffre zéro

Soit S_s un symbole de base de taille n. On doit pouvoir l'écrire avec notre algorithme, ce que nous n'avons pas montré jusqu'à présent. La seule façon de l'écrire est de symboliser qu'un « rien » est écrit à la gauche de S_j. On écrit alors :

$$S_s \in (S_1\ ; S_2\ ; \dots ;\ S_n)$$

$$S_s\ = rienS_s = rien.n + S_s = S_s$$

Ce « rien » est ce qu'on va symboliser comme notre zéro. Si on avait placé ce zéro à droite de S_s, on n'aurait pas retrouvé les valeurs des symboles de base avec l'algorithme. La position du zéro est donc significative.

$$S_s \;= 0S_s = 0.n + S_s = S_s$$

Plusieurs raisons philosophiques amènent à concevoir le zéro. On liste ci-dessous les équivalents abstraits de ce qu'on peut formuler avec des mots décrivant ce que le psychique constate :

$$i + 0 = i$$
$$i - i = 0$$
$$0.i = 0$$

On cherche alors à mettre ce symbole dans la base, pour conserver n symboles, ainsi que la présentation cohérente de la numération il nous faut alors modifier le symbole $S_n = n$.

On écrit donc :

$$S_n = 0S_n \;= 0.n + S_n = S_1.n + 0 = S_1 0$$

Qui est la même chose que :

$$S_n = 0S_n \;= 0.S_n + S_n = S_1.S_n + 0 = S_1 0$$

Ainsi tous les ensembles de permutations, au lieu de s'initier avec des puissances du symbole S_n, s'initieront avec des puissances du symbole $S_1 0$.

On note que $N_i = N_i.\ n^{i-i} = N_i.\ n^0$

On réécrit donc le développé complet d'un nombre de taille i en base de taille n:

$$N_1 N_2 \dots N_i = N_1.\ n^{i-1} + N_2.\ n^{i-2} + \cdots + N_i.\ n^0$$

On remarque que cette écriture implique $n^0 = 1$. Réécrivons là encore :

$$N_1 N_2 \dots N_i = N_1.\ S_1 0^{\ i-1} + N_2.\ S_1 0^{\ i-2} + \cdots + N_i\ .S_1 0^{\ 0}$$

Chaque symbole $N_i \in (S_1\ ; S_2\ ; \dots ;\ S_n)$, donc quand $N_i = S_n = S_1 0$ on a les éventualités suivantes :

$$S_1 0\ .\ S_1 0^{\ i-1} =\ S_1 0^{\ i}$$
$$S_1 0\ .\ S_1 0^{\ i-2} =\ S_1 0^{\ i-1}$$
$$\dots$$
$$S_1 0\ .\ S_1 0^{\ 0} =\ S_1 0^{\ 1}$$

Il est alors évident que l'écriture se réorganise.

Par exemple si $N_2 = S_1 0$:

$$N_1 N_2 \dots N_i = N_1.\ S_1 0^{\ i-1} + N_2.\ S_1 0^{\ i-2} + \cdots + N_i\ .S_1 0^{\ 0}$$

Devient :

$$N_1 N_2 \dots N_i = N_1.\ S_1 0^{\ i-1} + S_1 0.\ S_1 0^{\ i-2} + \cdots + N_i\ .S_1 0^{\ 0}$$

$$N_1 N_2 \dots N_i = N_1.\ S_1 0^{\ i-1} + S_1.S_1 0^{\ i-1} + 0.\ S_1 0^{\ i-2} \dots + N_i\ .S_1 0^{\ 0}$$

$$N_1N_2 \dots N_i = (N_1 + S_1).\ S_10^{\ i-1} + 0.\ S_10^{\ i-2} \dots + N_i\ .S_10^{\ 0}$$

On est alors obligé de réécrire une correspondance entre deux notations :

$$N_1N_2 \dots N_i = (N_1 + S_1)0 \dots\ N_i = N'_1N'_2 \dots N'_i$$

Avec:

$$N'_1 = N_1\ ; N'_2 = 0\ \ ;\ N'_i = N_i$$

Le procédé se généralise. Si à son tour $(N_1 + S_1) = S_10$, l'écriture devient :

$$N_1N_2 \dots N_i = S_1.\ S_10^{\ i} + 0.\ S_10^{\ i-1} + 0.\ S_10^{\ i-2} \dots + N_i\ .S_10^{\ 0}$$

Soit la correspondance, en remarquant que puisqu'on rajoute un symbole $N'_1 = S_1$ alors :

$$N_1N_2 \dots N_i = S_100 \dots\ N_i = N'_1N'_2N'_3 \dots N'_{i+1}$$

Avec:

$$N'_1 = S_1\ ; N'_2 = 0\ ;\ N'_3 = 0\ ;\ N'_{i+1} = N_i$$

On voit donc qu'une numération en base n avec emploi du zéro reste toujours avec n symboles allant de 1 à n, mais que l'emploi du zéro transforme son écriture. En particulier, le fait que dans notre système en base 10 nous n'employons que les symboles de 0 à 9 masque par un jeu d'écriture le fait que nous avons un symbole pour chaque ensemble d'unités notées 1,2,3,4,5,6,7,8,9 et un signe formé de deux symboles disjoints, noté 10, pour un ensemble de dix unités. Ainsi nous n'utilisons que les chiffres 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 en base 10.

D'une manière générale, le nombre de symboles différents servant à écrire les nombres dans un système de numération positionnel est égal à la taille de sa base, que le zéro soit utilisé ou pas.

Notre formule s'écrit donc :

$$N_1N_2 \dots N_i = N_1.\ n^{i-1} + N_2.\ n^{i-2} + \cdots + N_i.\ n^0$$

Et si on veut mettre en évidence le décompte des i symboles avec une variable j :

$$N_1N_2 \dots N_i = \sum_{j=1}^{i} N_j.\ n^{i-j}$$

Exemple

Base de taille 3, système positionnel avec le chiffre zéro, système formé sur les 3 symboles de base :

$$a = 1\ ; b = 2\ ; c = 0$$

On donne l'écriture des premiers nombres avec l'algorithme :

$$c = cc = c.(symboles\ pour\ écrire\ la\ taille\ de\ la\ base) + c = 0.3 + 0 = 0$$
$$a = ca = c.(symboles\ pour\ écrire\ la\ taille\ de\ la\ base) + a = 0.3 + 1 = 1$$

$$b = cb = c.(symboles\ pour\ écrire\ la\ taille\ de\ la\ base) + b = 0.3 + 2 = 2$$

$$ac = a.(symboles\ pour\ écrire\ la\ taille\ de\ la\ base) + c = 1.3 + 0 = 3$$

ac symbolise donc cette base de taille 3. On poursuit :

$$aa = a.ac + a = 1.3 + 1 = 4$$
$$ab = a.ac + b = 1.3 + 2 = 5$$

$$bc = b.ac + c = 2.3 + 0 = 6$$
$$ba = b.ac + a = 2.3 + 1 = 7$$
$$bb = b.ac + b = 2.3 + 2 = 8$$

$$acc = ac.ac + c = 3.3 + 0 = 9$$
$$aca = ac.ac + a = 3.3 + 1 = 10$$
$$acb = ac.ac + b = 3.3 + 2 = 11$$

$$aac = aa.ac + c = 4.3 + 0 = 12$$
$$aaa = aa.ac + a = 4.3 + 1 = 13$$
$$aab = aa.ac + b = 4.3 + 2 = 14$$

$$abc = ab.ac + c = 5.3 + 0 = 15$$
$$aba = ab.ac + a = 5.3 + 1 = 16$$
$$abb = ab.ac + b = 5.3 + 2 = 17$$

$$bcc = bc.ac + c = 6.3 + 0 = 18$$
$$bca = bc.ac + a = 6.3 + 1 = 19$$
$$bcb = bc.ac + b = 6.3 + 2 = 20$$

$$bac = ba.ac + c = 7.3 + 0 = 21$$
$$baa = ba.ac + a = 7.3 + 1 = 22$$
$$bab = ba.ac + b = 7.3 + 2 = 23$$

$$bbc = bb.ac + c = 8.3 + 0 = 24$$
$$bba = bb.ac + a = 8.3 + 1 = 25$$
$$bbb = bb.ac + b = 8.3 + 2 = 26$$

$$accc = acc.ac + c = 9.3 + 0 = 27$$
$$acca = acc.ac + a = 9.3 + 1 = 28$$
$$accb = acc.ac + b = 9.3 + 2 = 29$$

$$acac = aca.ac + c = 10.3 + 0 = 30$$
$$acaa = aca.ac + a = 10.3 + 1 = 31$$
$$acab = aca.ac + b = 10.3 + 2 = 32$$

$$\dots \dots$$

Ainsi, la valeur d'un nombre $baabc$ constitué de $ab = 5$ symboles est :

$$baabc = b.\ ac^{ab-a} + a.\ ac^{ab-b} + a.\ ac^{ab-ac} + b.\ ac^{ab-aa} + c\ .ac^{ab-ab}$$

Ce qui correspond dans notre système de référence à :

$$baabc = 2.\ 3^{5-1} + 1.\ 3^{5-2} + 1.\ 3^{5-3} + 2.\ 3^{5-4} + 0\ .3^{5-5} = 204$$

On constate donc que si la suite de symboles $baabc$ appartient à un système positionnel de base $ac = 3$ avec présence du zéro elle vaut 204 unités, et correspond à un unique jeu de valeur possible :

$$c = 0\ ;\ a = 1\ ; b = 2$$

… et si elle appartient à un système positionnel de base c =3 sans présence du zéro, elle vaut 207 unités (voir exemple de section précédente) :

$$baabc = b.\ c^{ab-a} + a.\ c^{ab-b} + a.\ c^{ab-c} + b.\ c^{ab-aa} + c$$

Ce qui correspond dans notre système de référence à :

$$baabc = 2.\ 3^{5-1} + 1.\ 3^{5-2} + 1.\ 3^{5-3} + 2.\ 3^{5-4} + 3 = 207$$

et correspond à un unique jeu de valeur possible :

$$c = 3\ ;\ a = 1\ ; b = 2$$

Par conséquent, si $baabc$ vaut 204 unités, on sait la valeur de chaque symbole en base ac =3 et on sait que le zéro est utilisé dans ce nombre. Dans ce cas le système de numération emploie le zéro.

Par conséquent, si $baabc$ vaut 207 unités, on sait la valeur de chaque symbole en base c =3 et on sait que le zéro n'est pas utilisé dans ce nombre par les 3 symboles qui forment ce système. Dans ce cas le système de numération n'emploie pas le zéro.

On remarque que ces déductions reposent sur le fait qu'on connaît la valeur de tous les symboles de la base, sauf celui représentant la valeur taille de la base, pour lequel on a les possibilités :

$$ac = 3 \text{ et } c = 0$$

ou

$$c = 3$$

La valeur en nombre d'unités d'un nombre utilisant le symbole c, comptés par exemple dans notre système de référence en base 10, nous permet donc d'élucider les particularités du système de numération étudié. Heureusement ce n'est pas si simple, car nous ne connaissons peut-être pas les valeurs de tous les autres symboles du système de numération exotique étudié, et en particulier nous cherchons par ce traité a présenter une méthode d'étude.

Unicité de la solution des équations de la formule

Soit un nombre noté $N_1N_2 \ldots\ N_i$, avec $1 \leq i$, et avec chaque symbole N_i qui peut être égal à un des symboles de la base :

$$N_1 \in (S_1\ ; S_2\ ; \ldots\ ;\ S_n)$$

$$N_2 \in (S_1\ ; S_2\ ; \ldots\ ;\ S_n)$$

…

$$N_i \in (S_1\,; S_2\,; \dots; \,S_n)$$

A tout nombre $N_1N_2 \dots N_i$ correspond par construction algorithmique un seul ensemble d'unités en base n, par conséquent pour une base donnée il existe un seul jeu de valeurs possible pour les symboles $N_1; N_2; \dots; N_i$.

$$N_1N_2 \dots N_i = N_1.\, n^{i-1} + N_2.\, n^{i-2} + N_3.\, n^{i-3} + \dots + N_{i-1} + N_i$$

Approches du symbole zéro dans un système de numération positionnel exotique

Outre les preuves directes qu'on pourrait avoir par correspondances entre un symbole et une absence d'objets dans un ensemble, par exemple une collection de sacs de fruits, sur chaque sac étant écrit la présence d'un nombre de bananes dans ce sac. Ce qui est écrit sur un sac vide conduirait à faire l'hypothèse que le symbole sur ce sac soit celui du zéro.

…Ou encore la découverte d'écritures studieuses, par exemple une équation faisant apparaître l'invariance d'un symbole par addition avec un autre.

On peut remarquer que la présence ou non du zéro dans le système étudié peut commencer relativement à un système de référence de numération connaissant le zéro, par exemple le nôtre.

Remarquons que, c'est l'évidence, nous devons connaître le zéro si nous le cherchons ailleurs, mais si nous ignorions le zéro, il se pourrait que nous le découvrions sans l'avoir cherché, en étudiant un système exotique.

Exemple de décodage d'un nombre d'un système positionnel avec ou sans le chiffre zéro

La méthode la plus simple est de disposer de plusieurs nombres exotiques, le plus grand nombre constaté de symboles exotique différents dans ces écritures va nous permettre de poser une hypothèse forte sur la taille de la base. En effet, le nombre de symboles différents est égal à la taille de la base, que le zéro soit utilisé ou pas.

De par l'unicité de la formule, si on est certain de la taille de la base, il suffit d'un nombre formé d'autant de symboles exotiques que l'on souhaite et d'une seule correspondance avec notre propre comptage pour identifier des valeurs possibles aux symboles exotiques.

Soit ⌘●❒♏→ le nombre exotique présenté dans la section *Promenade dans une écriture de nombre exotique*, mais dont on ignore désormais la valeur des symboles.

Cependant, on a pu dénombrer avec nos nombres à nous la valeur de ce qu'il représentait.

Imaginons qu'on ait pu lister 8 symboles différents présents dans l'écriture d'une centaine de nombre. On pose alors l'hypothèse forte que $n = 8$

L'écriture du nombre exotique dans un système positionnel avec ou sans présence du zéro est :

⌘●❒♏→ = ⌘. 8^4 + ●. 8^3 + ❒. 8^2 + ♏. 8^1 + →

1) Si on a pu établir par comptage que :

⌘●❒♏→ = 16494 unités

…l'unique correspondance en base 8 des symboles ⌘●❐♏➔ avec nos symboles des unités 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 donnant la valeur 16494 est :

⌘●❐♏➔ $= N_1 N_2 N_3 N_4 N_5$

⌘●❐♏➔ $= 3.\ 8^4 + 8.\ 8^3 + 1.\ 8^2 + 5.\ 8^1 + 6.\ 8^0 = 16494$

Par conséquent :

⌘ = 3 ; ● = 8 ; ❐ = 1 ; ♏ = 5 ; ➔ = 6

…l'unique correspondance en base 8 des symboles ⌘●❐♏➔ avec le symbole 0 et nos symboles des unités 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 donnant la valeur 16494 est :

⌘●❐♏➔ $= N_1 N_2 N_3 N_4 N_5$

⌘●❐♏➔ $= 4.\ 8^4 + 0.\ 8^3 + 1.\ 8^2 + 5.\ 8^1 + 6.\ 8^0 = 16494$

Par conséquent :

⌘ = 4 ; ● = 0 ; ❐ = 1 ; ♏ = 5 ; ➔ = 6

La présence du zéro est possible dans un nombre si un de ses symboles peut s'écrire avec la valeur de la taille de la base. Ainsi avec ● = 0 ou 8, on ne peut pas savoir si le système étudié utilise ou non le zéro, mais on sait que s'il l'utilise, son symbole est ●. Le nombre ⌘●❐♏➔ = 16494 est donc précieux pour l'étude.

Précisons que si on ne trouve pas de candidat au zéro, ça ne veut pas dire que le système de numération exotique ne l'emploie pas.

2) Si on a pu établir par comptage que :

⌘♎❐❐ = 2185

…l'unique correspondance en base 8 des symboles ⌘♎❐❐ avec nos symboles des unités 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 donnant la valeur 2185 est :

⌘♎❐❐ $= 4.\ 8^3 + 2.\ 8^2 + 1.\ 8^1 + 1 = 2185$

…l'unique correspondance en base 8 des symboles ⌘♎❐❐ avec le symbole 0 et nos symboles des unités 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 donnant la valeur 2185 est :

⌘♎❐❐ $= 4.\ 8^3 + 2.\ 8^2 + 1.\ 8^1 + 1.\ 8^0 = 2185$
Dans les deux cas on a

⌘ = 4 ; ♎ = 2 ; ❒ = 1

On ne peut donc pas décider avec un tel nombre, dont la particularité est qu'aucun de ses symboles n'a la valeur de la taille de la base, si le système exotique emploie le zéro ou non.

3) Comment faire ?

Remarquons que dans ⌘●❒♏→ = 16494, le symbole ⌘ vaut 3 si le zéro est absent, et il vaut 4 si le zéro est présent.

Remarquons que dans ⌘♎❒❒ = 2185, le symbole ⌘ vaut 4.

On conclut donc que si ⌘ = 4, alors ● = 0. Le système de numération exotique étudié utilise donc le zéro.

On conclut qu'il nous faut donc au minimum la connaissance de la valeur de deux nombres (bien choisis) ainsi que la liste complète des symboles utilisés pour écrire les nombres pour décider si le système exotique utilise ou non le zéro.

En effet, nous sommes dans cet exemple en base 8 et jusqu'à présent nous connaissons :

● = 0 ; ❒ = 1 ; ♎ = 2 ; ⌘ = 4 ; ♏ = 5 ; → = 6

Il reste donc deux symboles :

♑ et er

L'un vaut donc 3 et l'autre 7, mais comment les distinguer ? il faut alors trouver au moins un nombre qui utilise au moins un de ces symboles. Sa valeur est directement écrite dans la décomposition en somme de produit si le système est positionnel.

Par exemple :

♑♏● $= 3.\ 8^2 + 5.\ 8^1 + 0.\ 8^0 = 232$

Donc ♑ $= 3$ et par déduction er $= 7$

Décodage rapide des symboles d'un système positionnel avec ou sans le chiffre zéro

Les valeurs des symboles N_1 ; N_2 ; … ; N_i peuvent être inconnues si on ne comprend pas le sens des symboles, mais si on sait combien d'unités correspondent à cette suite de symboles, et si on considère que ce nombre est formulé dans un système positionnel dont on connaît la base, on a vu qu'on pouvait les retrouver. Il n'est pas alors nécessaire d'écrire tous les nombres dans notre système à nous pour arriver à la décomposition en somme de produits donnant la valeur du nombre étudié. Nous donnons ci-dessous une méthode plus rapide.

Cette méthode donne les valeurs des symboles N_1 ; N_2 ; … ; N_i de façon non masquée par un jeu d'écriture dans $N_1N_2 \ldots N_i$ par l'éventuel usage du zéro. C'est pourquoi on notera les symboles obtenus par cette méthode comme $N'_1N'_2 \ldots N'_i$

Par exemple, ce que nous écrivons 107 en base 10 est écrit :

$$N_1N_2N_3 = 107 = N_1.\ 10^{3-1} + N_2.\ 10^{3-2} + N_3.\ 10^{3-3} = 1.10^{3-1} + 0.\ 10^{3-2} + 7.\ 10^{3-3}$$

Mais notre méthode va écrire la même quantité d'unités comme :

$$N'_1N'_2N'_3 = 0(10)7 = N'_1.10^{3-1} + N'_2.10^{3-2} + N'_3.10^{3-3} = 0.10^{3-1} + (10).10^{3-2} + 7.10^{3-3}$$

On transforme ensuite la graphie en réarrangeant la somme de produits :

$$0.10^{3-1} + (10).10^{3-2} + 7.10^{3-3} = 1.10^{3-1} + 0.\ 10^{3-2} + 7.\ 10^{3-3}$$

Et donc, dans cet exemple, si $N'_2 = (10)$, alors

$$N_1 = N'_1 + 1 = 0 + 1$$

$$N_2 = N'_2 - N'_2 = 0$$

$$N_3 = N'_3 = 7$$

D'une manière générale, si un des symboles N'_1 ; N'_2 ; …; N'_i a la valeur de la taille de la base, il convient de noter cette valeur entre parenthèses.

Méthode :

$x_1.\ n^{i-1}$ est le nombre rationnel auquel on ajoute le nombre minimum pouvant être formé avec $n^{i-2} +\ n^{i-3} \dots +\ n^1 +\ n^0$, pour obtenir la valeur de $N_1N_2 \dots N_i$. Ce nombre minimum est connu par la valeur de n.

On a donc :

$$x_1.\ n^{i-1} + (n^{i-2} +\ n^{i-3} \dots +\ n^1 +\ n^0) = N_1N_2 \dots N_i$$

En notant $N'_1 = E(\ x_1)$ la partie entière de x_1, on a donc :

$$N'_1 = E\left(\frac{N_1N_2 \dots N_i -\ (n^{i-2} +\ n^{i-3} \dots +\ n^1 +\ n^0)}{n^{i-1}}\right)$$

Si $N'_1 = n$, alors la valeur de N'_1 sera notée entre parenthèses dans $N'_1\ N'_2 \dots N'_i$

On procède de même pour N'_2 en se servant de la valeur trouvée pour N'_1 :

$x_2.\ n^{i-2}$ est le nombre rationnel auquel on ajoute le nombre minimum pouvant être formé avec $N'_1.\ n^{i-1} +\ n^{i-3} \dots +\ n^1 + 1$ pour obtenir la valeur de $N_1N_2 \dots N_i$.

D'où :

$$N'_2 = E\left(\frac{N_1N_2 \dots N_i - (N'_1.\ n^{i-1} +\ n^{i-3} \dots +\ n^1 +\ n^0)}{n^{i-2}}\right)$$

Si $N'_2 = n$, alors la valeur de N'_2 sera notée entre parenthèses dans $N'_1\ N'_2 \dots N'_i$

On procède de même pour N'_3 en se servant des valeurs trouvées pour N'_1 et N'_2 :

$x_3.\ n^{i-3}$ est le nombre rationnel auquel on ajoute le nombre minimum pouvant être formé avec $N'_1.\ n^{i-1} + N'_2.\ n^{i-2} +\ n^{i-4} \dots +\ n^1 +\ n^0$ pour obtenir la valeur de $N_1 N_2 \dots N_i$.

D'où :

$$N'_3 = E\left(\frac{N_1 N_2 \dots N_i - (N'_1.\ n^{i-1} + N'_2.\ n^{i-2} +\ n^{i-4} \dots +\ n^1 +\ n^0)}{n^{i-3}}\right)$$

Si $N'_3 = n$, alors la valeur de N'_3 sera notée entre parenthèses dans $N'_1\ N'_2 \dots N'_i$

… … …

On procède de même pour N'_i en se servant des valeurs trouvées pour N'_1 ; N'_2 ; N'_3 ;… N'_{i-1} :

$x_i.\ n^0$ est le nombre rationnel auquel on ajoute le nombre minimum pouvant être formé avec $N'_1.\ n^{i-1} + N'_2.\ n^{i-2} + N'_3.n^{i-3} \dots +\ N'_{i-1}.n^1$ pour obtenir la valeur de $N_1 N_2 \dots N_i$.

D'où :

$$N'_i = E\left(\frac{N_1 N_2 \dots N_i - (N'_1.\ n^{i-1} + N'_2.\ n^{i-2} + N'_3.n^{i-3} \dots +\ N'_{i-1}.n^1)}{n^0}\right)$$

Si $N'_i = n$, alors la valeur de N'_i sera notée entre parenthèses dans $N'_1\ N'_2 \dots N'_i$

On réarrange alors l'écriture selon qu'on sait si le zéro est utilisé ou non.

Exemple

⌘●❒♏→ $= N_1 N_2 N_3 N_4 N_5$

⌘●❒♏→ $= N'_1.\ 8^4 + N'_2.\ 8^3 + N'_3.\ 8^2 + N'_4.\ 8^1 + N'_5.\ 8^0$

⌘●❒♏→ $= 3.\ 8^4 + (8).\ 8^3 + 1.\ 8^2 + 5.\ 8^1 + 6.\ 8^0 = 16494\ unités$

Donc sans usage du zéro :

⌘●❒♏→ $= 3\ ;\ (8)\ ;\ 1\ ;\ 5\ ;\ 6\ = 16494\ unités$

⌘●❒♏→ s'écrit 38156 *avec nos symboles en base* 8 *sans usage du zéro*

Donc avec usage du zéro :

⌘●❒♏→ $= 3\ ;\ (8)\ ;\ 1\ ;\ 5\ ;\ 6\ =\ 3 + 1\ ; 0\ ; 1\ ;\ 5\ ; 6\ = 16494\ unités$

⌘●❒♏→ s'écrit 40156 *avec nos symboles en base* 8 *avec usage du zéro*

ANNEXE

Conversions d'écritures d'un nombre d'une base $\boldsymbol{n}$ avec zéro à une base $\boldsymbol{n}$ sans zéro

Exemple 1

Conversions en base 3 sans nos symboles de numération dans l'écriture du nombre. Pour plus de lisibilité, on conserve nos symboles pour les puissances de base.

Sans zéro :

$$a = 1\,; b = 2\,;\; c = 3$$
$$bc = b.c + c = 2.3 + 3 = 9$$
$$bc = b.\ 3^1 + c.\ 3^0 = 9$$

Avec zéro :

$$c = 0\,;\; a = 1\,; b = 2$$
$$acc = ac.ac + c = 3.3 + 0 = 9$$
$$acc = a.\ 3^2 + c.\ 3^1 + c.\ 3^0 = 9$$

Routine de « sans zéro vers avec zéro » :

On montre comment on transforme $b\boldsymbol{c} = 9$ avec $\boldsymbol{c} = 3$, (le symbole $\boldsymbol{c}$ étant écrit en caractère gras) en $acc = 9$ avec $c = 0$ (le symbole c étant écrit en caractère normal). Dans le doublet ci-dessous, $\boldsymbol{c}$ a la valeur de la taille de la base :

$$b\,; \boldsymbol{c}$$

On lui donne maintenant la valeur d'un zéro et non plus celle de la taille de la base. On incrémente alors d'une unité le rang le précédant , ce qui revient à réorganiser par associativité la distribution des puissances de la valeur de la base :

$$b + 1\,; c$$

Or $b + a = \boldsymbol{c}$, qui a la valeur de la taille de la base :

$$\boldsymbol{c}\,; c$$

Donc on répète la même opération, créant ainsi un rang supplémentaire :

$$a\,; c\,; c$$

On a alors obtenu :

$$acc = 9$$

Cette routine mnémotechnique banalise pour cet exemple l'opération suivante. On part de la décomposition en somme de produits d'un nombre en base 3 sans usage du zéro :

$$b\boldsymbol{c} = b.\ 3^1 + \boldsymbol{c}.\ 3^0 = 9$$

On cesse ci-dessous d'écrire $b\boldsymbol{c}$ dans l'égalité, car il ne s'agit plus du nombre décomposé en somme de produits, mais seulement de sa valeur :

$$2.\ 3^1 +\ 3^1.\ 3^0 = 9$$

$$(2 + 1).\ 3^1 + 0.\ 3^0 = 9$$

$$(3^1).\ 3^1 + 0.\ 3^0 = 9$$

$$1.3^2 + \ \ 0.3^1 + 0.\ 3^0 = 9$$

On aboutit à la décomposition en somme de produits d'un nombre en base 3 avec usage du zéro :

$$acc = a.\ 3^2 + c.\ 3^1 + c.\ 3^0 = 9$$

Routine de « avec zéro vers sans zéro » :

On montre comment on transforme $acc = 9$ avec $c = 0$ (le symbole c étant écrit en caractère normal) en $b\boldsymbol{c} = 9$ avec $\boldsymbol{c} = 3$, (le symbole $\boldsymbol{c}$ étant écrit en caractère gras). Dans le triplet ci-dessous, c a la valeur d'un zéro :

$$a\ ;c\ ;c$$

On lui donne maintenant la valeur de la taille de la base et non plus celle d'un zéro. On décrémente alors d'une unité le rang le précédant, ce qui revient à réorganiser par associativité la distribution des puissances de la valeur de la base :

$$a - 1\ ; \boldsymbol{c} - 1\ ; \boldsymbol{c}$$

Or $a - 1 = 0 = c$, qui a la valeur d'un zéro, ce qui fait disparaître ce rang, et $\boldsymbol{c} - 1 = b$. On a alors obtenu :

$$b\ ; \boldsymbol{c}$$

$$b\boldsymbol{c} = 9$$

Cette routine mnémotechnique banalise pour cet exemple l'opération suivante. On part de la décomposition en somme de produits d'un nombre en base 3 avec usage du zéro :

$$acc = a.\ 3^2 + c.\ 3^1 + c.\ 3^0 = 9$$

On cesse ci-dessous d'écrire acc dans l'égalité, car il ne s'agit plus du nombre décomposé en somme de produits, mais seulement de sa valeur :

$$1.\ 3^2 + 0.\ 3^1 + 0.\ 3^0 = 9$$

$$3^1 + \ 3^1 + 3^1 + \ 0.3^1 + 0.\ 3^0 = 9$$

$$2.3^1 + \ 1.3^1 + 0.\ 3^0 = 9$$

$$2.\ 3^1 + \ 3.3^0 = 9$$

On aboutit à la décomposition en somme de produits d'un nombre en base 3 sans usage du zéro :

$$b\boldsymbol{c} = b.\ 3^1 + \boldsymbol{c}.\ 3^0 = 9$$

$$acc = a.\ 3^2 + c.\ 3^1 + c.\ 3^0 = 9$$

Cette routine se généralise.

Exemple 2

Conversions en base 8 avec nos symboles de numération dans l'écriture du nombre.

Sans usage du zéro

$$8888 = 8.\ 8^3 + 8.\ 8^2 + 8.\ 8^1 + 8.\ 8^0 = 4680 \text{ unités}$$

Incrémentation de droite à gauche de la notation pour introduire l'usage du zéro :

$$\begin{gathered} 8 ; 8 ; 8 ; 8 \\ = \\ 8 \ ; \ 8 \ ; \ 8 + 1 ; 0 \\ = \\ 8 \ ; \ 8 + 1 ; \ 0 + 1 ; 0 \\ = \\ 8 + 1 ; 0 + 1 ; \ 0 + 1 ; 0 \\ = \\ 0 + 1 ; 0 + 1 ; 0 + 1 ; \ 0 + 1 ; 0 \\ = \\ 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 0 \end{gathered}$$

$$11110 = 1.\ 8^4 + 1.\ 8^3 + 1.\ 8^2 + 1.\ 8^1 + 0.\ 8^0 = 4680 \text{ unités}$$

(avec usage du zéro)

Décrémentation de droite à gauche de la notation pour évacuer l'usage du zéro :

$$\begin{gathered} 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 0 \\ = \\ 1 ; 1 ; 1 ; 1 - 1 ; 8 \\ = \\ 1 ; 1 ; 1 - 1 ; 8 ; 8 \\ = \\ 1 ; 1 - 1 ; 8 ; 8 ; 8 \\ = \\ disparition\ du\ 5\text{è}me\ rang ; 8 ; 8 ; 8 ; 8 \\ = \\ 8 ; 8 ; 8 ; 8 \end{gathered}$$

$$8888 = 8.\ 8^3 + 8.\ 8^2 + 8.\ 8^1 + 8.\ 8^0 = 4680 \text{ unités}$$
(sans usage du zéro)

Exemple 3

Conversions en base 10 avec nos symboles de numération dans l'écriture du nombre.

Sans usage du zéro

On note (10) comme un unique symbole (un chiffre)

$$9(10) = 9.\ 10^1 + (10).\ 10^0 = 100 \text{ unités}$$

(9(10) est un nombre à deux symboles)

Incrémentation de droite à gauche de la notation pour introduire l'usage du zéro :

$$9\,;(10) \\ = \\ 9+1\,;0 \\ = \\ (10)\,;0 \\ = \\ 0+1\,;0\,;\ 0 \\ = \\ 1\,;0\,;0$$

$$100 = 1.\ 10^2 + 0.\ 10^1 + 0.\ 10^0 = 100 \text{ unités}$$

(avec usage du zéro)

Décrémentation de droite à gauche de la notation pour évacuer l'usage du zéro :

$$1\,;0\,;0 \\ = \\ 1\,;0-1\,;(10) \\ = \\ \textit{disparition du troisième rang}\,;(10)-1\,;(10) \\ = \\ 9\,;10$$

$$9(10) = 9.\ 10^1 + (10).\ 10^0 = 100 \text{ unités}$$

(avec usage du zéro)

Exemple 4

Conversions en base 10 avec nos symboles de numération dans l'écriture du nombre.

Sans usage du zéro

On note (10) comme un unique symbole (un chiffre)

$$3(10)(10)9(10) = 3.\ 10^4 + (10).\ 10^3 + (10).\ 10^2 + 9.\ 10^1 + (10).\ 10^0 = 41100 \text{ unités}$$

(3(10)(10)9(10) est un nombre à cinq symboles)

Incrémentation de droite à gauche de la notation pour introduire l'usage du zéro :

$$3\,;\ (10)\,;\ (10)\,;\ 9\,;\ (10) \\ = \\ 3\,;\ (10)\,;\ (10)\,;\ 9+1\,;\ 0 \\ = \\ 3\,;\ (10)\,;\ (10)\,;(10)\,;\ 0 \\ =$$

$$3\ ;\ (10)\ ;\ (10)+1\ ;0\ ;\ 0$$
$$=$$
$$3\ ;\ (10)+1\ ;\ 0+1\ ;0\ ;\ 0$$
$$=$$
$$3+1\ ;\ 0+1\ ;\ 0+1\ ;0\ ;\ 0$$
$$=$$
$$4\ ;1\ ;1\ ;0\ ;0$$

$$41100 = 4.\ 10^4 + 1.\ 10^3 + 1.\ 10^2 + 0.\ 10^1 + 0.\ 10^0 = 41100 \text{ unités}$$

(avec usage du zéro)

Décrémentation de droite à gauche de la notation pour évacuer l'usage du zéro :

$$4\ ;1\ ;1\ ;0\ ;0$$
$$=$$
$$4\ ;1\ ;1\ ;0-1\ ;(10)$$
$$=$$
$$4\ ;1\ ;1-1\ ;(10)-1\ ;(10)$$
$$=$$
$$4\ ;1\ ;0\ ;9\ ;(10)$$
$$=$$
$$4\ ;1-1\ ;(10)\ ;9\ ;(10)$$
$$=$$
$$4\ ;0\ ;(10)\ ;9\ ;(10)$$
$$=$$
$$4-1\ ;(10)\ ;(10)\ ;9\ ;(10)$$
$$=$$
$$3\ ;(10)\ ;(10)\ ;9\ ;(10)$$

$$3(10)(10)9(10) = 3.\ 10^4 + (10).\ 10^3 + (10).\ 10^2 + 9.\ 10^1 + (10).\ 10^0 = 41100 \text{ unités}$$

(avec usage du zéro)